باب 14

شماریات (STATISTICS)

14.1 تعارف (Introduction)

روزانہ ہمیں عددی حقیقتیں اشکال، جدول اور گراف وغیرہ کی شکل میں بہت سی اہم اطلاعات ملتی ہیں۔ یہ اطلاعات ہمیں اخبار، ٹی وی، میگزین اور دوسرے ترسیل کے ذرائع سے حاصل ہوتی ہیں۔ ان کا تعلق کرکٹ میں بالنگ اور بلے بازی، کسی کمپنی کا منافع، شہروں کے درجۂ حرارت، پنج سالہ منصوبہ میں مختلف سیکٹر میں ہوئے اخراجات، الیکشن کے نتائج وغیرہ سے ہوتا ہے۔ یہ اشکال یا حقیقتیں جو عددی ہوتی ہیں، ان کو ایک خاص مقصد کے لئے اکھٹا کیا جاتا ہے آنکڑے کہلاتے ہیں۔ آپ کے لئے لفظ آنکڑے، نیا نہیں ہے۔ آپ پچھلی جماعتوں میں آنکڑے اور ان کے بارے میں کافی کچھ جان چکے ہیں۔

یہ دنیا اب بہت سی اہم اطلاعات سے پُر ہے۔ ہماری زندگی کے ہر حصہ میں آنکڑے کسی نہ کسی شکل میں استعمال ہوتے ہیں۔ اس لئے ہمارے لئے یہ ضروری ہوگیا ہے کہ یہ جانیں کہ آنکڑوں سے کس طرح اہم اطلاعات فراہم کی جاتی ہیں۔ انکڑوں سے اس طرح سے اہم اطلاعات فراہم کرنے کو ہم ریاضی کی ایک اہم شاخ شماریات میں پڑھتے ہیں۔

لفظ شماریات، ایک لاطینی لفظ (status) سے لیا گیا ہے جس کے معنی ہیں، ایک صوبہ (سیاسی) ابتدا میں شماریات صرف لوگوں کی زندگی کے مختلف پہلوؤں کے بارے میں آنکڑے اکھٹا کرنا جو صوبہ کے لیے مفید ہوں، لیکن کافی عرصہ سے اس کا اسکوپ بڑھ گیا ہے۔ شماریات کا مقصد صرف آنکڑے اکھٹا کرنے تک ہی محدود نہیں ہے بلکہ ان کی ترجمانی اور ان سے نتائج اخذ کرنا بھی ہے۔ شماریات کا کام انکڑوں کو اکھٹا کرنا ان کو منظّم کرنا ان کا تجزیہ کرنا اور ترجمانی کرنا ہے۔ لفظ شماریات کے مختلف contextn میں مختلف معنی ہوتے ہیں۔ آیئے مندرجہ ذیل جملوں پر غور کرتے ہیں:

1. کیا میں Educational Statistics of India کی سب سے بعد میں چھپی کاپی لے سکتا ہوں۔

© NCERT not to be republished

2. میں Statistic (شماریات) کا مطالعہ کرنا پسند کرتا ہوں کیوں کہ روزمرہ کی زندگی میں اسکا استعمال ہوتا ہے۔

پہلے جملہ میں شماریات جمع کے مفہوم میں استعمال ہوا ہے جس کے معنی ہیں عددی آنکڑے جس میں ہندوستان کے بہت سے تعلیمی ادارے اور مختلف صوبوں میں خواندگی شرح وغیرہ شامل ہیں۔ دوسرے جملہ میں لفظ شماریات ایک واحد اسم کے طور پر استعمال ہوا ہے جس کہ معنی ہیں وہ مضمون جس میں ہم آنکڑوں کو اکھٹا کرنا' انکوپیش کرنا' ان کا تجزیہ کرنا اور ان سے بامعنی نتائج اخذ کرنا' کے بارے میں پڑھتے ہیں۔ اس باب میں بھی ہم آنکڑوں سے متعلق بہت سے اہم پہلوؤں پر غور وخوض کریں گے۔

