

باب 11

(بناوٹ) عملیات یا عمل بناوٹ (CONSTRUCTION)

11.1 تعارف (Introduction)

پچھلے ابواب میں اشکال جو مسلسل کو ثابت کرنے یا مشتقوں کو حل کرنے کے لیے ضروری تھیں، ضروری نہیں کہ درست ہوں وہ اس لیے بنائی جاتی تھیں کہ وہ صورت حال کا احساس کرا سکیں اور مناسب دلائل کے لیے مددگار ثابت ہوں لیکن کبھی کبھی ہمیں بالکل صحیح شکل کی ضرورت ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر کسی بلڈنگ کا نقشہ اور ان کے ڈیزائن، مشینوں کے مختلف پرزے، اور سڑکوں کے نقشہ وغیرہ اس طرح کی شکل بنانے کے لیے کچھ بنیادی جیومیٹریائی اوزاروں کی ضرورت ہوتی ہے۔ آپ کے پاس جیومیٹری بکس ضرور ہوگا جس میں مندرجہ ذیل چیزیں ہوتی ہیں۔

- (i) ایک اسکیل جس کے ایک طرف سینٹی میٹر cm اور دوسرے طرف mm (ملی میٹر) مارک کئے گئے ہوتے ہیں
- (ii) سیٹ اسکوائر کا ایک جوڑا جس میں ایک پر 90° ، 60° اور 30° کے زاویے اور دوسرے پر 90° ، 45° اور 45° کے زاویے ہوتے ہیں۔

(iii) ڈیوائڈر کا ایک جوڑا۔

(iv) پرکار جس کے ایک سرے میں پنسل لگانے کی جگہ ہوتی ہے۔

(v) چاندہ

عام طور پر جیومیٹری کی شکلوں کو بنانے کے لیے ان سب کی ضرورت ہوتی ہے جیسے دی ہوئی پیمائش کے مثلث، دائرہ، چار ضلعی، کثیر ضلعی، وغیرہ کے بنانے میں ایک جیومیٹریائی بناوٹ (عمل) صرف دو اوزار فنٹ اور پرکار کے استعمال سے ایک جیومیٹریائی شکل بنانے کا عمل ہے۔ بناوٹ (تشکیل میں) جہاں پیمائش کی ضرورت ہوتی ہے آپ پیمانہ اور چاندہ کا استعمال بھی

کر سکتے ہیں اس باب میں ہم کچھ بنیادی بناوٹوں پر غور کریں گے اور پھر ان کا استعمال کچھ خاص قسم کے مثلثوں کے بنانے میں کریں گے۔

11.2 بنیادی عملیات (بناوٹیں) (Basic Constructions)

VI کلاس میں آپ نے دائرہ کسی قطع خط کا عمودی ناصف 30° ، 45° ، 60° اور 120° کے زاویہ اور کسی زاویہ کا ناصف بنانا سیکھا ہے۔ جہاں آپ نے ان بناوٹوں کا جواز نہیں دیا اس سیکشن میں آپ اس میں سے کچھ کی بناوٹ ان دلائل کے ساتھ کہ یہ بناوٹیں کیوں معقول (valid) ہیں بنانا سیکھیں گے۔

عمل 11.1: دیئے ہوئے زاویہ کا ناصف بنانا۔

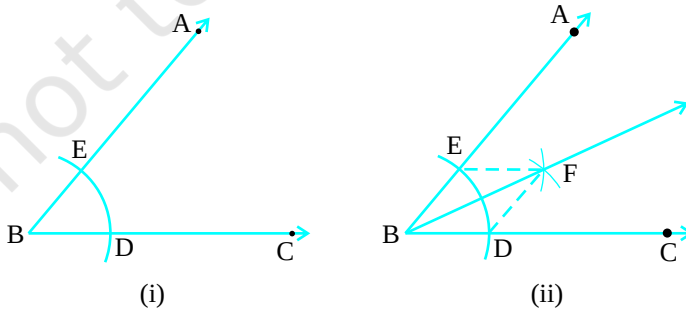
ایک زاویہ ABC دیا ہوا ہے۔ ہمیں اس کا ناصف بنانا ہے۔

