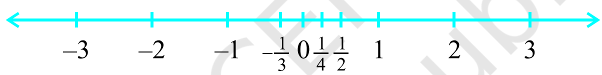
باب 1

عددی نظام (NUMBER SYSTEM)

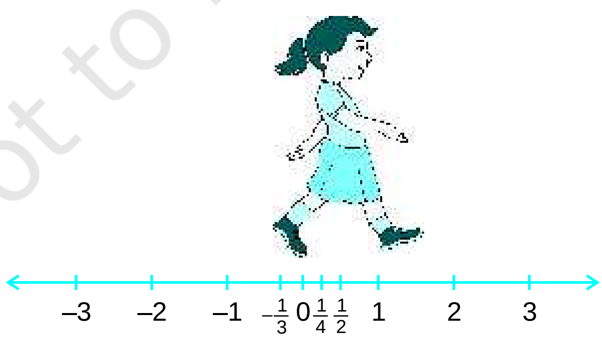
1.1 تعارف: (Introduction)

پچھلی جماعتوں میں آپ سیکھ چکے ہیں کہ عددی خط اور اس پر مختلف قسم کے اعداد کا اظہار کس طرح کرتے ہیں (شکل 1.1 کو دیکھیے)۔



شکل: **1.1** :عددی خط

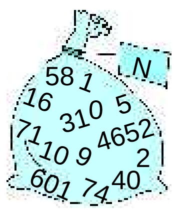
تصور کیجیے کہ آپ صفر سے شروع کرتے ہوئے اس عددی خط کے ساتھ مثبت سمت میں چلتے چلے جاتے ہیں۔ جہاں تک آپ کی آنکھ دیکھ سکتی ہے وہاں تک صرف اعداد، اعداد اور اعداد ہی نظر آتے ہیں۔



شکل: **1.2**

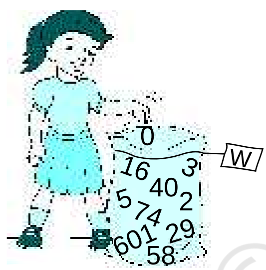
اب فرض کیجیے کہ آپ عددی خط کے ساتھ چلنا شروع کرتے ہیں اور کچھ اعداد اکٹھا کرتے ہیں۔ ان اعداد کو جمع کرنے کے لیے ایک تھیلا تیار رکھیے۔

آپ صرف فطری اعداد جیسے 1، 2، 3 وغیرہ سے یہ عمل شروع کر سکتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ یہ فہرست ہمیشہ چلتی رہے گی۔ (یہ صحیح کیوں ہے؟) اس طرح سے اب آپ کے تھیلے میں لامحدود فطری اعداد ہیں۔ یاد کیجیے کہ ہم اس مجموعہ کو علامت **N** سے ظاہر کرتے ہیں۔

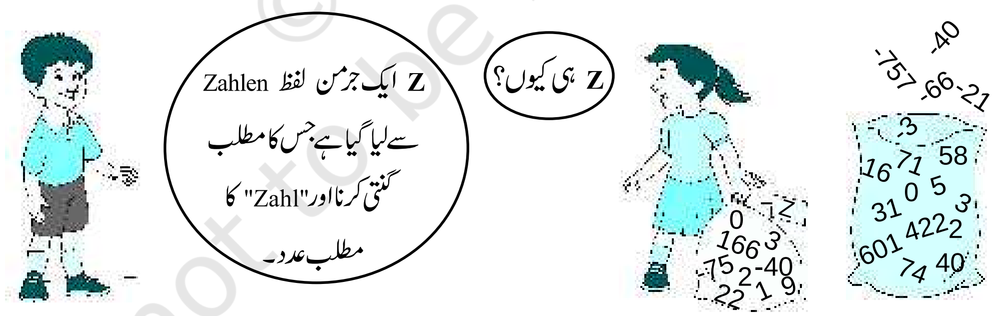


اب آپ واپس آیئے اور صفر کو اٹھایئے اور اس کو تھیلے میں رکھیے۔

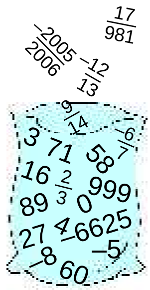
اب آپ کے پاس مکمل اعداد کا مجموعہ ہے جس کو ہم علامت **W** سے ظاہر کرتے ہیں۔



اب آپ کے سامنے بہت سے منفی صحیح اعداد ہیں۔ تمام صحیح اعداد کو آپ اپنے تھیلے میں رکھیں۔ آپ کا نیا مجموعہ کون سا ہے؟ یاد کیجیے اس مجموعہ کو صحیح اعداد کہتے ہیں اور اس کو علامت **Z** سے ظاہر کرتے ہیں۔



کیا عددی خط پر اب بھی کچھ عدد باقی بچے ہیں؟ ہاں! اعداد جیسے $\frac{1}{2}$، $\frac{3}{4}$ یا $\frac{-2005}{2006}$ وغیرہ۔ اگر آپ ایسے تمام اعداد کو بھی تھیلے میں رکھیں تو اب یہ ناطق اعداد (Rational Numbers) کا مجموعہ ہو جائے گا۔ ناطق اعداد کے مجموعہ کو **Q** سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ لفظ ناطق، لفظ نسبت (Ratio) سے لیا گیا ہے اور Q لفظ خارج قسمت (Quotient) سے لیا گیا ہے۔



آپ ناطق اعداد کی تعریف کو دہرا سکتے ہیں:

ایک عدد 'r'، ناطق عدد کہلاتا ہے، اگر اس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکے۔ جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$۔

(ہم کیوں اس بات پر زور دیتے ہیں کہ $q \neq 0$?)

یہ بات نوٹ کیجیے کہ اب تھیلے میں موجود تمام اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے، جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$۔ مثال کے طور پر 25- کو ہم $\frac{-25}{1}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہاں $p = -25$ اور $q = 1$ ہے۔ اس لیے ناطق اعداد میں فطری اعداد، مکمل اعداد اور صحیح اعداد بھی شامل ہیں۔

آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ ناطق اعداد کا $\frac{p}{q}$ کی شکل میں اظہار منفرد نہیں ہے۔ جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ مثال کے طور پر $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{25} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ اور یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ یہ معادل (Equivalent) ناطق اعداد ہیں۔ حالانکہ جب ہم کہتے ہیں کہ $\frac{p}{q}$ ایک ناطق عدد ہے یا جب ہم $\frac{p}{q}$ کو عددی خط پر ظاہر کرتے ہیں تو ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ $q \neq 0$ اور p اور q میں 1 کے علاوہ کوئی مشترک جز وضربی نہیں ہے (یعنی p اور q co-prime ہیں)۔ اس لیے عددی خط پر $\frac{1}{2}$ کی لامحدود معادل کسور (Fractions) میں سے ہم $\frac{1}{2}$ کو چنتے ہیں جو ان تمام کی نمائندگی کرتا ہے۔

آپ آئیے اب ہم مختلف قسم کے اعداد کی کچھ مثالوں کو حل کرتے ہیں جن کو آپ پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔

مثال 1: کیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟ اپنے جوابات کی وجوہات دیجیے:

(i) ہر مکمل عدد ایک فطری عدد ہے۔

(ii) ہر صحیح عدد ایک ناطق عدد ہے۔

(iii) ہر ناطق عدد ایک صحیح عدد ہے۔

حل: (i) غلط، کیونکہ صفر ایک مکمّل عدد ہے، فطری عدد نہیں ہے۔

(ii) صحیح، کیونکہ ہر صحیح عدد m کو $\frac{m}{1}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ اس لیے یہ ایک ناطق عدد ہے

(iii) غلط، کیونکہ $\frac{3}{5}$ صحیح عدد نہیں ہے۔

مثال 2: 1 اور 2 کے درمیان پانچ ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

اس سوال کو ہم کم از کم دو طریقوں سے حل کر سکتے ہیں۔

حل 1: یاد کیجیے کہ r اور s کے درمیان ناطق عدد معلوم کرنے کے لیے ہم r اور s کو جمع کر کے 2 سے تقسیم کرتے ہیں یعنی $\frac{r+s}{2}$ r اور s کے درمیان ایک ناطق عدد ہے۔ اس لیے $\frac{3}{2}$، 1 اور 2 کے درمیان ایک عدد ہے۔ اس طرح سے آگے بڑھتے ہوئے آپ 1 اور 2 کے درمیان مزید چار ناطق اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ چار اعداد ہیں $\frac{5}{4}$، $\frac{11}{8}$، $\frac{13}{8}$ اور $\frac{7}{4}$

