14 شماریات (STATISTICS)

یہاں جھوٹ، سفید جھوٹ اور شماریات ہیں۔

ڈزرائیلی

14.1 تعارف

نویں کلاس میں آپ نے اعداد شمار کی غیر مرتب تعددی بٹاؤ میں درجہ بندی کرنا سیکھا آپ نے اعداد و شمار کا مختلف گراف جیسے ہسٹوگرام (جس میں متغیر چوڑائی والے بھی شامل بار گراف تعدد کثیر ضلعی کا تصویری اظہار بھی سیکھا بلکہ آپ ایک قدم آگے بڑھ گئے کیونکہ آپ نے غیر مرتب اعداد شمار کے عددی اظہار کا مطالعہ بھی کیا جسے مرکزی رجحان کی پیائش کہتے ہیں جیسے درمیانہ، وسطانیہ اور موڈ۔ اس باب میں ہم ان تین پیائشوں کی توسیع غیر مرتب اعداد شمار سے مرتب اعداد اور شمار تک کریں گے ہم مجموعی تعدد (cumulative frequency)، مجموعی تعدی بٹاؤ اور مجموعی تعددی منحنی جسے اوجائیو (Ogives) بھی کہتے ہیں، کو کس طرح بنایا جاتا ہے، کے تصور کا مطالعہ کریں گے۔

14.2 مرتب اعداد شمار کا درمیانہ

مشاہدات کا درمیانہ (یا اوسط) جیسا کہ ہم جانتے ہیں، تمام مشاہدات کے حاصل جمع کو مشاہدات کی کل تعداد سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔ یاد کیجئے آپ نے نویں کلاس میں بڑھا تھا اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مشاہدات ہیں اور $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ان کے متعلقہ تعدد ہیں۔ اتب درمیانہ مشاہدہ x_1، f_1 بار x_2، f_2 بار واقع ہوتا ہے۔

اب مشاہدات کا حاصل جمع $= f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n$ اور مشاہدات کی تعداد $= f_1 + f_2 + \ldots + f_n$

اس لئے دئے ہوئے اعداد و شمار کا درمیانہ ہے

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

یاد کیجئے ہم یونانی علامت Σ (سگما) کا استعمال کرکے اس کو مختصر شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

جس کو مزید مختصر کرنے پر لکھا جاتا ہے۔ $\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ ، یہ بات ظاہر کہ i، 1 سے n تک کی قدر دیتا ہے۔

آیئے اس فارمولہ کو مندرجہ ذیل مثال میں درمیانہ معلوم کرنے میں کرتے ہیں۔

مثال 1: ایک اسکول کی دسویں کلاس کے 30 طلباء کے ذریعے حاصل کردہ ریاضی میں 100 نمبروں میں سے حاصل کردہ نمبر مندرجہ ذیل جدول میں دیے گئے ہیں۔ طلبا کے ذریعے حاصل کئے گئے نمبروں کا درمیانہ معلوم کیجئے۔

حاصل کردہ نمبر (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
طلباء کی تعداد (f_i)	1	1	3	4	2	2	4	4	1	1	2	3	1

حل: یاد کیجئے کہ درمیانہ نمبر معلوم کرنے کے لئے ہمیں ہر ایک x_i کا اس کے نظیری f_i سے حاصل ضرب درکار ہے۔ آیئے پہلے اس کو کالموں میں رکھتے ہیں جیسا شکل 14.1 میں دکھایا گیا ہے۔

جدول 14.1

حاصل کردہ نمبر x_i	طلباء کی تعداد (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
کل	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 1779$

اب $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$

اس لئے حاصل کردہ نمبروں کا درمیانہ ہے = 59.3

روزمرّہ کی زندگی کی صورت حال میں زیادہ تر یہ ہوتا ہے کہ اعداد وشمار عام طور پر اتنے زیادہ ہوتے ہیں کہ ان کے معنی خیز مطالعہ کے لئے ان کو مرتب اعداد وشمار میں یکجا کیا جائے۔ اس لئے ہمیں غیر مرتب اعداد وشمار کو مرتب اعداد وشمار میں بدلنے کی ضرورت ہے اور ایک ایسا طریقہ معلوم کریں جس سے ان کا درمیانہ معلوم کیا جا سکے۔