عمل کے اقدامات

1. B کو مرکز مان کر اور کسی بھی نصف قطر کا ایک قوس بنائیے تو شعاع BA اور BC بالترتیب E اور D پر قطع کرے (شکل 11.1 دیکھیے)

2. اب D اور E کو مرکز مان کر اور $\frac{1}{2}DE$ سے زیادہ نصف قطر لیکر قوس بنائیے جو ایک دوسرے کو F پر قطع کرے۔

3. شعاع BF کھینچیے۔ (شکل 11.1(ii)) یہ شعاع BF اور ABC کے کا مطلوبہ ناصف ہے۔



شکل 11.1

اس لیے دیکھتے ہیں کہ کس طرح سے یہ طریقہ ہمیں مطلوبہ ناصف دیتا ہے۔

DF اور EF کو ملائیے۔

مثلثوں BEF اور BDF میں

BE = BD (ایک ہی قوس کے نصف قطر)

EF = DF (مساوی نصف قطر کے قوس)

BF = BF (مشترک)

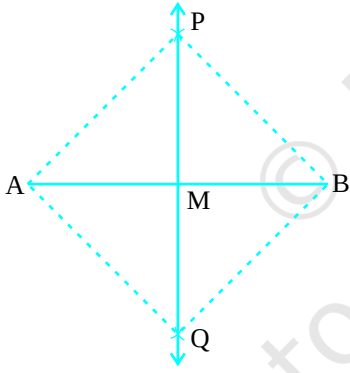
اس لیے (SSS کا قاعدہ) ABFE = ABDF

اس سے ملتا ہے $\angle EFB = \angle DBF$

عمل 11.2: دیئے ہوئے قطع خط کا عمودی ناصف کھینچنا۔

ایک قطعہ خط AB دیا گیا ہے ہم اس کے عمودی ناصف بنانا چاہتے ہیں۔

عمل کے اقدامات



شکل 11.2

1. A اور B کو مرکز مان کر اور $\frac{1}{2}AB$ سے زیادہ نصف قطر لے کر

ایک قطع خط کے AB کے دونوں طرف قوس بنائیے جو ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

2. مان لیجئے یہ قوس ایک دوسرے کو P اور D پر قطع کرتے ہیں۔ P اور Q

کو ملائیے (شکل 11.2 دیکھئے)

3. مان لیجئے PQ، AB کو نقطہ M پر قطع کرتا ہے تب خط AP، PHQ کا مطلوبہ عمودی ناصف ہے۔

آئیے دیکھتے ہیں کہ کس طریقہ سے ہمیں مطلوبہ عمودی ناصف دیتا ہے۔

A اور B دونوں کو P اور Q سے ملا کر AP، AQ، BP اور BQ بتائیے

مثلثوں PAQ اور PBQ میں

$$AP = BP \text{ (مساوی نصف قطر والے قوس)}$$

$$AQ = BQ \text{ (مساوی نصف قطر والے قوس)}$$

$$PQ = PQ \text{ (مشترک)}$$

$$\text{اس لئے } \angle PAQ = \angle PBQ \text{ (SSS قاعدہ)}$$

$$\text{اس لئے } \angle APM = \angle BPM \text{ (CPCT)}$$

اب مثلثوں PMA اور PMB میں۔

$$AP = BP \text{ (پہلے جیسا)}$$

$$PM = PM \text{ (مشترک)}$$

$$\angle APM = \angle BPM \text{ (اوپر ثابت کیا گیا ہے)}$$

$$\Delta PMA = \Delta PMB \text{ (SAS قاعدہ)}$$

$$\text{اس لیے } \angle PMA = \angle PMB \text{ اور } AM = BM \text{ (CPCT)}$$

$$\text{کیونکہ } \angle PMA + \angle PMB = 180^\circ \text{ (خطی جوڑا بدیہہ)}$$

$$\angle PMA = \angle PMB = 90^\circ \text{ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔}$$