حل 2: دوسرے طریقے کے مطابق آپ ایک ہی مرحلہ میں تمام پانچ ناطق اعداد معلوم کر سکتے ہیں کیونکہ ہمیں پانچ ہی ناطق اعداد معلوم کرنے ہیں۔ ہم 1 اور 2 کو ایک ایسے ناطق عدد کی شکل میں لکھتے ہیں جس کا نسب نما $5+1$ یعنی $1=\frac{6}{6}$ اور $2=\frac{12}{6}$۔ آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ تمام اعداد $\frac{7}{6}$، $\frac{8}{6}$، $\frac{9}{6}$، $\frac{10}{6}$ اور $\frac{11}{6}$ کے درمیان ناطق اعداد ہیں۔ اس طرح سے پانچ اعداد ہیں $\frac{7}{6}$، $\frac{4}{3}$، $\frac{3}{2}$، $\frac{5}{3}$ اور $\frac{11}{6}$۔

ریمارک: نوٹ کیجیے کہ مثال 2 میں آپ سے 1 اور 2 کے درمیان پانچ ناطق اعداد معلوم کرنے کو کہا گیا۔ آپ نے یہ حقیقت سمجھ لی ہوگی کہ 1 اور 2 کے درمیان لامحدود ناطق اعداد ہوتے ہیں۔ عام طور پر دیے گیے دو اعداد کے درمیان لامحدود ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

آئیے ایک بار پھر عددی خط پر غور کرتے ہیں۔ کیا آپ تمام اعداد چن چکے ہیں؟ ابھی تک نہیں۔ بلکہ حقیقت یہ ہے کہ اب بھی عددی خط پر لامحدود اعداد باقی ہیں۔ جتنے بھی اعداد آپ نے چنے ہیں ان کے درمیان خالی جگہ ہے اور صرف ایک اور دو

نہیں بلکہ لامحدود اور حیرت انگیز بات یہ ہے کہ اس طرح کی دو خالی جگہوں کے درمیان بھی لامحدود اعداد موجود ہیں۔

تو ہمارے سامنے ابھی بھی مندرجہ ذیل سوالات ہیں:

1. عددی خط پر باقی اعداد کیا کہلاتے ہیں؟
2. ہم ان کی شناخت کیسے کریں گے؟ یعنی ہم ان کو ناطق اعداد سے کیسے الگ سمجھیں گے۔

ان سوالوں کے جواب ہم اگلے سیکشن میں پائیں گے۔

مشق 1.1

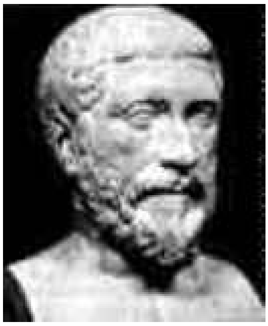
1. کیا صفر ایک ناطق عدد ہے؟ کیا آپ اس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ ؟
2. 3 اور 4 کے درمیان چھ ناطق اعداد معلوم کیجیے؟
3. $\frac{3}{5}$ اور $\frac{4}{5}$ کے درمیان پانچ ناطق اعداد معلوم کیجیے؟
4. بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟ اپنے جوابات کی وجہ بتائیے۔
   (i) ہر فطری عدد ایک مکمل عدد ہے۔
   (ii) ہر صحیح عدد ایک مکمل عدد ہے
   (iii) ہر ناطق عدد ایک مکمل عدد ہے۔

1.2 غیر ناطق اعداد (Irrational Numbers)

پچھلے سیکشن میں ہم نے دیکھا کہ عددی خط پر ایسے بھی اعداد ہیں جو ناطق نہیں ہیں۔ اس سیکشن میں ہم ان اعداد کی تفتیش کریں گے۔ ابھی تک آپ نے جتنے بھی اعداد دیکھے وہ $\frac{p}{q}$ کی شکل کے تھے جہاں p اور q صحیح اعداد اور $q \neq 0$ ۔ اس لیے آپ یہ پوچھ سکتے ہیں کہ کیا ایسے بھی اعداد ہیں جو اس شکل میں نہیں ہیں؟ یقیناً ایسے اعداد ہیں۔

آئیے اب ہم ان اعداد کی باضابطہ طور پر تعریف بیان کرتے ہیں۔

یونان میں مشہور ریاضی داں پیتھا گورس (Phythagoras) کے پیروکاروں نے سب سے پہلے 400ق-م- میں ان اعداد کی دریافت کی جو ناطق نہیں تھے۔ان اعداد کو غیر ناطق اعداد کہا جاتا ہے۔کیونکہ ان اعداد کو دو صحیح اعداد کی نسبت میں نہیں لکھا جاسکتا۔ Hippocus کے ذرائع دریافت غیر ناطق اعداد سے متعلق کافی عجیب وغریب باتیں منسوب ہیں۔ Hippacus کا خاتمہ یا تو یہ پتہ لگانے کی وجہ سے کہ $\sqrt{2}$ کہ ایک غیر ناطق عدد ہے یا پھر پیتھا گورس کے قبیلے کے باہر کے لوگوں پر یہ راز ظاہر کرنے کی وجہ سے بڑے افسوس ناک انداز میں ہوا۔



پیتھا گورس
(569BC–479BC)
شکل 1.3

ایک عدد غیر ناطق (Irrational) کہلاتا ہے اگر اس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہ لکھا جا سکے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

آپ پہلے ہی سے جانتے ہیں کہ ناطق اعداد لامحدود ہیں۔اب یہ بات بھی مصدقہ ہے کہ غیر ناطق اعداد بھی لامحدود ہیں۔ کچھ مثالیں ہیں:

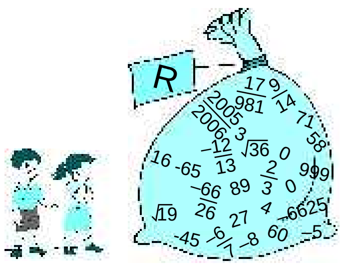
$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110...$$

ریمارک : یاد کیجیے کہ ہم جب بھی علامت $\sqrt{}$ ، کا استعمال کرتے ہیں تو اس سے ہمارا مطلب ہوتا ہے عدد کا مثبت جزرالمربع۔اس لیے $\sqrt{4} = 2$ جب کہ دونوں 2 اور 2– عدد کے 4 جزر ہیں۔

مذکورہ بالا کچھ ناطق اعداد سے آپ واقف ہیں۔مثال کے طور پر مندرجہ بالا جزرالمربع اور عدد π آپ پہلے ہی سے واقف ہیں۔

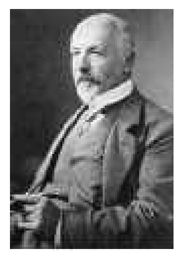
پیتھا گورس کے پیروکاروں نے ثابت کیا کہ $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے۔ بعد میں تقریباً 5 2 4ق ۔م تھیوڈورس (Theodorus) نے دکھایا کہ $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{10}$ ، $\sqrt{11}$ ، $\sqrt{12}$ ، $\sqrt{13}$ ، $\sqrt{14}$ ، $\sqrt{15}$ اور $\sqrt{17}$ بھی غیر ناطق ہیں۔ $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ وغیرہ کی غیر ناطقیت کا ثبوت ہم 10 ویں جماعت میں پڑھیں گے۔جہاں تک π کا سوال ہے تو اس کے بارے میں جانکاری ہزاروں سال سے تھی لیکن اس کا ثبوت 1700 کے آخر میں Lambert اور

Legendre نے دیا۔ اگلے سبق میں ہم مطالعہ کریں گے کہ $0.10110111011110...$ اور π غیر ناطق ہیں۔



آیئے اس سوال کی طرف واپس آتے ہیں جو پچھلے سیکشن کے آخر میں اٹھایا گیا تھا۔ ناطق اعداد کے تھیلے کو یاد کیجیے۔ اگر اب ہم تمام غیر ناطق اعداد کو بھی اس تھیلے میں رکھ دیں تو کیا عددی خط پر اب کچھ عدد باقی رہیں گے؟ اس کا جواب ہے نہیں! اس طرح سے حاصل ناطق اور غیر ناطق اعداد کے مجموعہ کو ہم حقیقی اعداد (Real Number) کہتے ہیں۔ جس کو ہم **R** سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس لیے حقیقی اعداد یا تو ناطق ہوتے ہیں یا غیر ناطق۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ عددی خط پر ہر ایک نقطہ ایک حقیقی عدد کو ظاہر کرتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ ہم عددی خط کو حقیقی عددی خط کہتے ہیں۔

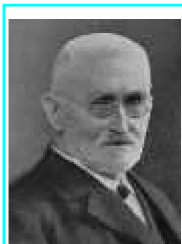
آیئے ہم دیکھتے ہیں کہ کس طرح سے ہم کچھ غیر ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔



ار۔ ڈیڈیکا ینڈ (1831-1916)

شکل 1.4

1870 میں دو جرمن ریاضی دانوں کینٹر اور ڈیڈیکائنڈ نے دکھایا کہ ہر حقیقی عدد کے نظیری حقیقی خط پر ایک نقطہ ہوتا ہے۔ اس کے برعکس حقیقی خط پر ہر ایک نقطہ کے نظیری ایک یکتا حقیقی عدد کا وجود ہے۔

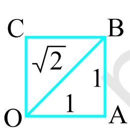


جی۔ کینٹر (1845-1918)