آیئے مثال 1 میں دیئے گئے غیر مرتب اعداد وشمار 15 کو چوڑائی والے کلاس وقفہ لے کر مرتب اعداد وشمار میں تبدیل کرتے ہیں۔ یاد کیجئے کہ ہر کلاس وقفہ کا تعدد لکھتے وقت، طلبا جو بالائی کلاس حد میں آئے۔ ان کو اگلی کلاس میں شامل کرتے ہیں مثال کے طور پر 4 طلبا جنہوں نے 40 نمبر حاصل کئے ہیں ان کو کلاس وقفہ 55-40 میں شامل کریں گے۔ 40-25 میں نہیں۔ اس بات کو ذہن میں رکھتے ہوئے آیئے مرتب تعددی بناوٹ جدول بناتے ہیں (جدول 14.2 دیکھئے)

جدول 14.2

کلاس وقفہ	10 - 25	25 - 40	40 - 55	55 - 70	70 - 85	85 - 100
طلباء کی تعداد	2	3	7	6	6	6

اب ہمیں ہر کلاس وقفہ کے لئے ایک ایسا نقطہ چاہیے جو پوری کلاس کی نمائندگی کرے۔ ایسا مانا جاتا ہے ہر کلاس وقفہ کی تعداد اس کے وسطی نقطہ کے ارد گرد مرکوز ہوتی ہے۔ اس لئے ہر کلاس وقفہ کا وسطی نقطہ (کلاس مارک) اس کلاس میں آنے والے مشاہدات کی نمائندگی کے لئے چنا جاتا ہے۔ یاد کیجئے کہ ہم کسی کلاس کا وسطی نقطہ (یا کلاس مارک) اس کی بالائی اور زیریں حد کی اوسط معلوم کر کے نکالتے ہیں: یعنی

$$\text{کلاس مارک} = \frac{\text{زیریں حد} + \text{بالائی حد}}{2}$$

جیسے جدول 14.2 میں کلاس 25-10 کے کلاس مارک $\frac{10+25}{2}$ یعنی 17.5 ہیں

اسی طرح سے ہم باقی کلاس وقفوں کے کلاس مارکس آسانی سے نکال سکتے ہیں۔ ان مارکس کو ہم x_i's تصور کرتے ہیں اب عمومی طور پر i ویں کلاس وقفہ کے لئے تعدد f_i ہے اور اس کا نظیری کلاس مارک x_i ہے۔ اب ہم اسی طریقہ سے درمیانہ معلوم کریں گے جیسا کہ مثال 1 میں کیا گیا ہے۔

جدول14.3

کلاس وقفہ	طلبا کی تعداد (f_i)	کلاس مارک (x_i)	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35-0
25-40	3	32.5	97-5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.5
70-05	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
کل	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 1860.0$

آخری کالم میں ملاقدروں کاحل جمع ہمیں $\Sigma f_i x_i$ دیتاہے اس لئے دئے ہوئے اعدادوشمار کادرمیانہ $\bar{x}$ ہے۔

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{1860.0}{30} - 62$$

درمیانہ معلوم کرنے کے اس نئے طریقہ کوراست طریقہ کہتے ہیں درمیانہ معلوم کرنے کا ہم نے یہ مشاہدہ کیا جدول 14.1 اور 14.3 میں ایک ہی اعدادوشمار کواستعمال کیا گیااوردرمیانہ معلوم کرنے کاایک ہی فارمولہ لگایا گیالیکن نتیجہ مختلف آیا۔کیا آپ سوچ سکتے ہیں کہ ایسا کیوں ہوا،اوران میں سے کون ساطریقہ زیادہ صحیح ہے؟ دوقدروں میں یہ فرق جدول 14.2 میں لئے گئے وسطی کی وجہ سے ہے،59.3 صحیح درمیانہ ہے جب کہ 2 تقریبی۔

کبھی جب x_i اور f_i کے عددی قدر بہت بڑی ہوتی ہے تب x_i اور f_i کا حاصل ضرب معلوم کرنا کافی مشکل اور پیچیدہ ہوجاتا ہے۔ایسی صورت حال کے لئے کوئی ایساطریقہ سوچئے جس سے تحسیبات میں کافی آسانی ہوجائے۔ f_i کے ساتھ کچھ بھی نہیں کرسکتے لیکن ہم x_i کوایک چھوٹے عدد میں بدل سکتے ہیں۔