اس طرح سے PM یعنی PMQ کا عمودی ناصف ہے۔

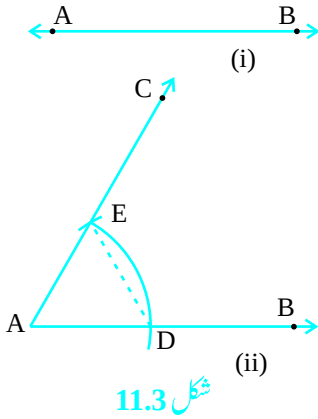
عمل 11.3: دی ہوئی شعاع کے ابتدائی نقطہ پر $\angle CAB = 60^\circ$ کا زاویہ بنانا۔

آئیے ایک شعاع AB لیجیے جس کا ابتدائی نقطہ A ہے۔ (شکل 11.3 دیکھیے) ہم ایک شعاع AC اس طرح بناتے ہیں کہ

$$\angle CAB = 60^\circ \text{ ایسا ایک طریقہ نیچے دیا ہوا ہے۔}$$

عمل کے اقدامات

1. A کو مرکز مان کر اور کوئی نصف قطر لے کر دائرہ کا ایک قوس کھینچیے۔ جو AB کو نقطہ D پر قطع کرتا ہے۔
2. D کو مرکز مان کر اور وہی نصف قطر لے کر (جو قدم ایک میں دیا گیا ہے) ایک قوس بنائیے جو قدم ایک میں حاصل قوس کو نقطہ E پر قطع کرتا ہے۔



شکل 11.3

3. E سے گزرتی ہوئی شعاع AC کھینچیے (شکل 11.3(ii) دیکھیے) تب $\angle CAB$ کا مطلوبہ زاویہ ہے 60° ۔ آئیے اب دیکھتے ہیں کہ کس طرح سے یہ طریقہ ہمیں مطلوبہ 60° کا زاویہ دیتا ہے۔

DE کو ملائیے تب

(عمل کی رو سے) $AE = AD = DE$

اس لیے $\triangle EAD$ ایک مساوی ضلعی مثلث ہے۔ اور $\angle FAD$ جو $\angle CAB$ کے مساوی ہے 60° کا ہے۔

مشق 11.1

- ایک دی ہوئی شعاع کے ابتدائی نقطہ پر 90° کے زاویہ کی تشکیل کیجیے اور اس عمل کا جواز پیش کیجیے۔
- ایک دی ہوئی شعاع کے ابتدائی نقطہ پر 45° کے زاویہ کی تشکیل کیجیے اور اس عمل کا جواز پیش کیجیے۔
- مندرجہ ذیل پیمائشوں کے زاویوں کی تشکیل کیجیے۔
 - 30°
 - $22\frac{1}{2}^\circ$
 - 15°
- مندرجہ ذیل زاویوں کی تشکیل کیجیے اور چاندہ سے ناپ کر اس کی تصدیق کیجیے۔
 - 75°
 - 105°
 - 135°
- دئے ہوئے ضلع کے مساوی ضلعی مثلث کی تشکیل کیجئے اور عمل کا جواز پیش کیجئے۔

11.3 مثلثوں کی کچھ بناوٹیں (Some Construction of Triangle)

اب تک ہم نے کچھ بنیادی بناوٹوں پر غور کیا ہے۔ اب ہم کچھ مثلثوں کی تشکیل کیچھلی جماعتوں اور مندرجہ بالا بناوٹوں کو استعمال کر کے کریں گے۔ یاد کیجئے کہ باب 7 میں مثلثوں کی مماثلت کے SAS، ASA، SSS اور RHS چار قاعدے ہیں۔ اس لیے