شکل 1.5

مثال 3 : $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

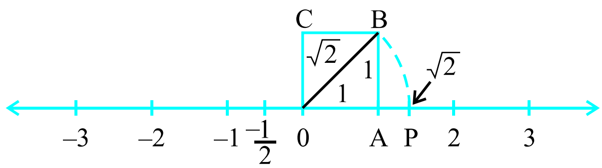
حل : یہ آسانی سے سمجھا جا سکتا ہے کہ یونانیوں نے کس طرح سے $\sqrt{2}$ کی دریافت کی۔ ایک اکائی مربع OABC جس کا ہر ضلع اکائی لمبائی کا ہے، پر غور کیجیے۔ (شکل 1.6 دیکھیے) تب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ پیتھاگورس کے مسئلہ کے مطابق



شکل: 1.6

$OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ہم کس طرح سے $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر ظاہر کریں؟ یہ آسان ہے۔

شکل 1.6 کو عددی خط پر اس طرح رکھیں کہ راس O، صفر پر منطبق ہو۔ (دیکھیے شکل 1.7)



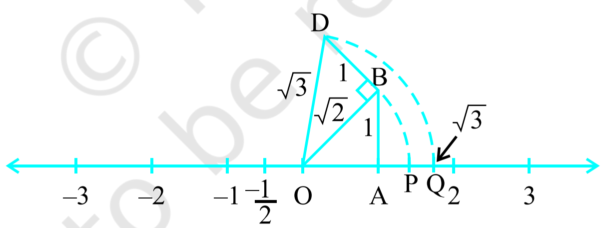
شکل: 1.7

ہم نے ابھی دیکھا کہ $OB = \sqrt{2}$

ایک پرکار کو استعمال کرتے ہوئے O کو خط مرکز مان کر اور OB نصف قطر لے کر ایک قوس بنائیں جو عددی خط کو نقطہ P پر قطع کرے۔ تب P عددی خط پر $\sqrt{2}$ ظاہر کرتا ہے۔

مثال 4: $\sqrt{3}$ کو عددی خط پر ظاہر کریں۔

حل : آیئے شکل 1.7 کی طرف واپس آتے ہیں۔



شکل: 1.8

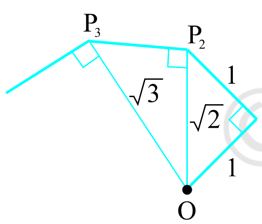
OB پر اکائی لمبائی کا عمود BD کھینچیں (جیسا کہ شکل 1.8 میں دکھایا گیا ہے)۔ پھر پیتھاگورس کے مسئلہ کے مطابق ہم دیکھتے ہیں کہ $OD = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

پرکار کا استعمال کرتے ہوئے O کو مرکز مان کر اور نصف قطر OD لیکر ایک قوس بنائیں جو عددی خط کو نقطہ Q پر قطع کرتا ہے۔ تب نقطہ Q $\sqrt{3}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

اس طرح سے ہم کسی مثبت صحیح عدد n کے لیے $\sqrt{n}$ کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں جب کہ $\sqrt{n-1}$ کو ظاہر کیا جا چکا ہو۔

مشق 1.2

1. بیان کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط۔ اپنے جواب کی دلیل بھی پیش کیجیے۔
   (i) ہر غیر ناطق عدد ایک حقیقی عدد ہے۔
   (ii) عددی خط پر ہر نقطہ $\sqrt{m}$ کی شکل کا ہے جہاں m ایک فطری عدد ہے۔
   (iii) ہر حقیقی عدد ایک غیر ناطق عدد ہے
2. کیا تمام مثبت صحیح اعداد کے جزر المربع غیر ناطق ہیں؟ اگر نہیں تو ایک ایسے عدد کے جزر المربع کی مثال دیجیے جو ناطق عدد ہے۔
3. دکھائیے کہ $\sqrt{5}$ کو کس طرح سے عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔
4. کلاس میں کیا جانے والا مشغلہ (جزر المربع کا خمیدہ (Spiral) بنانا): کاغذ کی بڑی شیٹ لیجیے اور اس پر مندرجہ ذیل طریقہ سے جزر المربع Spiral بنائیے۔ نقطہ O سے شروع کیجیے اور اکائی لمبائی کا قطعہ OP_1 بنائیے، P_1P_2 کے عمودی قطعہ خط OP_1 بنائیے (شکل 1.9 دیکھیے) اب P_2P_3 کے عمودی ایک قطعہ OP_2 بنائیے۔ پھر OP_3 کے عمودی P_3P_4 بنائیے۔ اس طرح سے جاری رکھتے ہوئے $P_{n-1}P_n$ کے عمودی اکائی لمبائی کا ایک قطعہ خط OP_{n-1} حاصل ہوتا ہے۔ اس طریقہ سے آپ نے نقاط P_2، P_3،....، P_n،....، کی تخلیق کی اور ان کو ایک خوبصورت Sprial سے ملا دیا جو $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{4}$... کو ظاہر کرتے ہیں۔



شکل: 1.9 جزر المربع Spiral بنانا

1.3 حقیقی اعداد اور ان کا عشری پھیلاؤ

(Real Numbers and their Decimal Expansion)

اس سیکشن میں ہم ایک مختلف نقطہ نظر سے ناطق اور غیر ناطق اعداد کا مطالعہ کریں گے۔ ہم حقیقی اعداد کے عشری پھیلاؤ پر غور کریں گے اور دیکھیں گے کہ کیا ہم ان کو ناطق اور غیر ناطق اعداد میں فرق معلوم کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔ ہم یہ بھی بیان

کریں گے کہ ان کے عشری پھیلاؤ کو استعمال کرتے ہوئے حقیقی اعداد کو عددی خط پر کیسے ظاہر کیا جا سکتا ہے کیونکہ ناطق اعداد سے ہماری واقفیت زیادہ ہے، اس لیے ان سے شروع کرتے ہیں۔ آیئے تین مثال لیتے ہیں: $\frac{10}{3}$، $\frac{7}{8}$، $\frac{1}{7}$
باقی (Remainders) پر خاص توجہ دیں اور دیکھیں کہ کیا آپ کوئی نمونہ معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 5: عشری پھیلاؤ معلوم کریں $\frac{10}{3}$، $\frac{7}{8}$ اور $\frac{1}{7}$

حل:

```
     0.142857...
  7 | 1.0
      7
     ---
      30
      28
     ---
       20
       14
     ---
       60
       56
     ---
        40
        35
     ---
         50
         49
     ---
```

باقی: 1، 5، 4، 6، 2، 3، 1، 5، 4، 6، 2، 3

قاسم: 7

```
     0.875
  8 | 7.0
      64
     ---
      60
      56
     ---
       40
       40
     ---
        0
```

باقی: 0، 4، 6

قاسم: 8

```
     3.333...
  3 | 10
       9
     ---
      10
       9
     ---
      10
       9
     ---
       10
        9
     ---
        1
```

باقی: 1، 1، 1، 1، 1...

قاسم: 3

آپ کیا نوٹ کرتے ہیں؟ آپ کم سے کم تین باتیں نوٹ کرتے ہیں:

(i) باقی یا تو صفر ہو جاتا ہے یا ایک خاص مرحلہ کے بعد اپنے آپ کو دہرانے لگتا ہے۔

(ii) باقیوں میں آنے والے اعداد قاسم سے کم ہیں۔

($\frac{1}{3}$ میں ایک عدد اپنے آپ کو دہراتا ہے اور قاسم 3 ہے اور $\frac{1}{7}$ میں باقیوں کے ایسے چھ اندراجات 326451 ہیں اور قاسم 7 ہے۔)

(iii) اگر باقی اپنے آپ کو دہراتے ہیں تب ہمیں خارج قسمت کے ہندسوں میں ایک تکراری بلاک حاصل ہوتا ہے۔

($\frac{1}{3}$ کے لیے خارج قسمت میں 3 کی تکرار ہوتی ہے اور $\frac{1}{7}$ کے لیے ہمیں خارج قسمت میں 142857 کا تکراری بلاک ملتا ہے)۔

حالانکہ یہ پیٹرن مذکورہ بالا کچھ مثالوں کو استعمال کرنے سے حاصل ہوا ہے لیکن یہ تمام ناطق اعداد جو $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ کی شکل میں ہوں، اس کے لیے درست ہے۔ p کو q سے تقسیم کرنے میں دو خاص باتیں ہوتی ہیں- یا تو باقی صفر ہو جاتا ہے یا کبھی صفر نہیں ہوتا اور ہمیں باقیوں کی تکرار ملتی ہے۔ اس لیے آیئے ہر ایک حالت کو الگ الگ دیکھتے ہیں۔

حالت (i): باقی جب صفر ہو جاتا ہے

$\frac{7}{8}$ کی مثال میں ہم پاتے ہیں کچھ اقدام کے بعد باقی صفر ہو جاتا ہے اور $\frac{7}{8}$ کا عشری پھیلاؤ 0.875= دوسری مثالوں کا عشری پھیلاؤ ہے۔