تاکہ تحسیبات مختصراورآسان ہوجائیں۔آپ ایسا کیسے کریں۔ایک متعین عددکو x_i میں سے گھٹانے کے بارے میں آپ کاخیال ہے۔آیئے اس طریقہ کواستعمال کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

سب سے پہلاقدم یہ ہے کہ x_i, s میں ایک درمیانہ فرض کیجئے اوراس کو'a'سے ظاہر کیجئے۔اپنے تحسیبات کومزید آسان بنانے کے لئے ہم وہ فرض کرتے ہیں جو $x_1, x_2, \ldots, x_n$ کے وسط میں ہے اس لئے ہم a=47.5یاa=62.5چن سکتے ہیں،

آیئے a=47.5 چنئے

سے انحراف یعنی $d_i = x_i - a = xi - 47.5$

بہتر اقدام f_i اور d_i کا حاصل ضرب معلوم کرنا ہے اور تمام $f_i d_i$ کا حاصل جمع معلوم کرنے سے یہ تحسیب مندرجہ ذیل جدول 14.4 میں دکھائی گئی ہے۔

جدول 14.4

کلاس وقفہ	طلبا کی تعداد (f_i)	کلاس مارکس (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10-25	2	17.5	–30	–60
25-40	7	32.5	–15	–45
40-55	7	47.5	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
کل	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 435$

اس لئے جدول 14.4 سے انحرافوں کا درمیانہ $\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

اب $\bar{d}$ اور $\bar{x}$ کے درمیان تعلق کو معلوم کیجئے۔

کیونکہ d_i حاصل کرنے کے لئے ہم، (a) کو ہر ایک x کو گھٹانے اس لئے درمیانہ $\bar{x}$ حاصل کرنے کے لئے ہمیں $\bar{d}$ میں a کو جمع کرنے کی ضرورت ہے۔ اس کو ریاضیاتی طور پر ہم لکھتے ہیں۔

انحراف کا درمیانہ $\bar{d} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

اس لئے $\bar{d} = \frac{\sum f_i (x_i - a)}{\sum f_i}$

$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}$$

$$= \bar{x} - a\frac{\sum f_i}{\sum f_i}$$

اس لئے $= \bar{x} - a$

$$\bar{x} = a + \bar{d}$$

یعنی $\overline{x} = a + \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

a، $\Sigma f_i d_i$ اور Σf_i کی قدریں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\overline{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

اس لئے حاصل کردہ نمبروں کا درمیانہ 62 ہے۔

اوپر جس طریقہ پر بحث کی گئی ہے اسے فرض کئے گئے درمیانہ کا طریقہ

مشغلہ 1: جدول 14.3 سے x_i (یعنی 17.5, 32.5 اور اسی طرح آگے بھی) کو a کے طور پر لے کر درمیانہ معلوم کیجئے آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔ آپ دیکھتے ہیں کہ ہر ایک حالت میں نکالا گیا درمیانہ ایک ہی ہے یعنی 62۔ (کیوں)

اس لئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ درمیانہ کی قدر a کے انتخاب پر منحصر نہیں ہے۔

جدول 14.4 میں مشاہدہ کیجئے کالم کی تمام قدریں 15 کے اضعاف ہیں۔ اس لئے اگر کالم کے تمام قدروں کو ہم 15 سے تقسیم کریں تو ہمیں بہت سے چھوٹے عدد ملیں گے جن کو f_i سے ضرب کرنا ہوگا۔

(یہاں 15 ہر ایک کلاس کا سائز ہے)

اس لئے مان لیجئے $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$، جہاں فرض کیا گیا درمیانہ a اور h کلاس کا سائز ہے۔ اب ہم اس طرح سے معلوم کریں اور $\Sigma f_i u_i$ پھر) h=15 لے کر۔ آیئے جدول 14.5 بناتے ہیں۔

جدول 14.5

کلاس وقفہ	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10-25	2	17-5	–30	–2	–4
25-40	3	32-5	–15	–1	–3
40-55	7	47-5	0	0	0
55-70	6	62.5	15	1	6
70-85	6	77-5	30	2	12
85-100	6	92-5	45	3	18
کل	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_i u_i = 29$