مثالث بنتا ہے۔ اگر (i) دو اضلاع اور ان کے درمیان کا زاویہ دیا ہوا ہے (ii) تین ضلعی دیئے ہوئے ہوں (iii) دو زاویہ اور ان کے درمیان کا ضلع دیا ہو (iv) ایک قائم مثلث میں وتر اور ایک ضلع دیا ہوا ہو۔ پانچویں کلاس میں آپ پہلے ہی سیکھ چکے ہیں کہ ایسے مثلثوں کی بناوٹ کیسے کی جاتی ہے۔ آئیے مثلثوں کی کچھ اور بناوٹوں پر غور کرتے ہیں۔ آپ نے نوٹ کیا ہوگا کہ مثلث کو بنانے کے لیے کم سے کم مثلث کے تین حصے دیئے ہوئے ضروری ہیں۔ لیکن اس مقصد کے لیے تینوں حصوں کے تمام اختلاط (Combination) کافی نہیں ہیں۔ مثال کے طور پر اگر مثلث کے دو اضلاع اور ایک زاویہ (درمیانی زاویہ نہیں) دیئے ہوئے ہوں تب یہ ہمیشہ ضروری نہیں کہ اسامثلث بن سکے۔

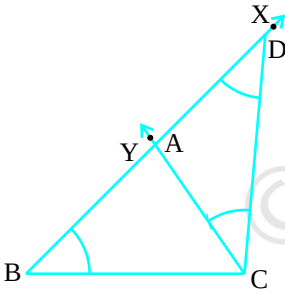
عمل 11.4: ایک مثلث بنانا جب اس کا قاعدہ، قاعدہ کا ایک

زاویہ اور باقی دو اضلاع کا حاصل جمع دیا ہوا ہو۔

قاعدہ BC اور قاعدہ کا زاویہ $\angle B$ اور مثلث ABC کے دوسرے

دو اضلاع کا حاصل جمع $AB+AC$ دیئے ہوئے ہیں اور آپ

کو اس کی تشکیل کرنی ہے۔



شکل 11.4

عمل کے اقدامات

1. قاعدہ BC کھینچنے اور اس کے نقطے B پر دیئے ہوئے زاویہ

کے برابر XBC بنائیے۔

2. شعاع BX میں سے قطع خط BD، $AB+AC$ کے برابر

کاٹیں۔

3. DC کو ملائیے اور $\angle DCY$ کے برابر BDC بنائیے۔

4. مان لیجیے CY، BX کو A پر قطع کرتا ہے (شکل 11.4 دیکھیے)

تب ABC مطلوبہ مثلث ہے۔

آئیے دیکھتے ہیں کہ آپ نے مطلوبہ مثلث کیسے حاصل کیا۔

قاعدہ BC اور $\angle B$ دی ہوئی پیکش کے مطابق بنائے گئے اور پھر مثلث ACD میں

$$\angle ACD = \angle ADC \text{ (عمل کی رو سے)}$$

اس لیے $AC = AD$ اور تب

$$AB = BD - AD = BD - AC$$

$$AB + AC = BD$$

متبادل طریقہ:

مذکورہ بالا دو اقدام کو دہرائیے، پھر عمودی ناصف PQ اور CD کھینچیے جو نقطہ A پر قطع کریں۔ (شکل 11.5 دیکھیے)

AC کو ملائیے تب ABC مطلوبہ مثلث ہے۔ نوٹ کیجیے کہ A،

CD کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔ اس لیے $AD = AC$

ریمارک: مثلث کی تشکیل ممکن نہیں اگر $AB + AC \leq BC$

شکل 11.5

عمل 11.5: مثلث بنانا جب اس کا قاعدہ۔ قاعدہ ایک زاویہ اور باقی دو اضلاع کا فرق دیا ہوا ہے۔

دیا ہوا ہے قاعدہ BC، قاعدہ کا زاویہ $\angle B$ اور باقی دو اضلاع کا $AB - AC$ یا $AC - AB$ آپ کو $\triangle ABC$ کی تشکیل کرنی ہے۔ صاف ظاہر ہے اس کے لیے مندرجہ ذیل دو حالتیں ہیں۔