$\frac{1}{2} = 0.5,\ \frac{639}{250} = 2.556$ ان تمام حالات میں محدود اقدام کے بعد عشری پھیلاؤ ختم ہو جاتا ہے۔ اس قسم کے عشری پھیلاؤ کو ہم مختتم کہتے ہیں۔

حالت (ii): جب باقی کبھی صفر نہیں ہوتا

$\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{7}$ کی مثالوں میں ہم نوٹ کرتے ہیں کہ ایک خاص مرحلہ کے بعد باقی اپنے آپ کو دہرانے لگتا ہے۔ ان سے عشری پھیلاؤ غیر مختتم ہو جاتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں خارج قسمت میں ہمارے پاس ہندسوں کا ایک تکراری بلاک آ جاتا ہے۔ ہم اس پھیلاؤ کو غیر مختتم تکراری کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر

$\frac{1}{3} = 0.3333$ اور ... $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$ عام طریقہ سے $\frac{1}{3}$ کے خارج قسمت میں 3 کی

تکرار کو ہم $0.\bar{3}$ لکھتے ہیں۔اسی طرح سے $\frac{1}{7}$ کے خارج قسمت میں ہندسوں 142897 کی تکرار ہوتی ہے اس لیے ہم $\frac{1}{7}$ کو اس طرح لکھتے ہیں $0.\overline{142857}$ جہاں اوپر کھینچا گیا قطعہ خط (بار) ہندسوں کے بلاک کی تکرار کو ظاہر کرتا ہے۔ مزید 3.57272 کو ہم $3.5\overline{72}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔اس طرح سے یہ تمام مثالیں ہم کو ایک غیر مختتم تکراری عشری پھیلاؤ دیتی ہیں۔

اس طرح سے ہم دیکھتے ہیں کہ ناطق اعداد کا عشری پھیلاؤ دو قسم کا ہوتا ہے یا تو مختتم یا غیر مختتم تکراری۔

اب فرض کیجیے یا دوسرے لفظوں میں عددی خط پر آپ کے چلنے سے آپ کا واسطہ ایسے اعداد جیسے 3.142678 سے پڑتا ہے جس کا عشری پھیلاؤ مختتم ہے یا عدد جیسے 1.272727 یعنی $1.\overline{72}$ جس کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم تکراری ہے۔کیا آپ یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ یہ ناطق عدد ہے؟ اس کا جواب ہے ہاں!

ہم اس کو ثابت نہیں کریں گے لیکن اس کی وضاحت کچھ مثالوں سے کریں گے۔مختتم حالتیں آسان ہیں۔

مثال 6: دکھایئے کہ 3.142678 ایک ناطق عدد ہے۔دوسرے لفظوں میں 3.142678 کا اظہار $\frac{p}{q}$ کی شکل میں کیجیے جب کہ p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$

حل: ہمارے پاس ہے $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ اس لئے یہ ایک ناطق عدد ہے۔عدد اب ایسی حالت پر غور کرتے ہیں جب عشری پھیلاؤ غیر مختتم تکراری ہو۔

مثال 7: دکھایئے کہ $0.3333... = 0.\bar{3}$ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں کیا اور $q \neq 0$۔

حل: کیونکہ ہم نہیں جانتے کہ $0.\bar{3}$ کیا ہے۔آیئے اس کو 'x' مانتے ہیں۔

یعنی $x = 0.3333...$

یہی وہ مرحلہ ہے جہاں ہمیں ٹرک (Trick) استعمال کرنی ہے۔غور کیجیے۔

$$10x = 10 \times (0.333...) = 3.333...$$

اب $3.3333... = 3 + x$ ، کیونکہ $x = 0.3333...$

اس لیے $10x = 3 + x$

x کے لیے حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$9x = 3$ یعنی $x = \frac{1}{3}$

مثال 8: دکھایئے کہ $1.272727... = 1.\overline{27}$ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

حل: مان لیجیے $x = 1.272727...$ کیونکہ دو ہندسوں کی تکرار ہو رہی ہے اس لیے ہم x کو 100 سے ضرب کرتے ہیں تاکہ ہمیں حاصل ہو۔

$$100x = 127.2727...$$

تو

$$100x = 126 + 1.272727... = 126 + x$$

اس لیے

$$100x - x = 126, \qquad 99x = 126$$

یعنی

$$x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

اس کے معکوس سے آپ جانچ کرسکتے ہیں کہ $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$

مثال 9: دکھایئے کہ $0.2353535... = 0.2\overline{35}$ کا اظہار $\frac{p}{q}$ کی شکل میں کیا جاسکتا ہے جہاں P اور Q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

حل: مان لیجیے $x = 0.2\overline{35}$ یہاں ہم نوٹ کرتے ہیں کہ 2 کی تکرار نہیں ہوتی بلکہ 35 کی تکرار ہوتی ہے چونکہ 2 ہندسوں کی تکرار ہورہی ہے، اس لیے x کو 100 سے ضرب کرتے ہیں تاکہ ہمیں حاصل ہو۔

$$100x = 23.53535...$$

تو

$$100x = 23.3 + 0.23535... = 23.3 + x$$

اس لیے

$$99x = 23.3$$

یعنی $99x = \frac{233}{10}$ اس لئے جس سے حاصل ہوتا ہے $\frac{233}{990}$

آپ اس کے معکوس کی جانچ کر سکتے ہیں کہ $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$

اس طرح سے ہر وہ عدد جس کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور تکراری ہوتا ہے۔ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ جہاں p اور q $(q \neq 0)$ صحیح اعداد ہیں، اس لیے اب ان نتائج کو مختصراً مندرجہ ذیل شکل میں لکھیں۔

ایک ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ یا تو مختتم ہوتا ہے یا غیر مختتم یا پھر ایک عدد جس کا عشری پھیلاؤ مختتم اور غیر مختتم ہوتا ہے، وہ ناطق ہوتا ہے۔

اس طرح سے اب ہم ناطق عدد کے عشری پھیلاؤ کو جانتے ہیں۔ غیر ناطق اعداد کے عشری پھیلاؤ کے بارے میں کیا خیال ہے؟ مذکورہ بالا خصوصیت سے ہم نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ ان کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہے۔

اس لیے غیر ناطق اعداد کی خصوصیت ایسی ہی ہے جیسی اوپر ناطق اعداد کے لئے بیان کی گئی ہے۔ ایک غیر ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہے یا دوسرے لفظوں میں ایک عدد جس کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہو غیر ناطق ہے۔

یاد کیجیے پچھلے سیکشن میں $s = 0.1011011101111110....$

نوٹ کیجیے کہ یہ نہ تو مختتم ہے اور نہ ہی تکراری۔ اس لیے مندرجہ بالا خصوصیت کے مطابق یہ ایک غیر ناطق عدد ہے۔ مزید یہ کہ s جیسے لا تعداد غیر ناطق اعداد آپ معلوم کر سکتے ہیں۔

مشہور غیر ناطق عدد $\sqrt{2}$ اور π کے بارے میں آپ کیا کہتے ہیں؟ یہاں ان کے ایک خاص مقام تک عشری پھیلاؤ دیے گئے ہیں۔

$$\sqrt{2} = 1.41413562373095048801688724209 6...$$

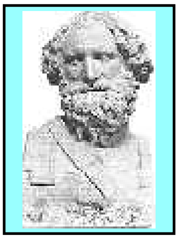
$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950...$$

نوٹ کیجیے کہ ہم اکثر π کی تقریباً قیمت $\frac{22}{7}$ لیتے ہیں لیکن $\pi \neq \frac{22}{7}$

طویل عرصہ سے ریاضی دانوں نے غیر ناطق اعداد کے عشری پھیلاؤ کو زیادہ سے زیادہ ہندسوں میں معلوم کرنے کی مختلف قسم کی تکنیک نکالی ہیں۔ مثال کے طور پر $\sqrt{2}$ کے عشری پھیلاؤ میں آنے والے ہندسوں کو آپ تقسیم سے معلوم کرنے کا

طریقہ پڑھ چکے ہیں۔ دلچسپ بات یہ ہے کہ ویدک عرصہ (800–500 ق م) کے سلبا سوتر اس (Sulbasutras) (وتر کے

یونانی ارکمیڈ یز وہ پہلا شخص تھا جس نے π کے عشری پھیلاؤ کے ہندسے معلوم کیے۔ اس نے دکھایا کہ $3.140845 < \pi < 3.142857$ آریہ بھٹ (476–550 عیسوی) عظیم ہندستانی ریاضی داں اور ماہر فلکیات نے اعشاریہ کے 4 ہندسوں تک π کی صحیح قیمت (3.1416) معلوم کی تیز رفتار کمپیوٹر اور ایڈوانس algorithms کی مدد سے π کی تقریباً اعشاریہ کے ٹری لین ہندسوں تک قیمت معلوم کی جا چکی ہے۔