14.2 آنکڑوں کو اکھٹا کرنا (Collection of Data)

آیئے ہم آنکڑے جمع کرنے کے مندرجہ ذیل مشغلہ سے شروع کرتے ہیں۔

مشغلہ 1 : اپنے کلاس کے تمام طلباء کو چار گروپ میں بانٹو۔ ہر گروپ کو مندرجہ ذیل میں دئے گئے مختلف قسم کے آنکڑوں میں سے ایک کو جمع کرنے کا کام دیجیے

(i) آپ کی کلاس کے 20 طلباء کی اونچائی

(ii) ایک مہینہ میں آپ کی کلاس میں غیر حاضر رہنے والے طلباء کی تعداد۔

(iii) آپ کے کلاس کے ساتھیوں کے خاندان میں کل افراد کی تعداد۔

(iv) اسکول کے چاروں طرف پھیلے ہوئے 15 پودوں کی اونچائی۔

آیئے طلباء کے ذریعہ جمع کئے گئے نتائج کو دیکھتے ہیں۔ ہر ایک گروپ نے آنکڑوں کو کس طرح اکھٹا کیا؟

(i) کیا انھوں نے معلومات حاصل کرنے کے لئے متعلقہ طالب علم' گھر یا شخص سے اطلاعات اکھٹی کیں۔

(ii) کیا انھوں نے کسی اور ذرائع جیسے اسکول کے ریکارڈ سے اطلاعات حاصل کیں۔

پہلی حالت میں جب چھان بین کرنے والا خود ذہن میں کسی خاص مقصد کو رکھ کر اطلاعات فراہم کرتا ہے۔ اس طرح سے حاصل آنکڑے ابتدائی آنکڑے Primary Data کہلاتے ہیں۔ دوسری حالت میں جب اطلاعات ایسے ذرائع سے اکھٹا کی جائے جہاں وہ پہلے ہی سے جمع ہوتی ہے۔ ثانوی آنکڑے (Secondary Data) کہلاتے ہیں خاص طور سے اس بات کا زیادہ خیال رکھنا چاہئے کہ وہ ذرائع جن سے اطلاعات جمع کی جائیں قابل اعتماد ہوں۔ اب تک آپ سمجھ گئے ہوں گے کہ آنکڑوں کو کس طرح اکھٹا کیا جاتا ہے اور ابتدائی اور ثانوی آنکڑوں میں کیا فرق ہوتا ہے ۔

© NCERT not to be republished

مشق 14.1

1. ایسے پانچ آنکڑوں کی مثالیں دیجیے جن کو آپ روزمرّہ زندگی سے جمع کر سکتے ہوں۔
2. درج بالا آنکڑوں کی درجہ بندی ابتدائی اور ثانوی آنکڑوں کے طور پر کیجیے۔

14.3 آنکڑوں کو پیش کرنا

جیسے ہی آنکڑے اکٹھا کرنے کا کام ختم ہوتا ہے۔ چھان بین کرنے والے کو وہ طریقہ معلوم کرنے چاہئیں جن کی مدد سے وہ ان آنکڑوں کو بامعنی انداز میں پیش کر سکے تاکہ ایک ہی نظر میں اس کے خاص نقاط کو آسانی سے سمجھا جا سکے۔ اسے اب کچھ مثالوں سے انکڑوش کو پیش کرنے کے طریقوں کو دہراتے ہیں۔

مثال 1: ریاضی کی ایک جانچ سیٹ میں 10 طلباء کے ذریعہ حاصل کردہ مندرجہ ذیل نمبروں پر غور کیجیے

62 75 78 25 42 60 73 95 36 55

اس شکل میں آنکڑے خام آنکڑے کہلاتے ہیں

ان آنکڑوں کو دیکھ کر کیا آپ سب سے زیادہ اور سب سے کم نمبر معلوم کر سکتے ہیں۔ کیا آپ کو سب سے زیادہ اور سب سے کم اس کو جاننے میں کچھ وقت لگا؟ کیا ان میں اس وقت کم وقت نہیں لگتا جب یہ گھٹتی یا بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھے ہوئے ہوتے؟ آیئے ان نمبروں کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھتے ہیں۔