مان لیجئے $u = \dfrac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$

یہاں، دوبارہ، آیئے $\bar{x}$ اور $\bar{u}$ کے درمیان تعلق معلوم کرتے ہیں۔

ہمارے پاس ہے

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i \frac{(x_i - a)}{h}}{\sum f_i} = \frac{1}{h} \frac{\sum f_i x_i - a \sum f_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - a \frac{\sum f_i}{\sum f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\bar{x} - a\right]$$

اس لئے $h\bar{u} = \bar{x} - a$ یا $\bar{x} = a + h\bar{u}$

یعنی $\bar{x} = a + h\bar{u} = a + h\left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right)$

اب جدول 14.5 سے قدریں a، h، $\sum f_i u_i$ اور $\sum f_i$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\bar{x} = 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30}\right)$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

اس طرح سے طالب علم کے ذریعے حاصل کردہ نمبروں کا درمیانہ 62 ہے

اوپر بحث کیا گیا طریقہ حرکت انحراف طریقہ کہلاتا ہے

ہم نوٹ کرتے ہیں کہ

- حرکت انحراف استعمال کرنے میں آسان ہوگا اگر d_i میں کوئی مشترک جزو ضربی ہوں
- تینوں طریقوں سے نکالا گیا درمیانہ ایک ہی ہے
- فرض کیا گیا درمیانہ اور حرکت انحراف طریقہ، راست طریقہ کی مختصر شکل ہے۔
- فارمولہ $\bar{x} = a + h\bar{u}$ پھر بھی صحیح ہے اور استعمال ہوگا اگر a اور h ایسے دئے ہوئے نہیں ہوں جیسے اوپر دئے گئے ہیں لیکن کوئی غیر صفر اعداد ہوں جبکہ $u_i = \frac{x_i - a}{h}$

آیئے ان طریقوں کو دوسری مثالوں میں حل کرتے ہیں

مثال 2: نیچے دئے گئے جدول میں ہندوستان کے مختلف صوبوں اور مرکز کے زیر انتظام علاقوں کے دیہاتی علاقوں کے پرائمری اسکول کی خاتون ٹیچر کا فی صد بتا دیا ہوا ہے۔ خاتون ٹیچرس کا دریانہ فیصد مذکورہ بالا تینوں طریقوں سے معلوم کیجئے۔

خاتون ٹیچر کا فی صد	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
صوبوں/U.T کی تعداد	6	11	7	4	4	2	1

(ذرائع : این سی ای آر ٹی کے ذریعے کئے گئے ساتواں کل ہند اسکولی تعلیم سے متعلق کا سروے کے مطابق)

حل: لیجئے اس لئے پہلے ہر ایک لاس کے کلاس مارکس x_i معلوم کرتے ہیں۔ اور ان کو کالموں میں رکھئے جدول 14.6 دیکھئے

جدول 14.6

خاتون ٹیچرس کا فی صد	صوبوں کی تعداد	x_i
15 - 25	6	20
25 - 35	11	30
35 - 45	7	40
45 - 55	4	50
55 - 65	4	60
65 - 75	2	70
75 - 85	1	80

یہاں ہم $a=50$، $h=10$، لیتے ہیں تب $d_i = x_i - 50$ اور $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$

اب ہم d_i اور u_i معلوم کریں گے اور ان کو جدول 14.7 میں رکھیں گے

جدول 14.7

خاتون ٹیچرس کا فی صد	صوبوں/UT کی تعداد	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15-25	6	20	–30	–3	120	–180	–18
25-35	11	30	–20	–2	330	–220	–22
35-45	7	40	–10	–1	280	–70	–7
45-55	4	50	0	0	200	0	0
55-65	4	60	10	1	240	40	4
65-75	2	70	20	2	140	40	4
75-85	1	80	30	3	80	30	3
کل	35				1390	–360	–36

اوپر دیئے گئے جدول سے ہمیں ملتا ہے $\sum f_i u_i = -36$، $\sum f_i d_i = -360$، $\sum f_i = 35$، $\sum f_i x_i = 1390$