آرکمیڈیز (287 ق م-212 ق م)
شکل: 1.10

قواعد) کے مطابق آپ $\sqrt{2}$ کی تقریبی قیمت مندرجہ ذیل طریقہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\sqrt{2} = 1 - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

نوٹ کیجیے کہ اعشاریہ کے پہلے 5 ہندسوں تک اس کی قیمت وہی ہے جو اوپر دی گئی ہے۔ π کے عشری پھیلاؤ میں ہندسوں کی تلاش کی تاریخ بہت دلچسپ ہے۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ غیر ناطق اعداد کیسے حاصل کیے جاتے ہیں۔

مثال 10: $\frac{1}{7}$ اور $\frac{2}{7}$ کے درمیان غیر ناطق عدد معلوم کیجیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ اس لیے آپ آسانی سے حل کر سکتے ہیں کہ $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ ، $\frac{1}{7}$ اور $\frac{2}{7}$ کے درمیان ایک غیر ناطق عدد معلوم کرنے کے لیے ہم ایک ایسا عدد معلوم کریں گے جو نہ مختتم ہو اور نہ تکراری ہو اور ان کے درمیان بھی ہو۔ یقیناً آپ ایسے لامحدود اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔ ایسے ایک عدد کی مثال ہے ...0.150150015000150000

مشق 1.3

1. مندرجہ ذیل کو عشری شکل میں لکھیے اور بتائیے کہ یہ کس قسم کا عشری پھیلاؤ ہے۔

(i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

(iv) $\frac{3}{11}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. آپ جانتے ہیں کہ $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ کیا آپ طویل تقسیم کیے بغیر اندازہ لگا سکتے ہیں کہ $\frac{2}{7}$، $\frac{3}{7}$، $\frac{4}{7}$، $\frac{5}{7}$ اور $\frac{6}{7}$ کے عشری پھیلاؤ کیا ہیں؟ اگر کر سکتے ہیں تو کیسے؟

(اشارہ: $\frac{1}{7}$ کی قیمت نکالتے وقت باقیوں پر غور کیجیے۔)

3. مندرجہ ذیل کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھیے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

(i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. ...0.99999 کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھیے۔ کیا آپ اپنے جواب سے متحیر ہیں۔ اپنے استاد اور کلاس کے ساتھیوں سے بحث کیجیے کہ جواب کا کوئی مطلب ہے۔

5. $\frac{1}{17}$ کے عشری پھیلاؤ میں ہندسہ کے تکراری بلاک میں ہندسوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد کیا ہو سکتی ہے؟ تقسیم کر کے اپنے جواب کی جانچ کیجیے۔

6. $\frac{p}{q}$ شکل والے ناطق اعداد جیسی بہت سی مثالوں کو دیکھیے جن میں p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ہو۔ جس میں کے علاوہ کوئی بھی مشترک جز وضربی نہ ہو اور ان کا عشری اظہار مختتم ہو۔ کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ q کون سی خصوصیت پیش کرتا ہے؟

7. تین ایسے اعداد لکھیے جن کا عشری اظہار غیر مختتم اور غیر تکراری ہو۔

8. $\frac{5}{7}$ اور $\frac{9}{11}$ کے درمیان تین مختلف غیر ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

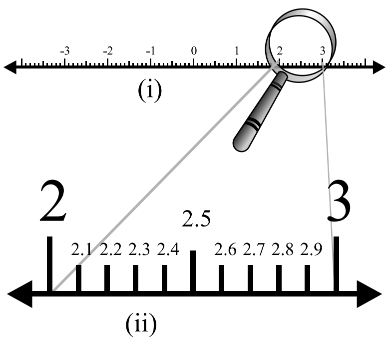
9. مندرجہ ذیل اعداد کی ناطق اور غیر ناطق میں درجہ بندی کیجیے۔

(i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

(iv) 7.478478 (v) 1.101001000100001...

1.4 حقیقی اعداد کا عددی خط پر اظہار:
(Representing Real Numbers on the Number line)

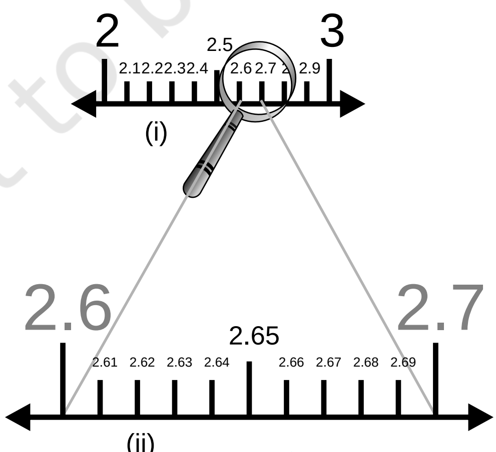
پچھلے سیکشن میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ ہر حقیقی عدد کا عشری پھیلاؤ ہوتا ہے۔ اس سے ہمیں ان کو عددی خط پر ظاہر کرنے میں مدد ملتی ہے۔ آیئے دیکھتے ہیں کیسے؟



شکل 1.11

فرض کیجیے ہمیں 2.665 کو عددی خط پر ظاہر کرنا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ یہ 2 اور 3 کے درمیان واقع ہے۔

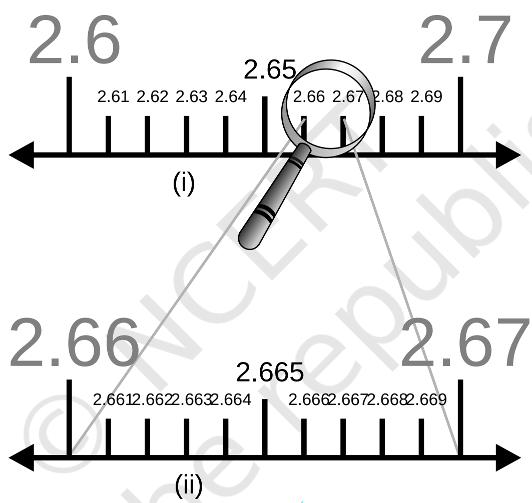
اس لیے آیئے عددی خط کے اس حصہ پر غور کرتے ہیں جو 2 اور 3 کے درمیان ہے۔ ہم اس کو حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر تقسیم کو مارک (Mark) کرتے ہیں جیسا کہ شکل 1.11(i) میں دکھایا گیا ہے۔ 2 کے دائیں طرف پہلا مارک 2.1 کو ظاہر کرتا ہے دوسرے کو 2.2 اور اس طرح آگے تک شکل 1.11(i) میں 2 اور 3 کے درمیان ان مارک کا مشاہدہ کرنے میں آپ کو کچھ پریشانی ہو رہی ہوگی۔ ان کو صاف طور پر دیکھنے کے لیے آپ ایک Mignifying Glass لیجیے اور 2 اور 3 کے درمیان والے حصہ کو دیکھیے۔ یہ ایسا نظر آئے گا جیسا آپ شکل 1.11(ii) میں دیکھتے ہیں۔



شکل 1.12

2.66 2.6.C اب اور 2.7 کے درمیان واقع ہے۔اس لیے اب ہم اپنی توجہ 2.6 اور 2.7 کے درمیان والے حصہ پر مرکوز کرتے ہیں۔ہم اس حصہ کو مزید 10 حصوں میں بانٹتے ہیں۔اس حصہ میں پہلا مارک 2.61 دیکھیے شکل (i)1.12 اور دوسرا 2.62 کو ظاہر کرتا ہے، اس طرح سے آگے بھی۔اس کو صاف طور سے دیکھنے کے لیے آپ Magnifying Glass کا استعمال کر سکتے ہیں جیسا کہ شکل 1.12(ii) میں دکھایا گیا ہے۔

2.665 دوبارہ 2.66 اور 2.67 کے درمیان واقع ہے۔آیئے عددی خط کے اس حصہ پر اپنی توجہ مرکوز کریں (شکل 1.13(i) دیکھئے) اور تصور کیجئے کہ آپ مزید اس کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔اس کو بہتر طور پر دیکھنے کے لیے آپ Magnifying Glass کا استعمال کر سکتے ہیں جیسا کہ شکل 1.13(ii) میں دکھایا گیا ہے۔ پہلا نشان 2.261 اور اگلا نشان