95 78 75 73 62 60 55 42 36 25

اب ہم صاف طور پر دیکھ سکتے ہیں کہ سب سے کم نمبر 25 اور سب سے زیادہ نمبر 95 ہے۔ آنکڑوں کی سب سے زیادہ اور سب سے کم قیمت کے فرق کو آنکڑوں کی وسعت (range) کہتے ہیں۔ اس طرح اس سوال میں وسعت 95-25=70 ہے۔

ایسی حالت میں جب کسی تجربہ میں مشاہدات کی تعداد بہت زیادہ ہو تب آنکڑوں کو گھٹتی یا بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھنا کافی دیر طلب کام ہوتا ہے۔ جیسا کہ دوسری مثال سے پتہ چلتا ہے

مثال 2: کسی اسکول کے 9 ویں کلاس کے 30 طلباء کے حاصل کردہ نمبروں (100 میں سے) پر غور کیجیے:

70	60	56	50	40	95	92	36	20	10
40	36	40	36	70	72	70	80	88	92

92	40	50	50	56	60	70	60	60	88

یاد کیجیے کہ ان طلباء کی تعداد جنھوں نے یکساں نمبر حاصل کئے ہوں ان نمبروں کا تعدد (frequencs) کہلاتا ہے مثال کے طور 70 نمبر حاصل کرنے والے طلباء کی تعداد 4 ہے۔اس لیے 70 نمبروں کا تعدد 4 ہے۔آنکڑوں کو مزید آسانی سے سمجھنے کے لیے ہم ایک جدول میں لکھتے ہیں جیسا کہ نیچے دکھایا گیا ہے

جدول 14.1

نمبر	طلباء کی تعداد یعنی تعداد
10	1
20	1
36	3
40	4
50	3
56	2
60	4
70	4
72	1
80	1
88	2
92	3
95	1
کل	30

14.1 جدول ایک غیر مرتب تعدد بٹاؤ جدول یا صرف تعداد بناؤ جدول کہلاتا ہے۔

نوٹ کیجیے کہ آپ ان جدول کو بنانے کے لیے ٹیلی مارک کا استعمال کرتے ہیں۔جیسا کہ اگلی مثال میں دکھایا گیا ہے

مثال 3: ون مہتسو (Van Mahotsava) کے موقع پر 100 اسکولوں میں 100 پودے لگائے گئے ایک مہینہ بعد باقی بچے پودوں کی تعداد درج ذیل ہے

98	98	33	69	65	65	32	28	67	95
92	95	69	40	40	42	38	32	42	76
42	63	65	37	62	85	83	76	83	75
92	83	76	64	52	49	81	73	65	89
82	75	82	59	83	81	79	52	68	93
83	39	42	38	36	31	62	44	90	86
68	30	85	83	76	35	23	58	56	87
83	66	75	83	39	45	43	86	83	69
42	93	89	88	27	91	66	89	75	92
36	34	83	52	49	66	55	90	69	53

اتنی بڑی مقدار والے آنکڑوں کو پیش کرنے کے لیے ہم ان کو گروپوں میں بانٹ دیتے ہیں تا کہ ان کو آسانی سے سمجھا جا سکے جیسے 20-29، 30-39، 90-99 (کیوں کہ ہمارے آنکڑے 22 اور 99 کے درمیان میں ان گروپوں کو ہم کلاس وقفہ کہتے ہیں اور ان کا سائز کلاس سائز یا کلاس کی چوڑائی کہلاتی ہے۔ جو کہ ان مثال میں 10 ہے۔ ان کلاس وقفوں میں چھوٹا عدد نچلی کلاس حد اور بڑا عدد اوپری کلاس حد کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر 20-29 میں نچلی کلاس حد 20 اور اوپری کلاس حد 29 ہے۔