راست طریقہ کو استعمال کرنے پر $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

حرکت انحراف طریقہ اپنانے پر $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \frac{(-360)}{35} = 39.71$

اس لئے دیہاتی علاقوں کے پرائمری اسکول کے خاتون ٹیچرس کا فیصد درمیانہ 39.71 ہے۔

ریمارک: تینوں طریقوں سے نتیجہ ایک ہی آیا۔ اس لئے استعمال کئے گئے طریقہ کے انتخاب x_i اور f_i کی عددی قدروں پر ہوتا ہے اگر x_i اور f_i کافی چھوٹے ہیں تب راست طریقہ کافی مناسب ہے۔ اگر x_i اور f_i عددی طور پر کافی بڑے ہیں تب ہم درمیانہ یا حرکت انحراف طریقہ کا استعمال کرتے ہیں۔ اگر کلاس کے سائز غیر مساوی ہیں تب بھی ہم حرکت انحراف کا طریقہ استعمال کریں گے اس کے لئے ہم h کو d_i ایک مناسب قاسم کے طور پر لیا ہوگا۔

مثال 3: مندرجہ ذیل بٹاؤ ایک دن کی کرکٹ میں بولروں کے ذریعے لئے گئے وکٹوں کی تعداد کو دکھاتا ہے مناسب طریقہ کو

استعمال کر کے وکٹوں کی تعداد کا درمیانہ معلوم کیجئے۔ درمیانہ ہمیں کس بات کا پتہ دیتا ہے۔

وکٹوں کی تعداد	20-60	60-100	100-150	150-250	25-350	350-450
بولروں کی تعداد	7	5	16	12	2	3

حل : یہاں کلاس کا سائز بدلتا ہے اور x_i بڑے ہیں، اس لئے ہم حرکت انحراف طریقہ کو استعمال کریں گے جس میں $a = 200$ اور $h = 20$ لے کر تب ہمیں جدول 14.8 کے اعداد و شمار ملیں گے۔

جدول 14.8

لی گئی وکٹ کی تعداد	بولروں کی تعداد	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$u_i f_i$
20-60	7	40	–160	–8	–56
60-100	5	80	–120	–6	–30
100-150	16	125	–75	–3.75	–60
150-250	12	200	0	0	0
250-350	2	300	100	5	10
350-450	3	400	200	10	30
کل	**45**				**–106**

اس لئے $\bar{u} = \frac{-106}{45}$ اس لئے $\bar{x} = 200 - 20\left(\frac{106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89$

اس سے پتہ چلتا ہے کہ اوسطاً 45 بولروں کے ذریعے ایک دن کی کرکٹ میں لی گئی وکٹوں کی تعداد 152.89 ہے۔ اسے ہم دیکھتے ہیں کہ کس طرح ہم اس سیکشن میں پڑھے گئے تصورات کا اچھی طرح استعمال کریں گے۔

مشغلہ 2: اپنی کلاس کے طلباء کو 3 گروپوں میں بانٹئے اور ہر ایک گروپ سے مندرجہ ذیل عملی کام کرنے کے لئے کہیں

1۔ آپ کے اسکول کے ذریعے لئے گئے ریاضی کے امتحان میں تمام طلباء کے ذریعے حاصل کئے گئے نمبروں کو جمع کیجئے۔ حاصل اعداد و شمار کا مرتب تعدد بٹاؤ جدول بتائیے۔

2۔ اپنے شہر میں 30 دن کے دوران لئے گئے درجہ حرارت کے ریکارڈ کو جمع کیجئے۔ ان اعداد و شمار کو مرتب تعدد جدول میں

دکھائیے۔

3۔ اپنی کلاس کے تمام طلبا کی اونچائی سینٹی میٹر میں ناپئے اور اس اعداد وشمار کا مرتب تعدد بٹاؤ جدول بنائیے۔

جب تینوں گروپ اعداد وشمار کو اکٹھا کریں اور مرتب بٹاؤ جدول بنائیں ان کا اعداد وشمار کا درمیانہ معلوم کریں مناسب طریقے کا استعمال کریں۔