شکل 1.13

2.262 کو ظاہر کرتا ہے۔اس طرح پانچواں نشان 2.265 کو ظاہر کرتا ہے۔

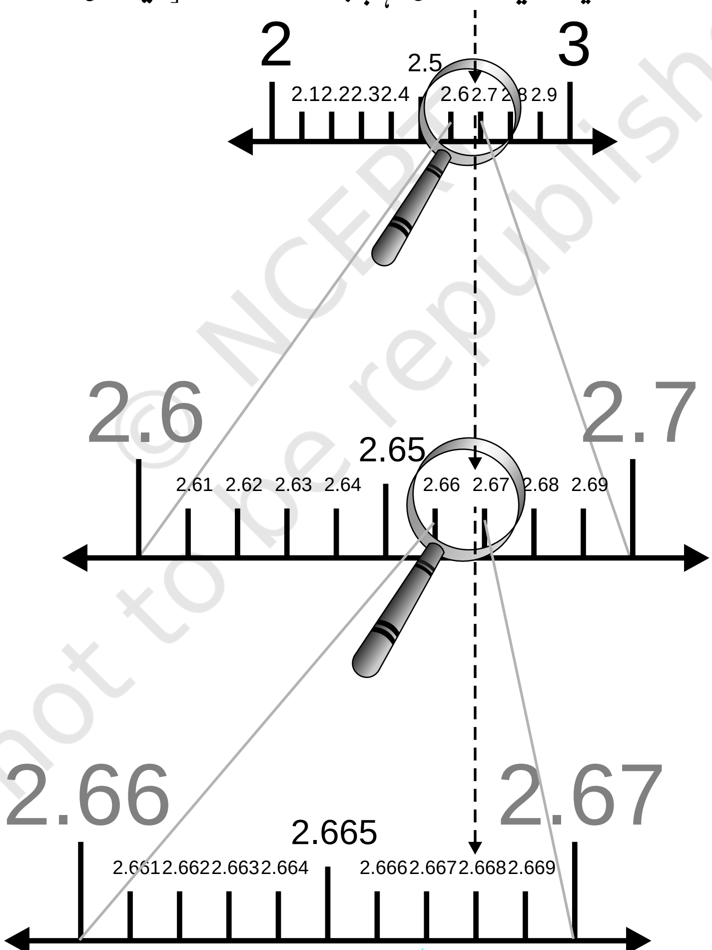
Magnifying Glass کے ذریعہ عددی خط پر ان اعداد کے اظہار کو دیکھنے کے عمل کو ہم **Process of Successive Magnification** کہتے ہیں۔

اس طرح سے ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک مختتم پھیلاؤ والے حقیقی عدد کے عددی خط پر اظہار کو Successive Magnification کے عمل سے دیکھنا ممکن ہے۔اس لیے اب ایک غیر مختتم اور تکراری حقیقی عدد کے عددی خط پر اظہار کو دیکھنے کی کوشش کرتے ہیں۔ہم Magnifying Glass کے ذریعے مناسب وقفوں کو دیکھ سکتے ہیں اور Successive Magnification کے عمل سے عددی خط پر اس عدد کے اظہار کو دیکھتے ہیں۔

مثال 11: عددی خط پر $5.3\overline{7}$ کے اظہار کو اعشاریہ کے 5 مقاموں تک یعنی 5.37777 تک دیکھئے۔

حل: ہم ایک بار پھر Successive Magnification سے آگے بڑھتے ہیں اور مستقل عددی خط کے اس حصہ کی لمبائی کو گھٹاتے رہتے ہیں جس میں $5.3\overline{7}$ واقع ہے۔ پہلے ہم دیکھتے ہیں کہ 5 اور 6 کے درمیان $5.3\overline{7}$ واقع ہے۔

اگلے قدم میں ہم دیکھتے ہیں کہ 5.3 اور 5.4 کے درمیان $5.3\overline{7}$ واقع ہے۔ زیادہ درستگی کے ساتھ دیکھنے کے لیے عددی خط کے اس حصہ کو ہم مزید 10 برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور Magnifying Glass سے مشاہدہ کرتے ہیں کہ 5.37 اور 5.38 کے درمیان $5.3\overline{7}$ واقع ہے۔ $5.3\overline{7}$ کو مزید درستگی سے دیکھنے کے لیے ہم ایک بار پھر 5.377 اور 5.378 کے درمیانی حصہ کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور $5.3\overline{7}$ کے اظہار کا مشاہدہ کرتے ہیں جیسا کہ شکل (iv)1.14 میں دکھایا گیا ہے۔ نوٹ کیجیے 5.3778 کے زیادہ نزدیک 5.37 واقع ہے بہ نسبت 5.3777 کے۔ [دیکھیے شکل (iv)1.14]



شکل: (iv)1.14

ریمارک: ہم اس طرح سے Magnifying Glass سے دیکھتے ہوئے عددی خط کی اس حصہ کی لمبائی کو کم کرتے رہیں گے جس میں $5.3\overline{7}$ واقع ہے اور یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ مذکورہ حصہ کا سائز اس بات پر منحصر کرتا ہے کہ ہم کسی درستگی کے ساتھ عددی خط پر مطلوبہ عدد کے مقام کو Visualize کرتے ہیں۔

اب تک آپ یہ بات سمجھ چکے ہوں گے کہ اسی طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم ایسے حقیقی عدد کا مقام عددی خط پر معلوم کر سکتے ہیں جس کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہو۔

مذکورہ بالا بحث کی روشنی میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہر حقیقی عدد، عددی خط پر ایک یکتا نقطہ کو ظاہر کرتا ہے۔ مزید عددی خط پر ہر ایک نقطہ ایک اور صرف ایک حقیقی عدد کو ظاہر کرتا ہے۔

مشق 1.4

1. Successive Magnification کا استعمال کرتے ہوئے 3.765 کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔
2. $4.\overline{26}$ کو اعشاریہ کے 4 مقاموں تک عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

1.5 حقیقی اعداد پر عملیات: Operations on Real Numbers

پچھلی جماعتوں میں آپ ناطق اعداد کی تقلیبی، تلازمی اور جمع اور ضرب کی تقسیمی خصوصیت کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ اگر ہم دو ناطق اعداد کی جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم (صفر کے علاوہ) کریں تو ایک ناطق عدد ہی حاصل ہوتا ہے (یعنی ناطق اعداد، جمع تفریق، ضرب اور تقسیم کے لیے ہیں)۔ اب ہم آسانی سے یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ غیر ناطق اعداد بھی جمع اور ضرب کی تقسیمی خصوصیت، تقلیبی اور تلازمی خصوصیت کو ظاہر کرتے ہیں۔ لیکن غیر ناطق اعداد کا حاصل جمع، حاصل تفریق، حاصل ضرب اور خارج قسمت ہمیشہ غیر ناطق نہیں ہوتا۔ مثال کے طور پر $\sqrt{6+(-\sqrt{6})}$ ، $\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right)$، $\left(\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{3}\right)$ اور $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ ناطق ہیں۔

آیئے اب ہم دیکھتے ہیں کہ جب ہم ایک ناطق عدد کو غیر ناطق عدد میں جمع، تفریق یا ضرب کرتے ہیں تو کیا حاصل ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر $\sqrt{3}$ غیر ناطق ہے۔ $2+\sqrt{3}$ اور $2\sqrt{3}$ کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟

چونکہ $\sqrt{3}$ ایک غیر مختتم اور غیر تکراری عدد ہے اور یہی بات $2+\sqrt{3}$ اور $2\sqrt{3}$ کے لیے بھی درست ہے۔

اس لیے $2+\sqrt{3}$ اور $2\sqrt{3}$ دونوں بھی غیر ناطق ہیں۔

مثال 12: جانچ کیجیے کہ $7\sqrt{5}$ ، $\frac{7}{\sqrt{5}}$ ، $\sqrt{2}+21$ ، $\pi-2$ غیر ناطق عدد ہیں یا نہیں۔

حل: $\sqrt{5}=2.236\ldots$ ، $\sqrt{2}=1.4142\ldots$ ، $\pi=3.1415$

تب $$\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}=3.1304 \text{ ، } 7\sqrt{5}=15.652\ldots$$

$$\pi-5=1.1415\ldots \text{ ، } \sqrt{2}+21=22.4142\ldots$$

یہ تمام غیر مختتم اور غیر تکراری اعشاریہ ہیں۔اس لیے یہ تمام غیر ناطق اعداد ہیں۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ عموماً کیا ہوتا ہے اگر ہم غیر ناطق اعداد کی جمع ،تفریق ،ضرب ،تقسیم یہاں تک کہ ان کے جزء المربع اور nواں جز معلوم کرتے ہیں جب n ایک فطری عدد ہے آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 13: $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ اور $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ کو جمع کیجیے

حل: $$\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}-2\sqrt{3}=\left(3\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$$

$$=(2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

مثال 14: $6\sqrt{5}$ کو $2\sqrt{5}$ سے ضرب کیجیے

حل: $$6\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}=6\times 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=12\times 5=60$$

مثال 15: $8\sqrt{5}$ کو $2\sqrt{3}$ سے تقسیم کیجیے

حل: $$8\sqrt{5}\div 2\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3\times 5}}{2\sqrt{3}}=4\sqrt{5}$$

ان مثالوں سے مندرجہ ذیل حقیقتوں سے آگاہی ہوتی ہے۔

(i) ایک ناطق عدد اور ایک غیر ناطق عدد کا حاصل جمع یا حاصل فرق غیر ناطق ہوتا ہے۔

(ii) ایک غیر صفر ناطق عدد اور ایک غیر ناطق عدد کا حاصل ضرب یا تقسیم غیر ناطق ہوتا ہے۔

