باب 2

کثیر رکنیاں (Polynomials)

2.1 تعارف (Introduction)

آپ الجبری عبارتیں، ان کی جمع، تفریق، ضرب، اور تقسیم کے بارے میں پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔ آپ یہ بھی پڑھ چکے ہیں کہ کچھ الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی کیسے معلوم کیے جاتے ہیں۔ آپ کچھ مماثلات کو یاد کیجیے۔

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

اور اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے ان کا استعمال کو یاد کیجیے۔ اس باب میں ہم ایک خاص قسم کی الجبری عبارت جسے کثیر رکنی کہتے ہیں، اس کے بارے میں مطالعہ کریں گے اور اس سے متعلق اصطلاحات کا بھی مطالعہ کریں گے۔ ہم باقی کا مسئلہ اور جزو ضربی کے مسئلہ کا بھی مطالعہ کریں گے اور اجزائے ضربی بنانے کے لیے ان کا استعمال کرنا سیکھیں گے اس کے علاوہ ہم کچھ اور مماثلات کا مطالعہ کریں گے اور یہ بھی سیکھیں گے کہ کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے اور الجبری عبارتوں کی قدر معلوم کرنے میں ان کا استعمال کس طرح کیا جاتا ہے۔

2.2 ایک متغیر والی کثیر رکنیاں (Polynomials in One Variable)

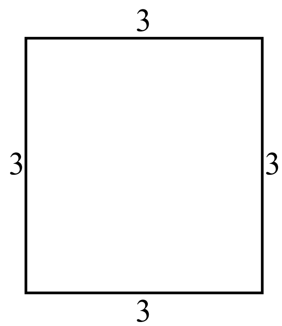
آیئے یہ بات دہرا کر شروعات کرتے ہیں کہ ایک متغیر کو کسی علامت سے ظاہر کر سکتے ہیں جس کی کوئی بھی حقیقی قدر ہو سکتی ہے۔ ہم ان متغیر کو ظاہر کرنے کے حروف x، y اور z وغیرہ کا استعمال کرتے ہیں۔ نوٹ کیجیے کہ $2x$ ، $3x$ ، $-x$ اور $-\frac{1}{2}x$ الجبری عبارتیں ہیں۔ یہ تمام عبارتیں (ایک مستقلہ) $\times x$ شکل کی ہیں۔ فرض کیجیے ہم ایک عبارت (مستقلہ) $\times$

(متغیر) کی شکل میں لکھنا چاہتے ہیں اور ہم مستقلہ کے بارے میں کچھ نہیں جاتے ۔ ایسی حالت میں ہم مستقلہ a، b اور c وغیرہ لکھتے ہیں۔اس طرح سے عبارت ax ہوجائے گی۔

یہ بات مزید غور کرنے کی ہے کہ مستقلہ اور متغیر کو ظاہر کرنے والے حروف میں فرق ہوتا ہے۔کسی خاص حالت میں مستقلہ کی قدر یکساں رہتی ہے۔یعنی کسی دیئے ہوئے سوال میں مستقلوں کی قدر نہیں بدلتی لیکن متغیر کی قدر بدلتی رہتی ہے۔

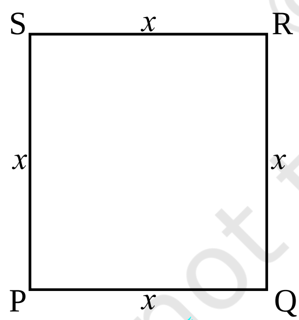
اب 3 اکائیوں والے ضلع کے ایک مربع پر غور کیجیے (شکل 2.1 دیکھئے)۔

اس کا احاطہ کیا ہے؟ آپ جانتے ہیں کہ مربع کا احاطہ اس کے چاروں اضلاع کا حاصل جمع ہوتا ہے۔ یہاں ہر ضلع 3 اکائیوں کا ہے۔اس لیے اس کا احاطہ 4×3 یعنی 12 اکائیاں ہے۔اس کا احاطہ کیا ہوگا جب اس کا ضلع 10 اکائیوں کا ہو؟ احاطہ ہے 4×10 یعنی 40 اکائیاں۔ ایسی حالت میں جب اس کا ضلع x اکائی ہو (شکل 2.2 دیکھئے) تو اس کا احاطہ ہوگا 4x اکائیاں۔اس طرح سے اگر ضلع کی لمبائی تبدیل ہوتی ہے تو احاطہ بھی تبدیل ہوتا ہے۔



شکل 2.1

آپ کیا مربع PQRS کا رقبہ معلوم کرسکتے ہیں؟ یہ ہے $x \times x = x^2$ مربع اکائیاں۔ x^2 ایک الجبری عبارت ہے۔آپ اور دوسری الجبری عبارتوں سے بھی واقف ہیں جیسے $2x, x^2 + 2x, x^3 - x^2 + 4x + 7$ نوٹ کیجیے آپ نے ابھی تک جتنی الجبری عبارتوں پر غور کیا ہے، ان میں متغیر کا قوت نما ایک مکمل عدد ہے۔اس طرح کی عبارتیں ایک متغیر والی کثیر رکنیاں کہلاتی ہیں۔ مذکورہ بالا مثال میں متغیر x ہے۔مثال کے طور پر $x^3 - x^2 + 4x + 7$ میں x ایک کثیر رکنی ہے۔ اسی طرح سے $3y^2 + 5y$، y میں ایک کثیر رکنی ہے اور $t^2 + 4$، t میں ایک کثیر رکنی ہے۔



شکل 2.2

کثیر رکنی $x^2 + 2x$ میں عبارتیں x^2 اور $2x$ ارکان کہلاتی ہیں۔اس طرح سے $3y^2 + 5y + 7$ میں 3 ارکان ہیں جو ہیں $3y^2$، $5y$ اور 7۔کیا آپ کثیر رکنی $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ کے ارکان لکھ سکتے ہیں؟اس کثیر رکنی کے 4 ارکان ہیں جو ہیں $-x^3$، $4x^2$، $7x$ اور -2۔

کثیر رکنی کے ہر رکن کا ایک ضریب ہوتا ہے۔اس لیے $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ میں x^3 کا ضریب -1، x^2 کا

ضریب 4۔اور x کا ضریب 7 x^{0} اور 2– ضریب ہے x^{0} (یاد کیجیے $x^{0}=1$) کیا آپ جانتے ہیں کہ x^2-x+7 میں x کا ضریب کیا ہے؟ یہ ہے 1–

2 بھی ایک کثیر رکنی ہے۔ درحقیقت 2,5-,7 وغیرہ مستقل کثیر رکنیوں کی کچھ مثالیں ہیں۔ مستقل کثیر رکنی 0 صفر کثیر رکنی (Zero Polynomial) کہلاتی ہیں۔ آپ اگلی جماعتوں میں دیکھیں گے کہ تمام کثیر رکنیوں کے مجموعہ میں ان کا ایک اہم کردار ہوگا۔

اب الجبری عبارتوں جیسے $x+\frac{1}{x}$ ، $\sqrt{x}+3$ اور $\sqrt[3]{y}+y^2$ پر غور کیجیے ۔کیا آپ جانتے ہیں کہ اب $x+\frac{1}{x}=x-x^{-1}$ لکھ سکتے ہیں؟ یہاں دوسرے رکن یعنی x^{-1} کا قوت نما 1– ہے جو ایک مکمل عدد نہیں ہے۔ اس لیے یہ الجبری عبارت ایک کثیر رکنی نہیں ہے۔

مزید $\sqrt{x}+3$ کو ہم $x^{\frac{1}{2}}+3$ لکھ سکتے ہیں۔ یہاں x کا قوت نما $\frac{1}{2}$ ہے جو مکمل عدد نہیں ہے۔ تو کیا $\sqrt{x}+3$ ایک کثیر رکنی ہے؟ نہیں یہ نہیں ہے۔ $\sqrt[3]{y}+y$ کے بارے میں کیا خیال ہے؟ یہ بھی کثیر رکنی نہیں ہے (کیوں؟)۔