حالت (i) مان لیجیے $AB > AC$ یعنی $AB - AC$ دیا ہوا ہے۔

عمل کے اقدامات

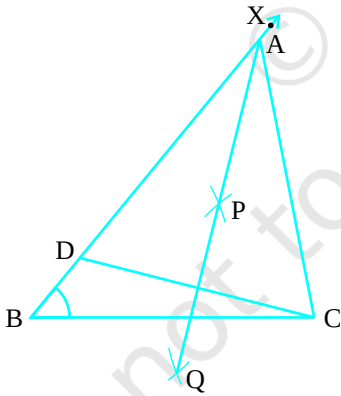
1. قاعدہ BC کھینچیے اور نقطہ B پر دئے ہوئے زاویہ کے برابر $\angle XBC$ بنائیے۔

2. شعاع BX میں سے $AB - AC$ کے برابر قطع خط BD کاٹیے۔

3. DC کو ملائیے اور DC کا عمودی ناصف PQ کھینچیے۔

4. مان لیجیے BX کو نقطہ A پر قطع کرتا ہے۔ PC کو ملائیے (شکل 11.6 دیکھیے)

تب $\triangle ABC$ مطلوبہ مثلث ہے۔



شکل 11.6

آئیے دیکھتے ہیں کہ آپ نے کس طرح سے مطلوبہ مثلث حاصل کیا ہے۔

دی ہوئی پیمائش کے مطابق قاعدہ BC اور $\angle B$ بنائیے نقطہ A DC کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔

اس لیے $AD = AC$

$$BD = AB + AD = AB + AC$$

حالت (ii) مان لیجئے $AB < AC$ یعنی $AC - AB$ دیا ہوا ہے

عمل کے اقدامات:

1. جیسا کہ حالت (i) میں کیا ہے۔

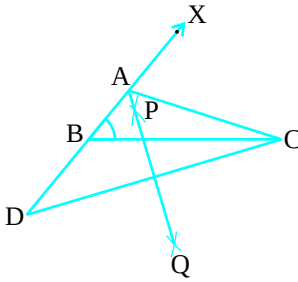
2. قطع خط BC کی مخالف سمت میں بڑھائے گئے وہ خط

BX جس سے $AC - AB$ کے برابر قطع خط BD کاٹے۔

3. DC کو ملائیے اور اس کا عمودی ناصف PQ کھینچیں۔

4. مان لیجئے B X, P Q کو نقطہ A پر قطع کرتا ہے۔

AC کو ملائیے (شکل 11.7 دیکھیے)



شکل 11.7

تب $\triangle ABC$ مطلوبہ مثلث ہے۔

جیسا آپ نے حالت (i) میں کیا تھا اسی طرح اس حالت میں بھی آپ ایسے عمل کا جواز پیش کر سکتے ہیں

عمل 11.6: مثلث بنانا جب اس کا احاطہ اور قاعدہ کے دونوں زاویے دیئے ہوئے ہوں۔

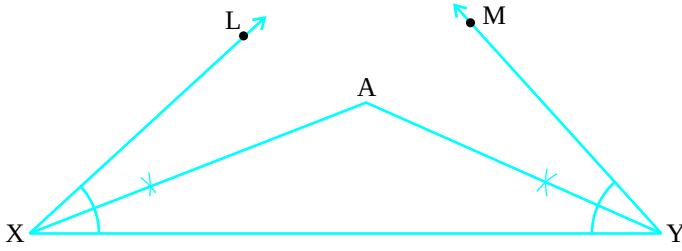
قاعدہ کے زاویہ دیئے ہوئے ہیں۔ مان لیجئے $\angle B$ اور $\angle C$ اور $AB + CA + BC$ اور آپ کو $\triangle ABC$ بنانا ہے۔

عمل کے اقدامات

1. ایک قطع خط مان لیجئے XY کھینچیں جو $AB + CA + BC$ کے برابر ہو۔

2. $\angle XY$ اور $\angle MXY$ بالترتیب $\angle B$ اور $\angle C$ کے مساوی بنائیے۔