(iii) اگر ہم ''غیر ناطق اعداد کی جمع، گھٹاؤ، ضرب یا تقسیم کرتے ہیں تو نتیجہ ناطق یا غیر ناطق کچھ بھی ہوسکتا ہے

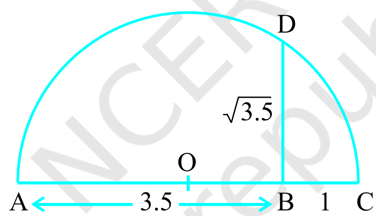
اب ہم اپنی توجہ حقیقی اعداد کا جزر نکالنے پر مرکوز کرتے ہیں۔

یاد کیجیے کہ اگر a ایک فطری عدد ہے تو $\sqrt{a} = b$ کا مطلب ہے $b^2 = a$ اور $b > a$

اسی تعریف کو مثبت حقیقی اعداد کے لیے بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

مان لیجیے کہ $a > b$ ایک حقیقی عدد ہے تب $\sqrt{a} = b$ کا مطلب $b^2 = a$ اور $b > 0$

سیکشن 1.2 میں نے ہم دیکھا کہ $\sqrt{n}$ کو کسی بھی مثبت صحیح عدد n کے لیے کس طرح عددی خط پر ظاہر کیا جاتا ہے۔ اب ہم جیومیٹریائی طریقہ سے دکھائیں گے کہ کس طرح سے کسی بھی مثبت حقیقی عدد x کے لئے $\sqrt{x}$ کی قدر معلوم کی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر $x = 3.5$ کے لیے معلوم کرتے ہیں یعنی جیومیٹریائی طریقہ سے ہم $\sqrt{3.5}$ کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔



شکل 1.15

دیے ہوئے خط پر ایک متعین نقطہ A سے 3.5 اکائیوں کے فاصلہ پر ایک نقطہ B اس طرح حاصل کیجیے (شکل 1.15 دیکھئے) کہ AB = 3.5 ہو۔ B سے ایک اکائی کے فاصلہ پر دوسرا نقطہ C مارک کیجیے۔ AC کا وسطی نقطہ معلوم کیجیے اور اسے O مارک کیجیے۔ O کو مرکز مان کر OC نصف قطر کا ایک نصف دائرہ بنالیجیے۔ B سے گزرتا ہوا ایک ایسا خط کھینچئے جو AC پر عمود ہو اور نصف دائرہ کو نطقہ D پر قطع کرے۔ تب $BD = \sqrt{3.5}$ عموی طور پر کسی بھی مثبت حقیقی عدد کے لیے $\sqrt{x}$ معلوم کرنے کے لیے ہم B کو اس طرح مارک کرتے ہیں کہ AB = x جیسا کے شکل 1.16 میں دکھایا گیا ہے اور C اس طرح مارک کریں گے کہ BC = 1 جیسا کہ ہم نے x = 3.5 کے لیے کیا ہے۔ ہم پاتے ہیں کہ $BD = \sqrt{x}$ (شکل 1.16 میں دیکھئے)

اس نتیجہ کو ہم پیتھا گورس کے مسئلہ کو استعمال کر کے ثابت کر سکتے ہیں۔

نوٹ کیجیے کہ شکل 1.16 میں ΔOBD ایک قائم زاوی مثلث ہے۔ اور دائرہ کا نصف قطر $\frac{x+1}{2}$ اکائیاں ہیں۔

اس لیے اکائیاں $OC = OD = OA = \frac{x+1}{2}$

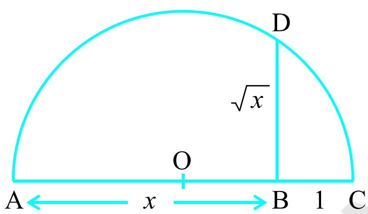
اب $OB = x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$

اس لیے پیتھا گورس کے مسئلہ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

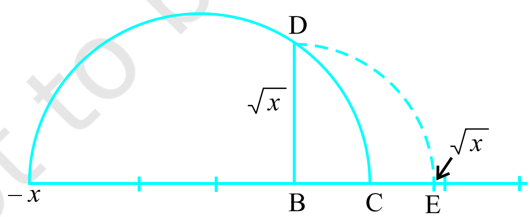
$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ $BD = \sqrt{x}$

اس بناوٹ سے ہمیں یہ پتہ چلتا ہے کہ جیومیٹریائی طریقہ سے ہم تمام حقیقی اعداد کے لیے $x > 0$ کے $\sqrt{x}$ وجود کو دکھا سکتے ہیں۔ اگر آپ عددی خط پر $\sqrt{x}$ کا مقام معلوم کرنا چاہیں تو آپ خط BC کو عددی خط تصور کیجیے۔ جس میں B کو صفر اور C کو لیں اور اسی طرح آگے تک B کو مرکز مان اور BD نصف قطر لے کر ایک قوس بنالیں جو عددی خط کو نقطہ E پر قطع کرے (شکل 1.17 دیکھیے)۔ تب E، $\sqrt{x}$ کو ظاہر کرے گا۔



شکل 1.16



شکل 1.17

اب ہم چاہیں گے کہ جزر المربع کا تصور اب جزر الکعب، چوتھا جزر اور عمومی طور پر n واں جزر کو معلوم کرنے کے لیے استعمال کریں جہاں n ایک مثبت عدد ہے۔ پچھلی جماعتوں میں آپ نے جزر المربع، جزر الکعب کے بارے جو کچھ سیکھا ہے، اس کو دہرائیے۔

$\sqrt[3]{8}$ کیا ہے؟ ہم جانتے ہیں کہ یہ وہ مثبت عدد ہے، جس کا کعب 8 ہے، آپ نے اندازہ لگایا ہوگا کہ $\sqrt[3]{8} = 2$ ۔ آیئے $\sqrt[5]{243}$ کو معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ کیا آپ کسی ایسے عدد کے بارے میں جانتے ہیں جہاں $b^5 = 243$ اس کا جواب 3 ہے۔اس لیے $\sqrt[5]{243} = 3$

ان مثالوں سے کیا آپ $\sqrt[n]{a}$ کی تعریف بیان کر سکتے ہیں جہاں $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے اور n ایک مثبت صحیح عدد؟

مان لیجیے $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے اور n ایک مثبت صحیح عدد۔ تب $\sqrt[n]{a} = b$ اگر $b^n = a$ اور $b > 0$

نوٹ کیجیے کہ $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[3]{8}$ $\sqrt[n]{a}$ وغیرہ میں علامت $\sqrt{}$ کا استعمال کیا گیا ہے اس علامت $\sqrt{}$ کو جزری علامت (Radical Sign) کہتے ہیں۔

اب ہم جذر المربع سے متعلق کچھ مماثلات کی فہرست بناتے ہیں جو مختلف طور پر ہمارے لیے مفید ہیں۔ ان میں سے کچھ سے آپ پچھلی جماعتوں میں ہی واقف ہو چکے ہیں اور باقی کو ہم حقیقی اعداد پر جمع پر ضرب کی تقسیمی خصوصیت کا استعمال کر کے معلوم کر سکتے ہیں اور کچھ کو $(x+y)(x-y) = (x^2 - y^2)$ جہاں x اور y حقیقی اعداد ہیں کا استعمال کر کے۔

مان لیجیے a اور b مثبت حقیقی اعداد ہیں

تب

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

تو

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$

یعنی

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

اس لیے ان مماثلات کی کچھ خاص صورتوں کو دیکھتے ہیں۔

مثال 16: درج ذیل عبارتوں کو مختصر کیجیے:

(i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

حل:

(i) $(5-\sqrt{7})(2+\sqrt{5}) = 10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $(5-\sqrt{5})(5-\sqrt{5}) = 5^2-(\sqrt{5})^2 = 25-5 = 20$

(iii) $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2 = (\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2 = 3+2\sqrt{21}+7 = 10+2\sqrt{21}$

(iv) $(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7}) = (\sqrt{11})^2-(\sqrt{7})^2 = 11-7 = 4$

ریمارک: نوٹ کیجیے کہ درج بالا مثال میں مختصر کا مطلب ہے کہ عبارت کو ناطق اعداد اور غیر ناطق اعداد کے حاصل جمع کی شکل میں لکھنا۔

اس سیکشن کا اختتام ہم مندرجہ ذیل مسئلہ کو لے کر کرتے ہیں۔ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو دیکھئے، کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ یہ عددی خط پر کہاں واقع ہے؟ آپ جانتے ہیں کہ یہ غیر ناطق ہے۔ اس کو آپ آسانی سے بتا سکتے تھے جب کہ نسب تمام ناطق ہوتا۔
آیئے دیکھتے ہیں کہ کیا ہم نسب نما کو ناطق بنا سکتے ہیں؟ یعنی نسب نما کو ایک ناطق عدد بنا سکتے ہیں۔ ایسا کرنے کے لیے ہم ان مماثلات کا استعمال کرتے ہیں جن میں جزر شامل ہیں۔ آیئے دیکھتے ہیں کہ کیسے۔