اگر کسی کثیر رکنی میں متغیر x ہے تو ہم اس کو $p(x)$، $q(x)$ یا $r(x)$ وغیرہ سے ظاہر کرسکتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم لکھ سکتے ہیں:

$$p(x)=2x^2+5x-3$$
$$q(x)=x^3-1$$
$$r(y)=y^3+y+1$$
$$s(u)=2-u-u^2+6u^5$$

ایک کثیر رکنی میں کتنے بھی محدود ارکان ہوسکتے ہیں۔ مثال کے طور $x^{150}+x^{149}+\ldots+x^2+x+1$ ، 151 ارکان والی ایک کثیر رکنی کی مثال ہے۔

کثیر رکنیوں $2x$ ، 2 ، $5x^3$ ، $5x^2$ ، y اور u^4 پر غور کیجیے۔ کیا آپ دیکھتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک کثیر رکنی ہیں صرف ایک رکن ہے؟ ایسی کثیر رکنیاں جن میں صرف ایک رکن ہوتا ہے ایک رکنی کہلاتی ہے (ایک کا مطلب ایک)۔

مندرجہ ذیل ہر ایک کثیر رکنی کا مشاہدہ کیجیے:

$$p(x)=x+1,\quad q(x)=x^2-x,\quad r(y)=y^{30}+1,\quad t(u)=u^{43}-u^2$$

ان میں سے ہر ایک کثیر رکنی میں کتنے ارکان ہیں؟ ہر کثیر رکنی میں 2 ارکان ہیں۔ ایسی کثیر رکنیاں جن میں صرف دو ارکان ہوں دو رکنی کہلاتی ہیں۔

اسی طرح ایسی کثیر رکنیاں جن میں 3 ارکان ہوتے ہیں سہ رکنی (سہ مطلب تین) کہلاتی ہے۔ ان کی کچھ مثالیں ہیں:

$$p(x) = x + x^2 + \pi \qquad q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$$

$$r(u) = u + u^2 - 2 , \qquad t(y) = y^4 + y + 5$$

اب کثیر رکنی $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ کو دیکھیے۔ وہ کونسا رکن ہے جس میں x کی قوت سب سے زیادہ ہے؟ یہ $3x^7$ ہے۔ اس رکن میں x کا قوت نما 7 ہے۔ اسی طرح سے کثیر رکنی $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ میں وہ رکن جس میں y کی قوت سب سے زیادہ ہے $5y^6$ ہے اور اس رکن میں y کا قوت نما 6 ہے۔ کسی کثیر رکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت کو اس کثیر رکنی کا درجہ کہتے ہیں۔ اس طرح سے کثیر رکنی $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ کا درجہ 7 ہے اور کثیر رکنی $5y^6 - 4y^2 - 6$ کا درجہ 6 ہے۔ ایک غیر صفر مستقلہ کثیر رکنی کا درجہ صفر ہوتا ہے۔

مثال 1: درج ذیل ہر ایک کثیر رکنی کا درجہ معلوم کیجیے:

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

حل: (i) اس کثیر رکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت 5 ہے۔ اس لیے اس کا درجہ 5 ہے۔

(ii) اس کثیر رکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت 8 ہے۔ اس لیے اس کا درجہ 8 ہے۔

(iii) یہاں واحد رکن 2 ہے جس کو ہم $2x^0$ لکھ سکتے ہیں۔ اس لئے x کا قوت نما 0 ہے۔ اس لیے اس کثیر رکنی کا درجہ 0 ہے۔

اب کثیر رکنیوں $p(x) = 4x + 5, q(y) = 2y, r(t) = t + \sqrt{2}$ اور $s(u) = 3 - u$ کا مشاہدہ کیجیے۔

کیا آپ ان سب میں کچھ مشترک پاتے ہیں؟ ان تمام کثیر رکنیوں کا درجہ ایک ہے۔ ایسی کثیر رکنیاں جن کا درجہ 1، ہو خطی کثیر رکنیاں کہلاتی ہیں۔ ایک متغیر والی کچھ اور کثیر رکنیاں ہیں $2x - 1, \sqrt{2}y + 1, 2 - u$ اب x متغیر والی ایسی خطی کثیر رکنی معلوم کرنے کی کوشش کیجیے جس کے 3 ارکان ہوں؟ آپ معلوم کر سکتے ہیں کیونکہ x متغیر والی خطی کثیر رکنی میں زیادہ سے زیادہ 2 ارکان ہو سکتے ہیں اور وہ $ax + b$ شکل کی ہوگی جہاں a اور b مستقلہ میں اور $a \neq 0$ ۔ کیوں؟۔ اسی طرح سے $ay + b$، y میں ایک خطی کثیر رکنی ہے۔

اب آپ ان کثیر رکنیوں پر غور کیجیے:

$$x^2 + \frac{2}{5}x \text{ اور } 2x^2 + 5,\ 5x^2 + 3x + \pi,\ x^2$$

کیا آپ اس بات سے متفق ہیں کہ ان تمام کا درجہ 2 ہے؟ ایسی کثیر رکنی جس کا درجہ دو ہو، دو درجتی کثیر رکنی کہلاتی ہے۔ دو درجتی کثیر رکنیوں کی کچھ مثالیں $5 - y^2$ ، $4y + 5y^2$ اور $6 - y - y^2$ ہیں۔ کیا آپ ایک متغیر والی ایسی دو درجتی کثیر رکنی کی مثال دے سکتے ہیں جن میں 4 مختلف ارکان ہوں؟ آپ پائیں گے کہ ایک متغیر والی دو درجتی کثیر رکنی میں زیادہ سے زیادہ 3 ارکان ہو سکتے ہیں۔ اگر آپ مزید کچھ دو درجتی کثیر رکنیوں کو دیکھیں تو آپ پائیں گے کہ کسی بھی دو درجتی کثیر رکنی x میں $ax^2 + bx + c$ کی شکل ہوتی ہے جہاں $a \neq 0$ اور a، b، c، مستقلہ ہیں۔

ہم 3 درجے والی کثیر رکنی کو کعب کثیر رکنی کہتے ہیں۔ x میں کعب کثیر رکنی کی کچھ مثالیں ہیں $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$ ، $4x^3, 2x^3 + 1, 5x^3 + x^2, 6x^3 - x, 6 - x^3$ آپ کیا سوچتے ہیں کہ ایک متغیر والی کعب کثیر رکنی میں کتنے ارکان ہو سکتے ہیں؟ زیادہ سے زیادہ 4 ارکان۔ ان کو ہم $ax^3 + bx^2 + cx + d$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جہاں $a \neq 0$ اور a، b، c، اور d مستقلہ ہوں۔

اب آپ دیکھ چکے ہیں کہ درجہ 1، 2 یا درجہ 3 والی کثیر رکنیاں کیسی ہوتی ہیں۔ کیا آپ ایک متغیر والی ایسی کثیر رکنی لکھ سکتے ہیں جس کا درجہ x ہو جہاں x ایک فطری عدد ہو؟ ایک متغیر x میں n درجہ والی کثیر رکنی کی شکل ہے:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

جہاں $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ مستقلہ ہیں اور $a_n \neq 0$

خصوصاً اگر $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots a_n = 0$ (تمام مستقلہ صفر ہوں)، ہمیں صفر کثیر رکنی حاصل ہوتی ہے اور اس کو ہم 0 سے ظاہر کرتے ہیں۔ صفر کثیر رکنی کا درجہ کیا ہے؟ صفر کثیر رکنی رجہ معرّف نہیں ہے۔

ابھی تک ہم نے صرف ایسی کثیر رکنیوں کی بات کی جس میں صرف ایک متغیر ہے۔ ایسی بھی کثیر رکنیاں ہوتی ہیں جن میں ایک سے زیادہ متغیر ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر $x^2 + y^2 + xyz$ (جہاں متغیر x، y، اور z ہیں) تین متغیر والی کثیر رکنیاں ہیں اسی طرح سے $p^2 + q^{10} + r$ (جہاں p، x، اور r متغیر ہیں) اور $u^3 + v^2$ (جہاں متغیرہ v اور u ہیں) 3 اور 2 متغیر والی کثیر رکنیاں ہیں۔ ان کثیر رکنیوں کے بارے میں تفصیل سے آپ بعد میں پڑھیں گے۔