یاد کیجیے کہ ٹیلی مارک کو استعمال کر کے ہم مذکورہ بالا آنکڑوں کو کلاس وقفوں کی شکل میں درج ذیل طریقہ سے لکھ سکتے ہیں:

باقی بچے ہوئے پودے	ٹیلی مارکس	اسکولوں کی تعداد
20-29	𝍷𝍷	3
30-39	𝍸 𝍸 𝍷𝍷	14
40-49	𝍸 𝍸 𝍷	12
50-59	𝍸 𝍷𝍷	8

© NCERT not to be republished

60-69	卌 卌 卌 ||	18
70-79	卌 卌	10
80-89	卌 卌 卌 卌 |||	23
90-100	卌 卌 ||	12
کل		100

آنکڑوں کو اس طرح سے گروپوں میں رکھنے سے ان کے بارے میں بہت سی اہم باتوں کو ایک ہی نظر میں آسانی سے بتا سکتے ہیں۔ اس کو ہم مرتب تعدد بٹاؤ جدول کہتے ہیں یہاں ہم آسانی سے مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ 50 فیصد یا اس سے زیادہ پودے 8+18+6+23+12=71

71 اسکول میں باقی بچتے ہیں

ہم مشاہدہ کرتے ہیں مندرجہ بالا جدول میں کلاس وقفہ ایک دوسرے کو overlapp نہیں کرتے۔ یہ بات نوٹ کیجیے کہ ہم کچھ بڑے کلاس وقفہ کم وقفہ اور چھوٹے کلاس وقفہ کے زیادہ وقفہ بنا سکتے تھے جن کا سائز بڑا ہو جیسے وقفہ 31-22-26,27 وغیرہ بھی ہو سکتے ہیں۔ اس میں کوئی متعین بات نہیں ہے صرف اس بات کا خیال رکھنا چاہئے کہ کلاس وقفہ ایک دوسرے کو overlapp نہ کریں۔

مثال 4: مندرجہ ذیل تعدد بٹاؤ جدول پر غور کیجیے جس میں 38 طلباء کے اوزان دیے گئے ہیں

جدول 14.3

اوزان (کلوگرام میں)	طلباء کی تعداد
31-35	9
36-40	5
41-45	14
46-50	3
51-55	1
56-60	2
61-65	2
66-70	1
71-75	1
کل	38

© NCERT not to be republished

اب اگر 35.5 کلوگرام اور 40.5 کلوگرام والے دو نئے طلباء کا اس کلاس میں داخلہ ہوتا ہے تب ان کو ہم کون سے کلا۔ وقفہ میں شامل کریں گے؟ ہم ان کو 35 یا 40 پر ختم ہونے والے وقفوں میں شامل نہیں کر سکتے اور نہ ہی ان سے نیچے والوں میں۔ یہ اس وجہ سے کہ دو لگا تار کلاسوں نچلی اور اوپری کلاس حدوں کے درمیان gap ہے۔ اس کے لیے ہمیں وقفوں کو اس طرح بانٹنا چاہئے کہ کسی وقفہ کی اوپری کلاس حد اور اس سے اگلے وقفہ کی نچلی کلاس حد یکساں ہو۔ اس کے لیے ہم کسی کلاس کی اوپری کلاس حد اور اس سے اگلی کلاس کی نچلی حد کے درمیان فرق نکال لیتے ہیں۔ پھر ہم اس فرق کے آدھے کو اوپری کلاس حد میں جمع کر دیتے ہیں۔ اور نچلی کلاس حد میں سے گھٹا دیتے ہیں

مثال کے طور پر 35-31 اور 40-36 کلاس وقفوں پر غور کیجیے۔

$36 - 40$ کی نچلی کلاس حد 36

$31 - 35$ کی اوپری کلاس حد 35

ان کا فرق $= 36 - 35 = 1$ اس لئے اس فرق کا آدھا $= \frac{1}{2} = 0.5$

اس طرح سے نئے کلاس وقفہ ہوئے (31-35) کی جگہ (35+05) (31-0.5)

=30.5-35.5

اسی طرح سے 40-36 سے بنا نیا وقفہ ہو (40+0.5) - (35-0.5)