مثال 17: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کے نسب نما کو ناطق بنایئے

حل: ہم $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو اس عبارت کے متبادل لکھنا چاہتے ہیں۔ جس میں نسب نما ناطق عدد ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ $\sqrt{2}.\sqrt{2}$ ناطق ہے۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ سے ضرب کرنے پر ایک معادل عبارت حاصل ہوتی ہے کیونکہ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ ۔ اس لیے ہم ان دونوں حقیقتوں کو ایک ساتھ رکھ کر حاصل کرتے ہیں

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

اس شکل میں ہم $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو آسانی سے عددی خط پر تلاش کر سکتے ہیں۔ یہ 0 اور $\sqrt{2}$ کے درمیان آدھے فاصلے پر واقع ہے۔

مثال 18: $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ کے نسب نما کو ناطق بنایئے۔

حل: یہاں ہم مماثل (iv) کا استعمال کرتے ہیں جو اوپر دیا گیا ہے۔ $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ کو $2-\sqrt{3}$ سے ضرب اور تقسیم کرتے ہیں جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

مثال 19: $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ کے نسب نما کو ناطق بنایئے:

حل: یہاں ہم مماثل (iii) کا استعمال کرتے ہیں۔

اس لیے

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5}=\left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

مثال 20: $\dfrac{1}{7+3\sqrt{2}}$ کے نسب نما کو ناطق بنایئے:

حل:
$$\frac{1}{7+3\sqrt{2}}=\frac{1}{7+3\sqrt{2}}\times\left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right)=\frac{7-3\sqrt{2}}{49-18}=\frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

اس لیے جب کسی عبارت کے نسب نما میں ایسا رُکن ہو جس میں جزر ہو، اس کو ایسی عبارت کے معادل تبدیل کرنے کے لیے جس کا نسب نما ناطق ہو، ہم نسب نما کو ناطق بنانا کہتے ہیں۔

مشق 1.5

1. مندرجہ ذیل اعداد کی ناطق اور غیر ناطق میں درجہ بندی کیجیے:

(i) $2-\sqrt{3}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (iv) 2π

2. مندرجہ ذیل عبارت کو مختصر کیجیے:

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. یاد کیجیے کہ π کو ہم دائرہ کے محیط (C) اور اس کے قطر (d) کی نسبت کے طور پر جانتے ہیں یعنی $\pi = \frac{c}{d}$ ۔ یہ اس حقیقت کی نفی کرتا ہے کہ π ایک غیر ناطق عدد ہے۔ اس تضاد کو آپ کس طرح سے ٹھیک کریں گے؟

4. $\sqrt{9.3}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

5. مندرجہ ذیل کے نسب نماؤں کو ناطق بنائیے:

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.6 حقیقی اعداد کے لیے قوت نما کے قوانین (Laws of Exponents of Real Numbers)

کیا آپ کو یاد ہے کہ درج ذیل کی تحسیب کس طرح کریں گے؟

(i) $17^2.17^5 =$ (ii) $\left(5^2\right)^7 =$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3.9^3 =$

کیا آپ یہ جوابات حاصل کر سکتے ہیں؟ یہ مندرجہ ذیل ہیں:

(i) $17^2.17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 - 5^{14}$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3.9^3 = 63^3$

ان جوابات کو حاصل کرنے کے لیے آپ نے مندرجہ ذیل قوت نما کے قوانین کا استعمال کیا (یہاں a، m اور n فطری اعداد ہیں یاد کیجیے کہ a اساس کہلاتا ہے اور m اور n قوت نما) جو آپ پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

$(a)^0$ کیا ہے؟ ہاں یہ 1 ہے۔اس طرح سے آپ سیکھ چکے ہیں کہ $(a)^0 = 1$ اس لیے (iii) کا استعمال کرتے ہوئے ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ ۔ اس طرح سے ہم ان قوانین کو منفی قوت نماؤں کے لیے آگے بڑھا سکتے ہیں۔

اس لئے مثال کے طور پر

(i) $17^2 . 17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3} . (9)^{-3} = (63)^{-3}$

فرض کیجئے ہم درج ذیل تحسیبات کرنا چاہتے ہیں:

(i) $2^{\frac{2}{3}} . 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^5}\right)^4$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} . 17^{\frac{1}{5}}$

ہم انہیں کس طرح سے حاصل کریں گے؟ ان کو حل کرنے کے لیے ہم قوت نماؤں کے قوانین جن کو پہلے پڑھ چکے ہیں اس کو ناطق اعداد کے لیے آگے بڑھا سکتے ہیں یہاں تک کہ جب اساس مثبت حقیقی اعداد اور قوت نما ناطق اعداد ہوں (بعد میں آپ مزید سیکھیں گے کہ ان کو قوانین کو تب بھی استعمال کر سکتے ہیں جب قوت نما حقیقی عدد ہو)۔اس سے پہلے کہ ہم ان قوانین کو بیان کریں ہم ان کو سمجھنے کی پہلے کوشش کرتے ہیں۔مثال کے طور پر $4\frac{3}{2}$ لیجئے۔اس کے لیے ہمیں کچھ کام کرنا ہے۔

سیکشن 1.4 میں ہم نے کسی بھی حقیقی عدد $a > 0$ کے لیے $\sqrt[n]{a}$ کو درج ذیل طریقہ سے معرف کیا تھا۔

مان لیجئے $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے اور n ایک مثبت صحیح عدد۔تب $\sqrt[n]{a} = b$ ، اگر $b^n = a$ اور $b > 0$

قوت نماؤں کی زبان میں ہم تعریف بیان کرتے ہیں $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ اس لیے خاص طور پر $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ اب ہم $4^{\frac{2}{3}}$ کو دو طریقوں سے مختصر کر سکتے ہیں۔

$$4^{\frac{2}{3}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{2}{3}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

اس لیےاب ہمارے پاس درج ذیل تعریف ہے:

مان لیجئے $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے۔مان لیجئے m اور n صحیح اعداد ہیں اوران میں 1 کے علا ہ کوئی بھی مشترک جزوضربی ہیں ہے اور $a > 0$ تب

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

اب ہمارے پاس نئے قوت نما کے قوانین ہیں جو درج ذیل ہیں:

مان لیجئے $a > 0$ حقیقی اعداد ہے اور p اور q ناطق اعداد۔تب ہمارے پاس:

(i) $a^p . a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

ان قوانین کا استعمال آپ اوپر پوچھے گئے سوالات کا جواب دینے کے لیے کر سکتے ہیں۔

مثال 21: مختصر کیجئے:

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{5}}}\right)^{4}$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}}.17^{\frac{1}{5}}$

حل:

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}}.17^{\frac{1}{5}} = (13\times17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$

مشق: 1.6

1. معلوم کیجیے

(i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$

2. معلوم کیجیے:

(i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{1}{3}}$

3. مختصر کیجیے:

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^2}\right)^7$ (iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}$

1.7 خلاصہ:

اس باب میں آپ نے درج ذیل اہم باتیں سیکھیں:

1. ایک عدد r ناطق عدد ہوتا ہے، اگر اس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھ سکیں جہاں p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ہو۔

2. ایک عدد غیر ناطق کہلاتا ہے جب وہ $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہ لکھا جا سکے تو جہاں p اور q صحیح اعداد ہو اور $q \neq 0$

3. ایک ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ یا تو مختتم ہوتا ہے یا غیر مختتم تکراری یا ایک حقیقی عدد جس کا عشری پھیلاؤ مختتم یا غیر مختتم تکراری ہوتا ہے، ناطق عدد ہوتا ہے۔

4. ایک غیر ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ نہ تو مختتم ہوتا ہے نہ غیر مختتم تکراری یا ایک حقیقی عدد جس کا غیر پھیلاؤ غیر مختتم غیر تکراری ہو غیر ناطق ہے۔

5. تمام ناطق اور غیر ناطق اعداد مل کر حقیقی اعداد کہلاتے ہیں۔

6. عددی خط پر ہر نقطہ ایک ناطق عدد کو ظاہر کرتا ہے یا دوسرے طریقہ سے کہیں تو ہر حقیقی عدد کے لیے عددی خط پر ایک حقیقی ہوتا ہے، ناطق عدد حقیقی خط کے اوپر۔

7. اگر r ناطق ہے اور s غیر ناطق تب $r + s$، $r - s$، rs، $\frac{r}{s}$ غیر ناطق اعداد ہیں۔

8. مثبت حقیقی اعداد a اور b کے لیے مندرجہ ذیل مماثلات درست ہیں۔

(i) $\sqrt{ab} - \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

9. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ کے نسب نما کو ناطق بنانے کے لیے ہم اس کو $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ سے ضرب کرتے ہیں جہاں a اور b صحیح اعداد ہیں۔

10. مان لیجیے $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے اور p اور q ناطق اعداد ہیں تب

(i) $a^p . a^p = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$