3. اور $\angle LXY$ اور $\angle MYX$ کی تنصیف کیجیے۔ مان لیجیے یہ ناصف نقطہ A پر قطع کرتے ہیں۔

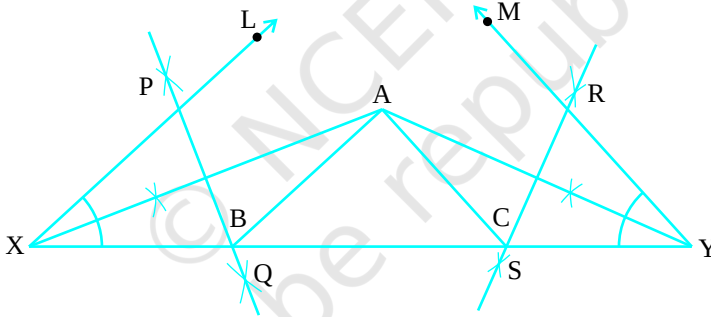


شکل (i) 11.8

4. AX اور AY کے عمودی ناصف PQ اور RS کھینچئے۔

5. مان لیجئے PQ، XY کو B پر اور RS، XY کو C پر قطع کرتا ہے۔ AB اور AC کو ملا دیجئے۔

[شکل 11.8(ii) دیکھیے]



شکل (ii) 11.8

تب ABC مطلوبہ مثلث ہے۔ جواز کے لیے آپ مشاہد کرتے ہیں۔ کہ B، AX کے عمودی ناصف PQ پر واقع ہے۔

اس لیے $XB = AB$ اور اس طرح سے $CY = AC$

اس سے حاصل ہوتا ہے۔ $BC + CA + AB = BC + XB + CY = XY$

دوبارہ $(\angle BAX = \angle AXB \text{ میں } \triangle AXB)$

اور $\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB = 2\angle AXB = \angle LXY$

اس طرح سے $\angle ACB = \angle MYX$ جو مطلوب ہے۔



تب ABC مطلوبہ مثلث ہے۔

11.2 مشق

1. ایک مثلث ABC بنائیے جس میں $\angle B = 75^\circ$ ، $BC = 7\text{cm}$ اور $AB + AC = 13$
2. ایک مثلث ABC بنائیے جس میں $\angle B = 45^\circ$ ، $BC = 8\text{cm}$ اور $AB - AC = 3.5\text{cm}$
3. ایک مثلث PQR بنائیے جس میں $\angle Q = 60^\circ$ ، $QR = 6\text{cm}$ اور $PR - PQ = 2\text{cm}$
4. ایک مثلث XYZ بنائیے جس میں $\angle Y = 30^\circ$ ، $\angle Z = 90^\circ$ اور $-XY + YZ + ZX = 11\text{cm}$
5. ایک قائم زاوی مثلث بنائیے جس کا قاعدہ 12cm اور اس کے وتر اور دوسرے نقطے کا حاصل جمع 18cm ہو۔

11.4 خلاصہ 1 (Summary)

اس باب میں آپ نے فضا اور پرکار کے استعمال سے مندرجہ ذیل عملیات کیں۔

1. ایک دیئے ہوئے زاویہ کی تنصیف کرنا۔
2. دیئے ہوئے زاویہ کی تنصیف کرنا۔
3. 60° وغیرہ کا زاویہ بنانا۔
4. مثلث بنانا جب اس کا قاعدہ، قاعدہ کا زاویہ اور باقی دو اضلاع کا حاصل جمع دیا ہوا ہو۔
5. مثلث بنانا جب اس کا قاعدہ، قاعدہ کا زاویہ اور باقی دو اضلاع کا فرق دیا ہوا ہو۔
6. ایک مثلث بنانا جب اس کا احاطہ اور قاعدہ کے زاویے دیئے ہوئے ہوں۔