مشق 2.1

.1 مندرجہ ذیل میں کون سی عبارتیں ایک متغیر والی کثیررکنیاں ہیں اور کون سی نہیں؟
اپنے جواب کی وجوہات بھی بیان کیجیے۔

(i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \frac{2}{y}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

.2 مندرجہ ذیل ہر ایک میں x^2 کا ضریب معلوم کیجیے:

(i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x^3$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

.3 35 درجہ والی دورکنی اور 100 درجہ والی ایک رکنی کی ایک ایک مثال دیجیے۔

.4 مندرجہ ذیل ہر ایک کثیررکنی کا درجہ لکھیے:

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$ (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

.5 مندرجہ ذیل کی خطی، دودرجتی اور کعب کثیررکنی میں درجہ بندی کیجیے:

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$ (v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 کثیررکنی کے صفر (Zeroes of a Polynomial)

کثیررکنی پر غور کیجیے $p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

اگر $P(x)$ میں ہر ایک جگہ x کو 1 رکھیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$p(1) = 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2$$
$$= 5 - 2 + 3 - 2$$
$$= 4$$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں $x = 1$ کے لیے $p(x)$ کی قدر 4 ہے۔

اسی طرح $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$
$$= -2$$

کیا آپ $P(-1)$ معلوم کرسکتے ہیں؟

مثال 2: متغیر کی نشاندہی کی گئی قدروں کے لیے مندرجہ ذیل ہر ایک کثیر رکنی کی قدر معلوم کیجیے:

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$، $x = 1$ کے لیے

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$، $y = 2$ کے لیے

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$، $t = a$ کے لیے

حل: (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ کے لیے $p(x)$ کی قدر ہے

$$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$$

$$= 5 - 3 + 7 = 9$$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ کے لیے کثیر رکنی $q(y)$ کی قدر ہے

$$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ کے لیے $p(t)$ کی قدر ہے

$$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$$

اب کثیر رکنی $P(x) = x-1$ پر غور کیجیے

$p(1)$ کیا ہے؟

نوٹ کیجیے: $P(1) = 1-1 = 0$ جیسے کہ $P(1) = 0$

اس لیے ہم کہتے ہیں کہ 1، کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر ہے۔

اسی طرح سے آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ 2، $q(x)$ کا صفر ہے جہاں $q(x) = x-2$

عمومی طور پر ہم کہتے ہیں کہ عدد c کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر ہے اگر $p(c) = 0$

آپ نے مشاہدہ کیا ہوگا کہ کثیر رکن $x-1$ کا صفر اس کو 0 کے برابر رکھ کر حاصل ہوتا ہے یعنی $x-1=0$ جس سے ہمیں $x = 1$ ملتا ہے۔ ہم کہتے ہیں $p(x) = 0$ ایک کثیر رکنی مساوات ہے اور 1 مساوات $p(x) = 0$ کا جزر ہے۔ اس لیے ہم کہتے ہیں کہ 1، $x-1$ کا صفر ہے یا کثیر رکنی مساوات $x-1= 0$ کا جزر۔

اب، مستقلہ کثیر رکنی 5 پر غور کیجیے۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ اس کا صفر کیا ہے؟ اس کا کوئی صفر نہیں ہے کیونکہ $5x^0$ میں x کو کسی بھی عدد سے بدلنے پر ہمیں 5 ہی ملتا ہے۔ درحقیقت ایک غیر صفر مستقلہ کثیر رکنی کا کوئی صفر نہیں ہوتا۔ ایک صفر کثیر رکنی کے صفر کے بارے میں کیا خیال ہے؟ رواج ہے کہ ہر ایک حقیقی عدد ایک صفر کثیر رکنی کا صفر ہے۔

مثال 3: جانچ کیجیے کہ 2– اور 2، کثیر رکنی $x+2$ کے صفر ہیں

حل: مان لیجیے $p(x)=x+2$

تب: $p(2)=2+2=4, p(-2)=-2+2=0$

اس لیے 2– کثیر رکنی $x+2$ کا صفر ہے لیکن 2 نہیں ہے۔

مثال 4: کثیر رکنی $p(x) = 2x+1$ کا صفر معلوم کیجیے۔

حل: $p(x)$ کا صفر معلوم کرنا ایسا ہی ہے جیسے مساوات $p(x)=0$ کو حل کرنا۔

اب $2x+1=0$ سے ہمیں $x=-\frac{1}{2}$ ملتا ہے۔ اس لیے $-\frac{1}{2}$ کثیر رکنی $2x+1$ کا صفر ہے۔

اب اگر $p(x)=ax+b, a \neq 0$ ایک خطی کثیر رکنی ہے تو آپ اس کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر کیسے معلوم کریں گے؟

مثال 4 سے ہم نے کچھ سیکھا ہے یعنی کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر معلوم کرنا ایسا ہی ہے جیسے مساوات $p(x=0)$ کو حل کرنا۔

اس لیے $p(x)=0$ کا مطلب ہے۔ $ax+b=0, a \neq 0$

اس لیے $ax = -b$

یعنی $x = -\frac{b}{a}$

اس لیے $x = -\frac{b}{a}$, $p(x)$ کا واحد صفر ہے یعنی خطی کثیر رکنی کا ایک اور صرف ایک صفر ہوتا ہے۔ اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ 1، کثیر رکنی $x-1$ اور 2–، $x+2$ کے صفر ہیں۔

مثال5: تصدیق کیجیے کہ 2 اور 0 کثیر رکنی $x^2 - 2x$ کے صفر ہیں

حل: مان لیجیے $p(x) - x^2 - 2x$

تب $p(2) - 2^2 - 4 - 4 - 4 - 0$

اور $p(0) - 0^2 - 0 - 0$

اس لیے 2 اور 0 دونوں کثیر رکنی $x^2 - 2x$ کے صفر ہیں۔

آیئے اب اپنے مشاہدات کی فہرست بناتے ہیں:

(i) کسی کثیر رکنی کا صفر ضروری نہیں کہ صفر ہو۔

(ii) کسی کثیر رکنی کا صفر، صفر بھی ہوسکتا ہے۔

(iii) ہر خطّی کثیر رکنی کا ایک اور صرف ایک صفر ہوتا ہے۔

(iv) ایک کثیر رکنی کے ایک سے زیادہ صفر بھی ہو سکتے ہیں۔

مشق 2.2

1. مندرجہ ذیل کے لیے کثیر رکنی $5x - 4x^2 + 3$ کی قدر معلوم کیجیے:

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. مندرجہ ذیل ہر ایک کثیر رکنی کے لیے $P(0)$، $p(1)$ اور $P(2)$ معلوم کیجیے:

(i) $p(y) - y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) - 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) - x^3$ (iv) $p(x) = (x-1)(x+1)$

3۔ معلوم کیجیے کہ کیا مندرجہ ذیل کثیر رکنی کے سامنے لکھے ہوئے اعداد، کثیر رکنی کے صفر ہیں:

(i) $p(x) = 3x + 1, x = -\frac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi, x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) - x^2 - 1, x - 1, -1$ (iv) $p(x) = (x+1)(x-2), x = -1, 2$

(v) $p(x)=x^2, x=0$ (vi) $p(x)=lx+m, x=-\frac{m}{l}$

(vii) $p(x)=3x^2-1, x=-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}$ (viii) $p(x)=2x+1, x=\frac{1}{2}$

4۔مندرجہ ذیل میں ہر ایک کثیر رکنی کا صفر معلوم کیجیے:

(i) $p(x)=x+5$ (ii) $p(x)=x-5$ (iii) $p(x)=2x+5$

(iv) $p(x)=3x-2$ (v) $p(x)=3x$ (vi) $p(x)=ax, a\neq 0$

(vii) $p(x)=cx+d, c\neq 0$ جہاں c اور d حقیقی اعداد میں۔

2.4 باقی مسئلہ (Remainder Theorem)

آیئے دو اعداد 15 اور 6 پر غور کرتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ جب ہم 15 کو 6 سے تقسیم کرتے ہیں تو ہمیں خارج قسمت 2 اور باقی 3 حاصل ہوتا ہے۔ کیا آپ کو یاد ہے کہ ہم اس حقیقت کا اظہار کس طرح کرتے ہیں؟ ہم 15 کو اس طرح لکھتے ہیں۔

$$15=(6\times 2)+3$$

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ باقی 3 قاسم 6 سے چھوٹا ہے۔ اسی طرح سے اگر ہم 12 کو 6 سے تقسیم کریں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$12=(6\times 2)+0$$

یہاں باقی کیا ہے؟ یہاں باقی 0 ہے اور ہم کہتے ہیں کہ 6، 12 کا جز وضربی ہے یا 6,12 کا ضعف ہے۔

اب سوال یہ ہے کہ کیا ہم ایک کثیر رکنی کو دوسری کثیر رکنی سے تقسیم کر سکتے ہیں؟ شروع میں آیئے ہم کوشش کرتے ہیں جب کہ قاسم یک رکنی ہے تو اب کثیر رکنی $2x^3+x^2+x$ کو ایک رکنی x سے تقسیم کیجیے۔

ہمارے پاس ہے:

$$(2x^3+x^2+x)\div x=\frac{2x^3}{x}+\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}$$

$$= 2x^3 + x + 1$$

درحقیقت آپ نے نوٹ کیا ہوگا کہ $2x^3 + x^2 + x$ کے ہر رکن میں x مشترک ہے ۔اس لیے ہم $2x^3 + x^2 + x$ کو $x(2x^2 + x + 1)$ لکھ سکتے ہیں۔

ہم کہتے ہیں کہ xاور $2x^2 + x + 1$، $2x^3 + x^2 + x$ کے اجزائے ضربی ہیں اور $2x^3 + x^2 + x$، xاور $2x^2 + x + 1$ کا ضعف ہے۔

ایک دوسرے کثیررکنی کے جوڑے $3x^2 + x + 1$ اور x پرغور کیجیے۔

یہاں $(3x^2 + x + 1) \div x = (3x^2 \div x) + (x \div x) + (1 \div x)$

ہم دیکھتے ہیں کثیررکنی کا ایک رکن حاصل کرنے کے لیے ہم 1 کو x سے تقسیم نہیں کرسکتے۔ایسی حالت میں ہم یہیں رک جاتے ہیں اور یہ نوٹ کرتے ہیں کہ 1 باقی بچ جاتا ہے۔اس لیے ہمارے پاس ہے

$$3x^2 + x + 1 = \{(3x + 1) \times x\} + 1$$

اس حالت میں 3x+1 خارج قسمت ہے اور 1 باقی ہے۔کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ x، $3x^2 + x + 1$ کا جزوضربی ہے؟ کیونکہ باقی صفرنہیں ہےاس لیے یہ جزوضربی نہیں ہے۔

آیئے اب ہم ایک کثیررکنی کوکسی کثیررکنی سے تقسیم کریں۔

مثال 6: p(x) کو g(x) سے تقسیم کیجیے جہاں $p(x) = x + 3x^2 - 1$ اور $g(x) = 1 + x$ ہے

حل: ہم تقسیم کے عمل کومندرجہ ذیل اقدام سے کرتے ہیں۔

قدم 1: ہم مقسوم $x + 3x^2 - 1$ اور قاسم $1 + x$ کو معیاری شکل میں لکھتے ہیں یعنی اس کے ارکان کو ان کے درجہ کے حساب سے گھٹتی ہوئی ترتیب میں لکھتے ہیں۔اس لیے مقسوم $3x^2 + x - 1$ اور قاسم $x + 1$ ہے۔

قدم 2: ہم مقسوم کے پہلے رکن کو قاسم کے پہلے رکن سے پہلا خارج قمت $\frac{3x^2}{x} = 3x$ تقسیم کرتے ہیں یعنی ہم $3x^2$ کو x سے تقسیم کرکے $3x$ حاصل کرتے ہیں۔اس سے ہمیں خارج قسمت کا پہلا رکن ملتا ہے۔

قدم 3: ہم قاسم کوخارج قسمت کے پہلے رکن سے ضرب کرتے ہیں یعنی ہم x+1 کو 3x سے ضرب کرتے ہیں اور حاصل ضرب کو مقسوم کے رکن $3x^2 + 3x$ میں سے گھٹاتے ہیں ایسا کرنے سے ہمیں $-2x - 1$ باقی کے طور پر ملتا ہے۔

قدم4: ہم باقی $-2x-1$ کو نئے مقسوم کی حیثیت سے لیتے ہیں قاسم وہی رہتا ہے۔ ہم قدم2 کو دہراتے ہیں جس سے ہمیں خارج قسمت کا اگلا رکن حاصل ہوتا ہے یعنی ہم نئے مقسوم کے پہلے رکن $-2x$ کو قاسم کے پہلے رکن x سے تقسیم کرکے -2 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l} & \quad 3x \\ (x+1) & 3x^2+x-1 \\ & 3x^2+3x \\ & - \; - \\ \hline & -2x-1 \end{array}$$

اس طرح سے خارج قسمت میں دوسرا رکن -2 ہے

قدم5: ہم قاسم کو خارج قسمت کے دوسرے رکن سے ضرب کرتے ہیں اور حاصل ضرب کو مقسوم میں سے گھٹاتے ہیں یعنی ہم $x+1$ کو -2 سے ضرب کرتے ہیں اور حاصل ضرب $-2x-2$ کو مقسوم $-2x-1$ میں سے گھٹاتے نیا خارج قسمت $3x-2$ ہیں جس سے ہمیں باقی 1 ملتا ہے۔

$$\begin{array}{r|l} (x+1)(-2) & -2x-1 \\ --2x-2 & -2x-2 \\ & - \quad + \\ \hline & \quad +1 \end{array}$$

یہ عمل جب تک جاری رہتا ہے جب تک مقسوم صفر بن جاتا ہے اور خارج قسمت کے ارکان کا حاصل جمع ہمیں مکمل خارج قسمت دیتا ہے۔

قدم6: اس طرح سے مکمل خارج قسمت 3x-2 اور باقی 1 ہے۔ اب ہم دیکھتے ہیں ہم نے مذکورہ بالا عمل یکجا طور پر کیسے کیا۔

$$\begin{array}{r|l} & \quad 3x-2 \\ x+1 & 3x^2+x-1 \\ & 3x^2+3x \\ & - \; - \\ \hline & -2x-1 \\ & -2x-2 \\ & + \; + \\ \hline & 1 \\ & 1 \end{array}$$

نوٹ کیجیے کہ $3x^2+x-1=(x+1)(3x-2)+1$

مقسوم=(خارج قسمت×قاسم)+باقی

عمومی طور پر اگر $p(x)$ اور $g(x)$ دو ایسی کثیر رکنیاں ہیں جن میں $p(x)$ کا درجہ $g(x)$ کے درجہ کے برابر یا بڑا ہے یعنی $q(x)$ کا درجہ $p(x)$ کا درجہ تب ہم کثیر رکنیاں $q(x)$ اور $r(x)$ معلوم کر سکتے ہیں جب کہ $p(x)=g(x).q(x)+r(x)$ جہاں $r(x)=0$ یا $r(x)$ کا درجہ $g(x)$ کا درجہ یہاں ہم کہتے ہیں کہ $p(x)$ کو $g(x)$ سے تقسیم کیا گیا جس سے ہمیں $q(x)$ خارج قسمت کے طور پر اور $r(x)$ باقی کے طور پر مسلا اور دی گئی مثال میں قاسم ایک خطی کثیر رکنی ہے ایسی حالت میں آئے دیکھتے ہیں کہ باقی اور مقسوم کی کچھ قدروں میں 5 کوئی تعلق ہے۔