=35.5-40.5

اسی طرح سے جاری رکھتے ہوئے جاری کلاسیں بن جاتی ہیں جو میں

30.5-35-5, 35.5-40.5, 40.5-45.5, 45.5-50-5, 50.5-55.5, 55.5-60.5

(60.5-65.5) 65.5-70.5 70.5-75.5

اب ہمارے لئے ممکن ہے کہ ہم نئے طلباء کا وزن اس میں شامل کر سکیں۔ لیکن اب ایک نیا مسئلہ ہمارے سامنے آتا ہے کہ 35.5 دونوں کلاسوں 30.5-35.5 اور 35.5-40.5 میں نظر آتا ہے تو آپ کے لحاظ سے اس کو کس کلاس میں شامل کرنا چاہئے؟ اگر یہ دونوں کلاسوں میں شامل کیا جائے تو اس کی گنتی دوبارہ ہو جائے گی۔

رواج یہ ہے کہ 35.5 کو ہم 35.5-40.5 میں شامل کریں گے نہ کہ 30.5-35.5 میں۔ اس طرح سے 40.5 کو ہم 40.5-45.5 میں شامل کریں گے۔ 30.5-35.5 میں نہیں۔ اس طرح سے نئے وزنوں 35.5 کلوگرام اور 40.5 کلوگرام کی 40.5 - 35.5 اور

35.5-40.5 میں شامل کیا جائے گا۔ اب ان مفروضات کے ساتھ نئی تعدد بٹاؤ جدول مندرجہ ذیل ہے:

جدول 14.4

طلباء کی تعداد	اوزان کلوگرام
9	30.5-35.5
6	35.5-40.5
15	40.5-45.5
3	45.5-50.5
1	50.5-55.5
2	55.5-60.5
2	60.5-65.5
1	65.5-70.5
1	70.5-75.5

آیئے اب ان آنکڑوں کی طرف چلتے ہیں جن کو مشق 1 میں جمع کیا گیا تھا۔ اب آپ سے کہا جاتا ہے کہ ان کو تعدد بٹاؤ جدول میں پیش کرو۔

مشغلہ 2: انھیں چار گروپوں سے جاری کرتے ہوئے اپنے آنکڑوں کو تعدد بٹاؤ جدول میں تبدیل کیجیے۔ آنکڑوں کی قسم اور ان کی وسط کو ذہن میں رکھتے ہوئے مناسب سائز والے کلاس وقفہ چنئے۔

مشق 14.2

1. VIII کلاس کے 30 طلباء کا بلڈ گروپ مندرجہ ذیل میں ریکارڈ کیا گیا ہے

A,B, O, O, AB, O, A, O, B, A, O, B, A,O, O,

A, AB, O, A, A, O, O, AB, B, A, O, B, A, B, O

not to be republished

ان آنکڑوں کا اظہار تعدد بتاؤ جدول میں کیجیے اور معلوم کیجیے کہ ان طلباء میں سب سے مشترک (عام) بلڈ گروپ کون سا ہے اور سب سے الگ یا (نایاب) بلڈ گروپ کون سا ہے

.2 40 خاتون انجینئروں کا اُن کے گھر سے ان کے کام کرنے کی جگہ کا فاصلہ کلومیٹر میں مندرجہ ذیل ہے۔

21	12	7	13	11	25	20	10	3	5
2	16	17	32	11	18	17	12	10	19
3	18	15	12	5	3	8	7	9	7
12	6	7	15	15	6	9	2	14	12

مندرجہ بالا آنکڑوں کی 5 سائز کی مرتّب تعدد بتاؤ جدول بنائیے۔ پہلا وقفہ 5-0 (5 کو شامل نہیں ہے) لیجیے۔ اس جدولی اظہار میں آپ کیا خاص بات نوٹ کرتے ہیں؟

.3 کسی شہر کے ایک مہینہ کے 30 دنوں کی متعلق نمی (relatvie humidity) (فیصد میں) مندرجہ ذیل ہے۔