مشق 14.1

1۔ طلباء کے ایک گروپ 2۔ ماحول سے آگاہی کے پروگرام کے ایک جز کی حیثیت سے ایک سروے کیا۔ جس میں انہوں نے علاقہ کے 20 گھروں میں لگے ہوئے پودوں کی تعداد سے متعلق اعداد وشمار کو اکٹھا کیا، ایک مکان میں لگے پودوں کا درمیان معلوم کیجئے۔

پودوں کی تعداد	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
مکانوں کی تعداد	1	2	1	5	6	2	3

2۔ ایک فیکٹری کے 50 ملازموں کو روز ملنے والی اجرت کے مندرجہ ذیل بٹاؤ پر غور کیجئے۔

روزانہ ملنے والی اجرت (روپیوں میں)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
ملازموں کی تعداد	12	14	8	6	10

3۔ مندرجہ ذیل بٹاؤ کسی علاقہ کے بچوں کو ملنے والے روزانہ کے جیب خرچ کو دیکھا گیا ہے درمیانہ روزانہ کا خرچ 18 روپے ہے گمشدہ تعدد f معلوم کیجئے۔

روزانہ جیب خرچ روپیوں میں	11-13	13-15	15-17	17-19	17-19	21-23	23-25
بچوں کی تعداد	7	6	9	13	f	5	4

4۔ ایک اسپتال میں ایک ڈاکٹر نے 30 عورتوں کی دل کی دھڑکن فی منٹ ریکارڈ کی اور ان کا خلاصہ ذیل کے جدول میں کیا گیا ہے۔ ان عورتوں کی فی منٹ دل کی دھڑکن کا درمیانہ معلوم کیجئے۔

فی منٹ دل کی دھڑکن	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
عورتوں کی تعداد	2	4	3	8	7	4	2

5۔ ایک پھٹکر مارکیٹ میں پھل فروش پیکنگ بوکس میں رکھے ہوئے آموں کے بیچتے ہیں ان بکسوں میں آموں کی تعداد مختلف ہوتی ہے۔مندرجہ ذیل میں آموں کا بکسوں کی تعداد کے مطابق بٹاؤ دیا ہوا ہے۔

آموں کی تعداد	50-52	53-55	56-58	59-61	62-64
بکسوں کی تعداد	15	110	135	115	25

6۔ مندرجہ ذیل جدول ایک علاقہ کے 25 گھروں کا کھانے پر ہو روزانہ کا خرچ دیکھا گیا ہے۔

روز خرچ (روپیوں میں)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
گھروں کی تعداد	4	5	12	2	2

کھانے پر ہونے والے روزانہ کے خرچ کا درمیانہ معلوم کیجئے، اس کے لئے آپ کوئی بھی مناسب طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔

7۔ ہوا میں 502 کا concentration (ارتکاز) معلوم کیجئے (P.P.M) ایک شہر کے 30 علاقوں سے اکٹھے کئے گئے اعداد و شمار نیچے دئے گئے ہیں۔

SO_2 کا ارتکاز (in PPm)	تعداد
0.00-0.04	4
0.04-0.08	9
0.08-0.12	9
0.12-0.16	2
0.16-0.18	4
0.18-0.24	2

ہوا میں SO_2 کا درمیانہ ارتکاز معلوم کیجئے۔

8۔ ایک کلاس ٹیچر کے پاس مندرجہ ذیل 40 طلبا کا پورے سال کا غیر حاضری کا ریکارڈ ہے۔طلبا جتنے دن غیر حاضر رہیں۔ اس کا درمیانہ معلوم کیجئے۔

38-40	28-38	20-28	14-20	10-14	6-10	0-6	دنوں کی تعداد
1	3	4	4	7	10	11	طلباء کی تعداد

9۔ ذیل میں شہروں کی خواندگی (فی صد میں) کی شرح دی گئی ہے۔خواندگی کی درمیانہ شرح معلوم کیجئے۔

خواندگی کی شرح (% میں)	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
شہروں کی تعداد	3	10	11	8	3