اگر $p(x) - 3x^2 + x - 1$ میں ہم x کی جگہ 1- رکھیں تو ہمیں ملتا ہے۔

$$p(-1) - 3(-1)^2 + (-1) - 1 - 1$$

اس طرح سے $p(x) - 3x^2 + x - 1$ کو $x+1$ سے تقسیم کرنے سے جو باقی ملتا ہے وہ وہی ہے قدر ہے جو کثیر رکنی $x+1$ کے صفر یعنی $x = -1$ کو $p(x)$ میں رکھنے کی وجہ سے حاصل ہوتی ہے۔

اس لیے کچھ اور مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 7: کثیر رکنی $3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ کو $x - 1$ سے تقسیم کیجیے

حل: لمبی تقسیم کے طریقہ سے ہمیں ملتا ہے:

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 - x^2 - x - 4 \\ \hline
-1 & 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1 \\
 & \underline{{}_{-}3x^4 \pm 3x^3} \\
 & -x^3 - 3x - 1 \\
 & \underline{{}_{+}x^3 \pm x^2} \\
 & -x^2 - 3x - 1 \\
 & \underline{{}_{\pm}x^2 \mp x} \\
 & -4x - 1 \\
 & \mp 4x \mp 4 \\
 & -5
\end{array}$$

یہاں باقی 5− ہے اب $x - 1$ کا صفر ہے اس لیے $p(x)$ میں $x = 1$ رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$p(1) = 3(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1$$
$$= 3 - 4 - 3 - 1$$
$$= -5$$

جو کہ باقی ہے؟

مثال 8: $p(x) - x^3 + 1$ کو $x + 1$ سے تقسیم کرنے سے حاصل باقی معلوم کیجیے

حل: لمبی تقسیم کے طریقہ سے

$$x^2 - 11+$$
$$x + 1 \overline{)\; x^3 + 1}$$
$$\underline{{}_{-}x^3 + {}_{-}x^2}$$
$$-x^2 \qquad +1$$
$$\underline{{}_{-}x^2 \; {}_{-}x}$$
$$x + 1$$
$$\underline{{}_{-}x \; {}_{-}1}$$
$$0$$

اس طرح ہم پاتے ہیں کہ باقی 0 ہے۔؟

یہاں $p(x) - x^3 + 1$ ہے اور $x - 1$ کا صفر $x = -1$ ہے؟ میں x کی جگہ 1– رکھنے پر ہمیں دیکھتے ہیں کہ

$$p(-1) = (-1)^3 + 1$$
$$= -1 + 1$$
$$= 0$$

جو وہی ہے جو اصل تقسیم کے طریقہ سے حاصل ہو رہے اس طرح سے ہم کو ایک کثیر رکنی کو ایک خطی کثیر رکنی سے تقسیم کے لیے بقیہ باقی معلوم کرنے 0 ہی حاصل ہوتا ہے کا ایک دلچسپ اور بہت آسان طریقہ معلوم ہوا۔ اب ہم اس حقیقت کا تقسیم مندرجہ مسئلہ کی شکل میں کرتے ہیں ہم مسئلہ کا ثبوت دیکر یہ بھی دیکھائیں گے کہ یہ مسئلہ کیوں درست ہے۔

باقی مسئلہ بیان کیجیے۔ $p(x)$ ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ 1 یا 1 سے زیادہ اور a کوئی حقیقی عدد ہے اگر $p(x)$ کو خطی کثیر رکنی

x–a سے تقسیم کیا جائے تو باقی؟

ثبوت: مان لیجیے $x-a$ ایک ایسی کثیر رکنی ہے جس کا درجہ $p(x) \geq 1$ فرض کیجیے کہ جب $p(x)$ کو $x-1$ سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت $q(x)$ اور باقی $r(x)$ ہے یعنی

$$p(x) = (x-a)\ q(x) + r(x)$$

کیونکہ $x-a$ کا درجہ 1 ہے اور $r(x)$ کا درجہ $x-a$ کا درجہ سے کم ہے کیونکہ $r(a)$ کا درجہ $\mathrm{r(x)} = 0$ اس کا مطلب ہے؟ ایک مستقلہ لیے مان لیجیے۔ اس طرح سے x کی ہر قدر کے لیے $x, r(x) = r$

اس لیے $p(x) = (x-a)\ q(x) + r$

خصوصی طور پر اگر $x = a$ تو یہ مساوات ہم کو دیتی ہے

$$\begin{aligned} p(a) &= (a-a)q(a) + r \\ &= r \end{aligned}$$

جس سے یہ مسئلہ ثابت ہوتا ہے

اس لیے اس نتیجہ کو ہم دوسری مثال میں استعمال کرتے ہیں

مثال 9: $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ کو $x-1$ سے تقسیم کرنے پر حاصل باقی معلوم کیجیے

حل: یہاں $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ اور $x-1$ کا صفر 1 ہے

اس لیے $p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1$

$$= 2$$

اس لیے جب $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ کو $x-1$ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو 2 باقی بچتا ہے۔

مثال 10: جانچ کیجیے کہ کثیر رکنی $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$ کا $2t+1$ ضعف ہے یا نہیں

حل: جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ $q(t)$ کا ضعف ہوگا اگر $2t+1$ کو $q(t)$ سے تقسیم کرنے پر باقی صفر حاصل ہو اب $2t+1=0$ لیتے ہیں جس سے ہمیں $t = -\frac{1}{2}$ ملتا ہے۔

$$q\left(-\frac{1}{2}\right)=4\left(-\frac{1}{2}\right)^3+4\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)-1$$

مزید

$$=-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-1$$

اس طرح سے $q(t)$ کو $2t-1$ سے تقسیم کرنے پر باقی 0 آتا ہے۔

اس لیے $2t-1$ کثیر رکنی $q(t)$ کا جز وضربی ہے یعنی $q(t)$ کا ضعف ہے

مشق 2.3

1. باقی معلوم کیجیے اگر x^3+3x^2+3x+1 کو مندرجہ ذیل سے تقسیم کیا جائے

(i) $x+1$ (ii) $x-\frac{1}{2}$ (iii) x (iv) $x+\pi$

(v) $5+2x$

2. باقی معلوم کیجیے جب x^3-ax^2+6x-a کو $x-a$ سے تقسیم کیا جائے

3. جانچ کیجیے کہ آیا $7x+3x$ کا $3x^3+7x$ جز وضربی ہے یا نہیں

2.5 کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی (Factorisation of Polynomials)

اس لیے مذکورہ بالا مثال 10 کو غور سے دیکھیے اس سے ہمیں $q\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ ، $2t-1$ ، $q(t)$ پتہ چلتا ہے کہ باقی یعنی

$$q(t)=(2t+1)g(t)$$

کسی کثیر رکنی $g(t)$ کے لیے یہ مندرجہ مسئلہ کی ایک مخصوص حالت ہے۔

جز وضربی مسئلہ: اگر $p(x)$ ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ $n\geq 1$ اور a کو حقیقی عدد ہے تب

(i) $x-a$ ، $p(x)$ کا جز وضربی ہے اگر $p(a)=0$ اور

(ii) اگر $p(a)=0$ ، $x-a$ ، $p(x)$ کا جز وضربی ہے۔

حل: کثیر رکنی کے ذریعے، $p(x)=(x-a)q(x)+p(a)$

(i) اگر $p(a)=0$ تب $p(x)=(x-a)q(x)$ جو ظاہر کرتا ہے کہ $x-a$ ایک رکن ہے $p(x)$ کا۔

(ii) جب کہ $x-a$ ایک رکن ہے $p(x)$ ، $p(x)=(x-a)q(x)$ جو کثیر رکنی اجزائے ضربی $g(x)$ کا۔ اس معاملے میں $p(a)=(a-a)q(x)=$