95.1	94.2	96.3	92.9	95.3	86.5	90.3	99.2	98.6	98.1
97.3	95.2	93.3	97.2	95.1	92.7	93.5	97.1	92.3	89.2
89	92.1	95.1	97.3	98.3	95.7	90.2	84.9	92.1	96.2

(i) مندرجہ بالا آنکڑوں کی تعداد تقسیمی جدول درجات 88–86, 86–84 وغیرہ کی مدد سے بناتے۔

(ii) آپ کیا سوچتے ہیں کہ دئے گئے آنکڑے کس موسم یا کس مہینہ کے ہیں۔

(iii) مندرجہ بالا آنکڑوں کی حد کیا ہے؟

.4 50 طلباء کی اونچائی نزدیکی سینٹی میٹروں میں مندرجہ ذیل ہے۔

151	150	162	154	161	168	165	154	150	161
170	160	172	156	154	158	165	171	164	162
164	165	168	166	165	162	170	161	159	153
166	173	161	160	162	158	156	153	152	154
159	154	153	158	159	168	167	162	159	161

© NCERT not to be republished

(i) 160-165، 165-170 وغیرہ کے کلاس وقفہ لے کر ان آنکڑوں کا اظہار مرتب تعدد بٹاؤ جدول میں کیجیے۔

(ii) جدول سے ان کی اونچائیوں کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں۔

5. ایک مطالعہ کے ذریعہ کسی شہر کی ہوا میں سلفر ڈائی آکسائڈ parts per million(ppm) ایک ملین کا حصّے کی موجودگی معلوم کی گئی۔ 30 دن میں ملے آنکڑے مندرجہ ذیل ہیں

0.03	0.08	0.08	0.09	.04	0.17
0.16	0.05	0.02	0.06	0.18	0.20
0.11	0.08	0.12	0.13	0.22	0.07
0.08	0.01	0.10	0.06	0.09	0.18
0.11	0.07	0.05	0.07	0.01	0.04

(i) کلاس وقفہ 0.00-0.4، 0.04-0.08 کے وقفہ لے کر ان آنکڑوں کی مرتب تعدد بٹاؤ جدول بنائیے

(ii) کتنے دنوں تک سلفر ڈائی اکسائڈ کا (concentration) 0.11 ppm زیادہ تھا۔

6. تین سکّوں کو 30 ہر مرتبہ اچھالا جاتا ہے۔ مرتبہ آنے والے head کی تعداد کو مندرجہ ذیل میں نوٹ کیا گیا ہے۔

0	1	2	2	1	2	3	1	3	0
1	3	1	1	2	2	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

دئے ہوئے آنکڑوں کی تعدد بٹاؤ جدول بنائیے

7. مندرجہ ذیل میں II کی اعشاریہ کے 50 ہندسوں تک کی قیمت دی گئی ہے۔

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

(i) اعشاریہ کے بعد لکھے گئے 0-9 تک ہندسوں کی فہرست بنائیے اور اس کا تعدد بٹاؤ جدول بنائے

(ii) سب سے زیادہ اور سب سے کم ظاہر ہونے والے ہندسہ کیا ہیں۔

8. بچوں سے پوچھا گیا کہ پچھلے ہفتہ ان لوگوں سے کتنے گھنٹے T.V دیکھا۔ پایا گیا نتیجہ مندرجہ ذیل ہے:

1	6	2	3	5	12	5	8	4	8
10	3	4	12	2	8	15	1	17	6
3	2	8	5	9	6	8	7	14	12

© NCERT not to be republished

(i) 5-10 کا کلاس۔ وقفہ اور کلاس کی چوڑائی 5 لیتے ہوئے ان آنکڑوں کا مرتب تعدد بناؤ جدول بنالیتے

(ii) کتنے بچوں نے ایک ہفتہ میں 15 گھنٹہ یا اس سے زیادہ T.V دیکھا۔

9. ایک کمپنی ایک خاص قسم کی کار بیٹری بناتی ہے۔ایسی 40 بیٹریوں کی عمر (سالوں میں) مندرجہ ذیل میں ریکارڈ کی گئی ہے۔