14.3 مرتب اعداد وشمار کا موڈ

یاد کیجئے آپ نے نویں کلاس میں پڑھا تھا کہ تمام مشاہدات کے درمیان جو مشاہدہ سب سے زیادہ مرتبہ آتا ہے یا جس مشاہدہ کی قدر کا تعدد سب سے زیادہ ہو، موڈ کہلاتا ہے۔مزید ہم نے غیر مرتب اعداد وشمار کا موڈ معلوم کرنے کا طریقہ بھی سیکھا۔یہاں ہم (مرتب) اعداد وشمار کا موڈ معلوم کرنا سیکھیں گے۔یہ ممکن ہے کہ ایک سے زیادہ قدروں کا تعدد اعظم ہو۔ایسی صورت حال میں اعداد وشمار (multimodal) کثیر موڈ والے کہلاتے ہیں۔حالانکہ مرتب اعداد وشمار میں بھی کثیر موڈ ہو سکتے ہیں۔لیکن اس سیکشن میں ہم اپنا مطالعہ صرف واحد موڈ تک ہی محدود رکھیں گے۔

آیئے یاد کرتے ہیں کہ ہم نے غیر مرتب اعداد شمار کا موڈ کس طرح معلوم کیا تھا مندرجہ ذیل مثال پر غور کیجئے۔

مثال 5: ایک بولر کے ذریعے 10 میچوں میں لئے جانے والے وکٹوں کی تعداد ذیل میں دی گئی۔

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

حل : آیئے دئے گئے اعداد وشمار کا تعدد بٹاؤ جدول بناتے ہیں۔

وکٹوں کی تعداد	0	1	2	3	4	5	6
میچوں کی تعداد	1	1	3	2	1	1	1

صاف ظاہر ہے، 2، وکٹوں کی وہ تعداد ہے جو بولر نے سب سے زیادہ لی ہیں (یعنی 3) اس لئے ان اعداد شمار کا موڈ 2 ہے۔

مرتب تعدد بٹاؤ میں یہ ممکن نہیں کہ اب صرف تعدد کو دیکھ کر ہی موڈ میں بانٹ دیں، یہاں ہم پہلے اس کلاس کو تلاش کریں جس کا تعدد سب سے زیادہ ہے، جو موڈل کلاس کہلاتی ہے۔یہ موڈ اس موڈل کلاس میں کہیں ہوگا اور اس کو ہم مندرجہ ذیل فارمولہ سے معلوم کریں گے۔

$$\text{موڈ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

جہاں l = موڈل کلاس کی نچلی حد

4 = کلاس وقفہ کا سائز (یہ مانتے ہوئے کہ تمام کلاس وقفوں کے سائز یکساں ہیں)

f_1 = موڈل کلاس کا تعد، f_0 = موڈل کلاس سے پہلے کا تعدد

f_2 = موڈل کلاس کے کا تعدد

اس فارمولہ کے استعمال کی وضاحت کے لئے آیئے مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کرتے ہیں

کنبہ کا سائز	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
کنبوں کی تعداد	7	8	2	2	1

حل: یہاں اعظم تعدد 8 ہے۔ اور اس کی نظیری کلاس 5–3 ہے اس لئے موڈل کلاس 5–3 ہے۔

اب

موڈل کلاس = 5–3 موڈل کلاس کی نچلی (l) = 3 کلاس کا سائز (h) = 2

موڈل کلاس کا تعدد $f_1 = 8$ موڈل کلاس سے پہلے کا تعدد $f_0 = 7$

موڈل کلاس کے بعد کا تعدد = 2

اس لئے اب ان قدروں کو فارمولہ میں رکھتے ہیں

$$\text{موڈ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

اس طرح سے مذکورہ بالا اعداد و شمار کا موڈ 3.28 ہے۔

مثال 6: ریاضی کے ایک امتحان میں 30 طلباء کے ذریعے حاصل کردہ نمبروں کا بٹاؤ مثال 1 کے جدول 14.3 میں دیا گیا ہے۔ اس اعداد و شمار کا موڈ معلوم کیجئے۔ درمیانہ اور موڈ کا موازنہ کریں اور ان کی ترجمانی کریں۔

حل: مثال 1 کے جدول 14.3 میں کیونکہ طلباء کی اعظم تعداد (یعنی 7) کے نمبر وقفہ (55–40) میں ہیں۔ اس لئے موڈل کلاس 55–40 اس لئے موڈل کلاس کی نچلی (زیریں) حد = 40