مثال 11: جانچ کیجیے کہ $x+2$ ، x^3+3x^2+5x+6 اور $2x+4$ کا جز وضربی ہے یا نہیں۔

حل: $x+2$ کا صفر -2 ہے مان لیجیے $p(x) - x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ اور $s(x) = 2x + 4$

تب $p(\ 2) = (\ 2)^3 \mid 3(\ 2)^2 \mid 5(\ 2) \mid 6$

$$= -8 + 12 - 10 + 6$$

$$= 0$$

اس طرح سے جزو ضربی کے مسئلہ کے مطابق $x+2$، $x^3 + 3x^2 + 5x - 6$ کا جزو ضربی ہے۔

دوبارہ $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

اس طرح سے $x+2$، $2x+4$ کا بھی جزو ضربی ہے درحقیقت اس کی جانچ ہم جزو ضربی کے مسئلہ کا استعمال کیے بغیر بھی کر سکتے ہیں کیونکہ $2x+4=2(x+2)$

مثال 12: k کی قیمت معلوم کیجیے اگر x-1، $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ کا جزو ضربی ہے۔

حل: کیونکہ x–1 جزو ضربی ہے $p(x) - 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ کا

$$p(1) = 0$$

اب $p(1) - 4(1)^3 + 3()1)^2 - 4(1) + k$

اس لیے $4+3-4+k = 0$

یعنی $k = -3$

اب دو درجی کثیر رکنی جیسے $x^2 - lx + m$ کے اجزائے ضربی بنانے سے پہلی ہی واقف ہیں آپ نے اس کے وسطی رکن lx کو $(ax + bx)$ کے طور پر منقسم کیا تھا جب کہ $ab = m$ تب $x^2 + lx + m - (x+a)(x+b)$ اب ہم دو درجی کثیر رکنی جہاں $a \neq 0$، a، b اور c مستقل ہوں کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوشش کریں گے کثیر رکنی $ax^2 + bn + c$ کے وسطی رکن کو منقسم کر کے اجزائے ضربی بنانے کا عمل مندرجہ ذیل ہے۔

مان لیجیے اسی اجزائے ضربی میں $(px+q)(rx+s)$ تب

$$ax^2 + bx + c - (px+q)(rx-s) - prx^2 + (ps+qr)x + qs$$

x^2 کے ضربیوں کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $a=pr$

اسی طرح سے x کھلے ضربیوں کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $b=ps+qr$ اور مستقلہ ارکان کا موازنہ کرنے پر

ہمیں حاصل ہوتا ہے $c=qr$ اس سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ b دو اعداد ps اور qr کا حاصل جمع ہے جس کا حاصل ضرب

$$(ps)(qr)=(pr)(qs)=ac$$

اس لیے ax^2+bx+c کے اجزائے ضربی بنانے کے لیے ہم b سے دو اعداد کے حاصل جمع کے طور پر لکھتے ہیں جن کا حاصل ضرب ac ہو مندرجہ ذیل مثال سے اس کی مزید وضاحت ہو جائے گی۔

مثال 13: $6x^2+17x+5$ کے وسطی رکن کو منقسم کرکے اجزائے ضربی بنائیے۔

حل 1: ہم دو اعداد p اور q ایسے تلاش کرتے ہیں جب کہ $pq=6\times5=30$ تب ہمیں اجزائے ضربی حاصل ہو جائیں گے اس لیے 30 کے اجزائے ضربی کے کچھ جوڑو پر غور کیجیے۔ کچھ ہیں 1 اور 30، 2 اور 15، 3 اور 10، 5 اور 6

ان تمام جوڑوں میں ہمیں 2 اور 15 سے $p+q=17$ ملتا ہے۔

اس لیے $$6x^2+17x+5-6x^2+(2+15)x+5$$
$$=6x^2+2x-15x+5$$
$$=2x(3x+1)+5(3x+1)$$
$$=(3x+1)(2x+5)$$

حل 1: ہم اس کے اجزائے ضربی، جز وضربی کے مسئلہ کو استعمال کرکے بھی بنا سکتے ہیں جو مندرجہ ذیل ہے (مان لیجیے):

$$6x^2+17x-5=6\left\{x^2+\frac{17}{6}x+\frac{5}{6}\right\}=6p(x)$$

اگر a اور b، $p(x)$ کے صفر ہیں تب $6x^2+17x+5-6(x-a)(x-b)$

اس لیے $ab=\frac{5}{6}$ آیے $\frac{5}{6}$ کے کچھ اجزائے ضربی پر نظر ڈالتے ہیں یہ ہو سکتے ہیں $\pm\frac{1}{2},\frac{1}{3},\pm\frac{5}{3},\pm\frac{5}{2},\pm1$

اب $p\left\{\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{4}+\frac{17}{6}\left\{\frac{1}{2}\right\}+\frac{5}{6}\neq0$ لیکن $p\left\{\frac{-1}{3}\right\}=0$ اس لیے $\left\{x+\frac{1}{3}\right\}$، $p(x)$ کا جز وضربی ہے

اسی طرح سے آپ کوشش کرکے معلوم کر سکتے ہیں کہ $x+\frac{5}{2}$ بھی $p(x)$ کا جز وضربی ہے۔

اس لیے $6x^2+17x+5=6\left\{x+\frac{1}{3}\right\}\left\{x+\frac{5}{2}\right\}$

$$=6\left\{\frac{3x+1}{3}\right\}\left\{\frac{2x+5}{2}\right\}$$

$$=(3x+1)(2x+5)$$

اس مثال کے لیے وسطی رکن کی منقسم کرنے کا طریقہ زیادہ موضوع ہے۔اس لیے اب دوسری مثال پر غور کرتے ہیں ہم جزوضربی کے مسئلہ کو استعمال کر کے اس کے اجزائے ضربی بناتے ہیں جو درج ذیل ہیں۔

مثال 14: جزوضربی کے مسئلہ کو استعمال کر کے y^2-5y+6 کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے $p(y)=y^2-5y+6$ اب اگر $p(y)=(y-a)(y-b)$ تو آپ جانتے ہیں کہ مسئلہ رکن ہوگا اس لیے ab=6۔اس لیے p(y) کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے ہم 6 اجزائے ضربی پر غور کرتے ہیں۔

6 کے اجزائے ضربی ہیں 1, 2 اور 3

اب $p(2)=2^2-(5\times 2)+6=0$

اس لیے $y-2$ کا جزوضربی ہے p(y)

مزید $p(3)=3^2-(5\times 3)+6=0$

اس طرح سے $y-3$ بھی y^2-5y+6

اس لیے $y^2-5y+6=(y-2)(y-3)$

نوٹ کیجیے کہ y^2-5y+6 کو وسطی نقطہ 5y– کو منقسم کر کے بھی اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

اس لیے اب کعب کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے پر غور کرتے ہیں۔یہاں وسطی رکن کو منقسم کرنے کا طریقہ موضوع نہیں ہے۔پہلے ہم کم سے کم ایک جزوضربی معلوم کرنا ہوگا جیسا اب مندرجہ ذیل مثال میں دیکھیں گے۔

مثال 15: $x^3-23x^2+142x-120$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے $p(x)=x^3-23x^2+142x-120$

اب ہم 120– کے تمام اجزائے ضربی پر غور کرتے ہیں یہ ہیں

$= 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 60.$

کوشش کرنے سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ $p(1)=0$ اس لیے $(x-1)$، $p(x)$ کا ایک جزوضربی ہے اب ہم دیکھتے ہیں کہ:

$$x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$$

$$(\text{کیوں؟}) - (x-1)x^2 - 22x(x-1) + 120(x-1)$$

$$[\text{comman}(x-1) \text{ لینے پر}] - (x-1)x^2 - 22(x+120)$$

یہ اجزائے ضربی ہم $p(x)$ کو $(x-1)$ سے تقسیم کرکے بھی حاصل کرسکتے ہیں۔

اب $x^2 - 22x + 120$ کو ہم وسطی رکن کو منقسم کرکے بھی اجزائے ضربی میں تحلیل کرسکتے ہیں اور جزوضربی کے مسئلہ کو استعمال کرکے بھی وسطی رکن کو منقسم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$$
$$= x(x-12) - 10(x-12)$$
$$= (x-12)(x-10)$$