کلاس کا سائز $(h) = 15$، موڈل کلاس کا تعدد $f_1 = 7$

موڈل کلاس سے پہلے کا تعدد $f_0 = 3$، موڈل کلاس کے بعد کا تعدد $f_2 = 6$

اب فارمولہ استعمال کرنے پر

$$\text{موڈ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے $\text{موڈ} = 40 + \left(\frac{7-3}{14-6-3}\right) \times 15 = 52$

اس لئے نمبروں کا موڈ 52 ہے۔

اب، مثال 1 سے آپ کو معلوم ہے کہ اس کا درمیانہ 62 ہے، اس طرح سے زیادہ تر طلباء نئے 52 نمبر حاصل کئے اور ایک طالب علم نے اوسطاً 62 نمبر حاصل کئے ہیں۔

ریمارک:

1۔ مثال 6 میں موڈ درمیانہ سے کم ہے، لیکن کچھ اور سوالوں میں یہ درمیانہ سے زیادہ یا اس کے برابر بھی ہو سکتا ہے۔

2۔ یہ صورت حال کے تقاضے پر منحصر ہے کہ ہم طلبا کے ذریعے حاصل کئے گئے نمبروں کا اوسط معلوم کریں یا زیادہ طلبا کے ذریعے خاص نمبروں کا اوسط معلوم کریں۔ پہلی صورت حال میں درمیان مطلوب ہے جب کہ دوسری صورت حال میں موڈ۔

مشغلہ 3: مشغلہ 2 میں آپ نے جو گروپ بنائے تھے اسے انہیں گروپ پر غور کیجئے۔ اور ان کو وہی کام دیجئے جو آپ نے مشغلہ میں دئے تھے۔ ہر ایک گروپ سے اعداد و شمار کا موڈ معلوم کرنے کے لئے کہئے وہ اس کا موازنہ درمیانہ سے کریں اور دونوں کے مفہوم کی ترجمانی بھی کریں۔

ریمارک: غیر مساوی کلاس سائز کے مرتب اعداد کا موڈ بھی آپ معلوم کر سکتے ہیں۔ لیکن ہم اس باب میں اس پر بحث نہیں کر رہے ہیں۔

مشق 14.2

1۔ مندرجہ ذیل جدول میں ایک سال کے دوران کی ہسپتال میں داخل ہونے والے مریضوں کی کسی عمریں دی ہوئی ہیں۔

عمر (سالوں میں)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
مریضوں کی تعداد	6	11	21	23	14	5

اوپر دئے گئے اعداد و شمار کا موڈ اور درمیانہ معلوم کیجئے اور مرکزی رجحان کی دو پیمائشوں کی ترجمان اور موازنہ کیجئے۔

2۔ مندرجہ ذیل اعداد و شمار 225 بجلی کے آلات کی زندگی کا وقت (گھنٹوں میں) کے سلسلہ میں اطلاعات کو ظاہر کرتے ہیں۔
آلات کا موڈل عمر کی مدت معلوم کیجیے۔

(گھنٹوں میں) زندگی کا وقت	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
تعداد	10	35	52	61	38	29

3۔ مندرجہ ذیل اعداد و شمار کا بنا ایک گاؤں کے 200 کنبوں کے گھر کا کل ماہانہ خرچ دیا ہوا ہے کنبوں کا موڈل ماہانہ خرچ معلوم کیجیے اور ان کا درمیانہ ماہانہ خرچ بھی معلوم کیجیے۔

کنبوں کی تعداد	خرچ (روپیوں میں)
29	1000 - 1500
40	1500 - 2000
33	2000 - 2500
28	2500 - 3000
30	3000 - 3500
22	3500 - 4000
16	4000 - 4500
7	4500 - 500

4۔ مندرجہ ذیل بٹاؤ ہندوستان کے ہائر سیکنڈری اسکولوں میں صوبوں کے حساب سے استاد طلب علم مثبت دی ہوئی ہے ان اعداد و شمار کا درمیانہ اور موڈ معلوم کیجیے اور دونوں پیائشوں کی ترجمانی کیجیے۔

صوبوں/UT	طلباء کی تعداد فی استاد
3	15 - 20
8	20 - 25
9	25 - 30
10	30 - 35
3	35 - 40
0	40 - 45
0	45 - 50
2	50 - 55