اس لیے $x^3 - 23x^2 - 142x - 120 - (x-1)(x-10)(x-12)$

مشق 2.4

1. مندرجہ ذیل کونسی کثیر رکنیوں کا جزوضربی $x+1$ ہے:

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 + x^2 - (2+\sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. جزوضربی کے مسئلہ کو استعمال کرکے بتائے کہ مندرجہ ذیل ہر ایک کے لیے $g(x)$، $p(x)$ کا جزوضربی ہے یا نہیں۔

(i) $p(x) - 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) - x + 1$

(ii) $p(x) - x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) - x + 2$

(iii) $p(x) - x^3 + 4x^2 + x + 6,, g(x) - x + 3$

3. اگر $x-1$، $p(x)$ کا جزو ضربی ہے تو مندرجہ ذیل پر ایک کے لیے k کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $p(x) - x^2 + x + k$ (ii) $2x^3 + kx - \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2x} + 1$ (iv) $kx^2 - 3x + k$

4. اجزائے ضربی معلوم کیجیے:

(i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. اجزائے ضربی معلوم کیجیے:

(i) $x^3 - 2x^2 - x - 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 - 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

2.6 الجبری تماثلات (Algebraic Identities):

پچھلی جماعتوں میں آپ نے پڑھا ہے کہ الجبری تماثل ایک ایسی الجبری مساوات ہوتی ہے جو اس میں موجود متغیر جن کی تمام قدروں کے لیے درست ہوتی ہے آپ مندرجہ ذیل الجبری تماثلات کے بارے میں پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔

تماثل I: $(x+y)^2 - x^2 + 2xy + y^2$

تماثل II: $(x-y)^2 - x^2 - 2xy + y^2$

تماثل III: $x^2 - y^2 - (x+y)(x-y)$

تماثل IV: $(x+a)(x+b) - x^2 + (a+b)x + ab$

آپ نے ان تمام تماثلات کا استعمال الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے کیا ہوگا اس کی افادیت آپ تجسیب میں بھی دیکھ سکتے ہیں۔

مثال 16: مناسب تماثلات کا استعمال کر کے مندرجہ ذیل حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $(x+3)(x+3)$ (ii) $(x-3)(x-5)$

حل: (i) یہاں ہم تماثل 1 کا استعمال کرتے ہیں: $(x+y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ اس میں $y = 3$ رکھنے پر ہمیں حاصل

ہوتا ہے اگر $x-1$، $p(x)$ کا جزو ضربی ہے تو مندرجہ ذیل پر ایک کے لیے k کی قیمت معلوم کیجیے۔

$$(x+3)(x+3) - (x+3)^2 - x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$$

$$= x^2 + 6x + 9$$

(ii) تماثل IV کا استعمال کرنے پر $(x+a)(x+b) - x^2 + (a+b)x + ab$ ہمیں ملتا ہے:

$$(x-3)(x+5) - x^2 + (-3+5)x + (-3)(5)$$

$$= x^2 + 2x - 15$$

مثال 17: سیدھی ضرب کیے بغیر 105×106 کی قدر معلوم کیجیے

حل: $105 \times 106 = (100+5) \times (100+6)$

تماثل iv استعمال کرنے پر $- (100)^2 + (5+6)(100) + (5 \times 6)$

$$= 1000 + 1100 + 30$$

آپ کچھ دی ہوئی عبارتوں کا حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے مذکورہ بالا تماثلات کا استعمال دیکھ چکے ہیں ان تماثلات کا استعمال ہم الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے بھی کرتے ہیں جیسا کہ مندرجہ ذیل مثالوں میں کیا گیا ہے۔

مثال 18: اجزائے ضربی معلوم کیجیے:

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

حل: (i) یہاں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ: $49a^2 - (7a)^2, 25b^2 - (5b)^2, 70ab - 2(7a)(5b)$

اس عبارت کا موازنہ $x^2 + 2xy + y^2$ سے کرنے پر ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ x=7a اور y=5b اس طرح سے تماثل I کا استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a+5b)^2 = (7a+5b)(7a+5b)$$

(ii) ہمارے پاس ہے $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

اب اس کو تماثل III سے موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$=\left\{\frac{5}{2}x+\frac{y}{3}\right\}\left\{\frac{5}{2}x-\frac{y}{3}\right\}$$

اس طرح سے ہماری تمام تر تماثلات دو رکنیوں کے حاصل ضرب پر مشتمل ہیں آیئے اب ہم تماثل I کی توسیع سہ رکنی $x+y+z$ تک کرتے ہم $(x+y+z)^2$ کی تحسیب تماثل I کے استعمال سے کرتے ہیں۔

مان لیجیے $x+y=t$ تب $(x+y-z)^2-(t+z)^2$

تماثل 1 کے استعمال کرنے پر $=t^2+2tz+t^2$

کی قیمت رکھنے پر $-(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$

(تماثل 1 کے استعمال کرنے پر) $-x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2$

(ارکان کو ترتیب میں رکھنے پر) $-x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل تماثل حاصل ہوتی ہے:

تماثل V : $\mathbf{(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}$

ریمارک: ہم R.H.S. عبارت کو L.H.S. عبارت کی پھیلی ہوئی شکل کہتے ہیں۔ نوٹ کیجیے کہ عبارت $(x+y+z)^2$ تین مربع ارکان اور تین حاصل ضرب ارکان میں:

مثال 19: $(3a+4b+z)^2$ کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھیے۔

حل: دی ہوئی عبارت کا موازنہ $(x+y+z)^2$ سے کرتے ہیں ہمیں ملتا ہے کہ $x=3a, y=3b$ اور $z=5c$

اس لیے تماثل کا استعمال کرنے پر ہمارے پاس ہے

$$(3a+4b+5c)^2=(3a)^2+(4b)^2+(5c)^2+2(3a)(4b)+2(4b)(5c)+2(5c)(3a)$$
$$=9a^2+16b^2 25c^2+24ab+40bc+30ac$$

مثال 20: $(4a-2b-3x)^2$ کو پھیلا کر لکھیے:

حل: تماثل V کا استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے:

$$(4a-2b-3x)^2-[4a+(-2b)+(-3c)]^2$$
$$-(4a^2+(-2b)^2+(-3c)^2-2(4a)(-2b)(-3c)+2(-3c(4a)$$

$$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$$

مثال 21: $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: ہمارے پاس ہے:

$$= 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz = (2x)^2 + (-y)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(2x)(z)$$

$$= (2x - (-y) + z)^2$$ (تماثل V کو استعمال کرنے پر)

$$= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)(2x - y + z)$$

اب تک ہمارا واسطہ ان تماثل سے پڑا ہے جن کا درجہ 2 ہے اب ہم اپنی تماثل 1 کی توسیع $(x+y)^3$ کی تحسیب کرنے کے لیے کرتے ہیں ہمارے پاس ہے:

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2$$

$$= (x+y)(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy - y^2)$$

$$= x^3 + 2x^2y - xy^2 + x^2y + 2xy + y^3$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل تماثل حاصل ہوتی ہے:

تماثل VI: $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$

مزید اگر تماثل vi میں y کی جگہ $-y$ کو دیں تو ہمیں تماثل vi حاصل ہوتی ہے)

تماثل VII: $(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$

$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

مثال 22: مندرجہ ذیل مکعبوں کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھیے:

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

حل: دی ہوئی عبارت کا موازنہ $(x+y)^3$ کرنے پر ہمیں ملتا ہے:

اور $x = 3a$ ، $y = 4b$

اس طرح سے تماثل VI کو استعمال کرنے سے ہمیں ملتا ہے:

$$(3a+4b)^3 - (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a+4b)$$

$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$$

(ii) دی ہوئی عبارت کا موازنہ $(x-y)^3$ سے کرنے پر ہم پاتے ہیں:

$$x = 5p, y = 3q$$

تماثل VII کا استعمال کرنے سے ہمیں ملتا ہے:

$$(5p-3q)^3 - (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p-3q)$$

$$-125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

مثال 23: مناسب تماثلات کا استعمال کرتے ہیں مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجیے:

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

حل: ہمارے پاس ہے:

$$(104)^3 - (100+4)^3$$

$$- (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100+4)$$ (تماثل VI کو استعمال کرنے پر)

$$= 100000 + 64 + 124800$$

$$= 1124864$$

(ii) ہمارے پاس ہے:

$$(999)^3 - (1000-1)^3$$

$$- (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000-1)$$ تماثل vii کا استعمال کرنے پر

$$= 1000000000 - 1 - 2997000$$

$$= 997002999$$

مثال 24: $8x^3+27y^3-36x^2y+54xy^2$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے:

حل: دی ہوئی عبارت کو ہم لکھ سکتے ہیں:

$$(2x)^3+(3y)^3+3(4x^2)(3y)+3(2x)(9y)^2$$

$$=(2x)^3+(3y)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y^2)$$

$(2x+3y)^3$ (تماثل vi کا استعمال کرنے پر)

$$=(2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)$$

اب $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ پر غور کیجیے

پھیلانے پر اس حاصل ضرب سے ہمیں ملتا ہے

$$x(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+y(x^2+y^2-z^2-xy-yz-zx)-z(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$=x^3+xy^2+xz^2-x^2y-xyz-zx^2+x^2y+y^3-yz^2-xy^2-y^2z+x^2z+y^2z-z^3-xyz^2-yz-xz^2$$

مختصر کرنے پر $=x^3+y^3+z^3-3xyz$

اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل تماثل حاصل ہوتی ہے

تماثل viii $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

مثال 25: $8x^3+y^3+27z^3-18xyz$ کے اجزائے ضربی بنائیے۔

حل: یہاں ہمارے پاس ہے

$$=(2x)^3+y^3+(3z)^3-3(2x)(y)(3z)$$

$$=(2x+y+3z)[(2x)^2+y^2+(3z)^2-(2x)(y)-(y)(3z)-(2x)(3z)]$$

$$=(2x+y+3z)(4x^2+y^2+9z^2-2xy-3yz-6xz)$$

مشق 2.5

1. مناسب تماثلات کا استعمال کر کے مندرجہ ذیل حاصل ضرب معلوم کیجیے

(i) $(x+4)(x+10)$ (ii) $(x+8)(x-10)$ (iii) $(3x+4)(3x-5)$

(iv) $\left(y^2+\frac{3}{2}\right)\left(y^2-\frac{3}{2}\right)$ (v) $(3-2x)(3+2x)$

2. سیدھی ضرب کے تعبیر مندرجہ حاصل ضرب کی قدر معلوم کیجیے

(i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. مناسب تماثلات کا استعمال کرکے اجزائے ضربی بنایئے

(i) $9x^2+6xy+y^2$ (ii) $4y^2-4y+1$ (iii) $x^2-\frac{y^2}{100}$

4. مناسب تماثلات کا استعمال کرکے مندرجہ ذیل میں ہر ایک کو پھیلایئے

(i) $(x+2y+4z)^2$ (ii) $(2x-y+z)^2$ (iii) $(-2x+3y+2z)^2$

(iv) $(3a-7b+c)^2$ (v) $(-2x+5y-3z)^2$ (vi) $\left[\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+1\right]^2$

5. اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے

(i) $4x^2+9y^2+16z^2+12xy-24yz-16xz$

(ii) $2x^2+y^2+8z^2-2\sqrt{2}xy+4\sqrt{2}yz-8xz$

6. مندرجہ ذیل معکبوں کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھیے

(i) $(2x+1)^2$ (ii) $(2a-3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x+1\right]^2$ (iv) $\left[x-\frac{2}{3}y\right]^2$

7. مناسب تماثلات کا استعمال کرکے مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجیے

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. مندرجہ ذیل ہر ایک کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے

(i) $8a^3+b^3+12a^2b+6ab^2$ (ii) $8a^3-b^3-12a^2b+6ab^2$

(iii) $27-125a^3-135a+225a^2$ (iv) $64a^3-27b^3-14412a^2b+108ab^2$

(v) $27p^3-\frac{1}{216}-\frac{9}{2}p^2+\frac{1}{4}p$

9. تصدیق کیجیے

(i) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(ii) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

10. ہر ایک کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے

(i) $27y^3+125z^3$

(ii) $64m^3-343n^3$

(اشارہ: سوال نمبر 9 دیکھیے)

11. $27x^3+y^3+z^3-9xyz$ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے؟

12. $x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$ کی تصدیق کیجیے

13. اگر $x+y+z=0$ کو دکھاتے ہیں کہ $x^3+y^3+z^3-3xyz$

14. مکعب تعبیر معلوم کیجیے مندرجہ ذیل میں ہر ایک کی قدر معلوم کیجیے

(i) $(-12)^3+(7)^3+(5)^3$

(ii) $(28)^3+(-15)^3+(-13)^3$

15. مندرجہ ذیل مستطیلوں میں لمبائی اور چوڑائی کی وہ ممکن عبارتیں معلوم کیجیے جن میں ان کا رقبہ دیا ہوا ہے؟

رقبہ: $35y^2+13y-12$	رقبہ: $25a^2-35a+12$

16. اسی کعب نما کی ابعاد کیا ہونگی جن کا حجم مندرجہ ذیل ہے

حجم: $12ky^2+6ky-20k$	حجم: $3x^2-12x$

2.7 خلاصہ

اس باب میں آپ مندرجہ ذیل نقاط کے بارے میں پڑھا۔

1. ایک متغیر میں کثیر رکنی $p(x)$ میں ایک الجبری عبارت ہے جس کی شکل ہے

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots-a_2x^2+a_1x+a_0,$$

جہاں a_0، a_1، $a_2 ... an$ مستقلہ ہیں $a_n \neq 0$، a_0، a_1، a_2، ....، a_n بالترتیب x^n، x، x^2، ....، x^n کے ضریب ہیں n کثیر رکنی کا درجہ کہلاتا ہے اور $a_n x^n$، a_{n-1}، x^{n-1}، ....، a_n، $a_n \neq 0$ میں سے ہر ایک کثیر رکنی کا درجہ کہلاتا ہے۔

2. ایک رکن والی کثیر رکنی یک رکنی کہلاتی ہے۔
3. دو رکنی والی کثیر رکنی دو رکنی کہلاتی ہے۔
4. تین رکنی والی کثیر رکنی سہ رکنی کہلاتی ہے۔
5. ایک درجہ والی کثیر رکنی خطی کثیر رکنی کہلاتی ہے۔
6. دو درجہ والی کثیر رکنی دو درجی کثیر رکنی کہلاتی ہے۔
7. تین درجہ والی کثیر رکنی مکعبی کثیر رکنی کہلاتی ہے۔
8. ایک حقیقی عدد a کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر ہوتا ہے اگر $p(a) = 0$
9. ایک متغیر والی ہر ایک خطی کثیر رکنی کا یکتا صفر ہوتا ہے۔ ایک غیر صفر مستقل کثیر رکنی کا کوصفر نہیں ہوتا اور ہر حقیقی عدد صفر کثیر رکنی کا صفر ہوتا ہے۔
10. باقی مسئلہ: اگر $P(x)$ ایک کثیر رکنی ہے جیسا کہ درجہ 1 کے برابر اس سے بڑا ہو اور $p(x)$ کو ایک خطی کثیر رکنی سے تقسیم کیا جائے تو باقی $x - a$ ہے
11. جزو ضربی مسئلہ: $x - a$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جزو ضر بی ہے اگر $p(a) = 0$ مزید اگر $x - a$ کثیر رکنی $p(x)$ کا $p(a) = 0$ کا جزو ضربی ہے تب
12. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
13. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$
14. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
15. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$