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
2.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

2-2.5 کے کلاس وقفوں سے شروع کرتے ہوئے 0.5 سائز کے کلاس وقفوں کے استعمال سے ان آنکڑوں کا تعدد بٹاؤ جدول بنائیے۔

14.4 آنکڑوں کا گرافی اظہار (Graphical representation of Data)

آنکڑوں کو جدول کے ذریعہ اظہار کرنا ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں۔اب ہم اپنی توجہ ایک اور اظہار کی طرف مرکوز کرنا چاہتے ہیں یعنی گرافی اظہار کی طرف کیا خوب کہا ہے کسی نے ایک تصویر ہزار الفاظ سے بہتر ہوتی ہے۔

عام طور پر انفرادی اشیاء کے درمیان موازنہ گراف کے ذریعہ اچھی طرح سے کیا جاسکتا ہے۔اس طرح سے اصل آنکڑوں کی نسبت ان کے اظہار کو سمجھنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔اس سیکشن میں ہم مندرجہ ذیل گرافی اظہار کے بارے میں پڑھیں گے۔

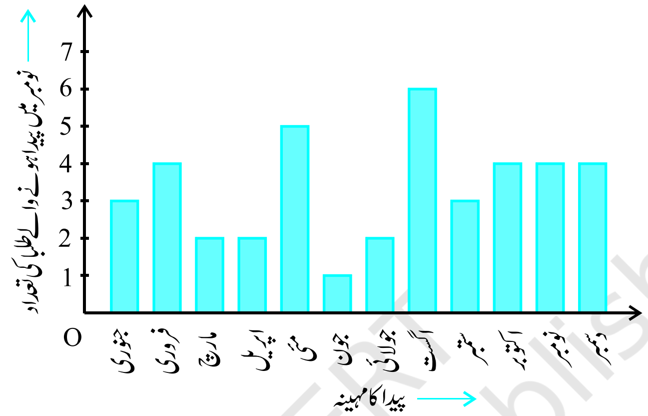
(A) بارگراف (B) یکساں اور مختلف چوڑائیوں کے ہیسٹوگرام (C) تعدد کثیر ضلع

(A) بارگراف (Bar Graph)

پچھلی کلاسوں میں آپ بارگراف اور اس کی بناوٹ کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔ یہاں ہم اس کو زیادہ رسمی طور پر سمجھنے کی کوشش کریں گے یاد کیجیے کہ یکساں چوڑائی والے بارگراف جن کے درمیان برابر فاصلہ ہوتا ہے صفر کو دکھانے کے لیے محور (مان لیجیے x- محور) پر بتایا جاتا ہے۔متغیر کی قیمتوں کو دوسرے محو (y- محور) پر دکھایا جاتا ہے اور بار کی اونچائی متغیر کی قیمت پر منحصر کرتی ہے۔

© NCERT not to be republished

مثال 5: نویں کلاس کے ایک خاص سیکشن کہ 40 طلباء سے ان کی پیدائش کے مہینہ کے بارے میں پوچھا گیا۔ اس طرح سے حاصل کردہ آنکڑوں کا گراف مندرجہ ذیل میں بتایا گیا ہے



شکل 14.1

مندرجہ بالا بار گراف کا مشاہدہ کیجیے اور مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے۔

(i) نومبر کے مہینہ میں کتنے طلباء پیدا ہوئے

(ii) کون سے مہینہ میں سب سے زیادہ طلباء پیدا ہوئے؟

حل: آپ نوٹ کرتے ہیں کہ یہاں متغیر پیدائش کا مہینہ ہے اور متغیر کی قیمت پیدا ہوئے طلباء کی تعداد ہے۔

(i) نومبر کے مہینہ میں 4 طلباء پیدا ہوئے

(ii) زیادہ تر طلباء اگست کے مہینہ میں پیدا ہوئے۔

آیئے اب دہراتے ہیں کہ مندرجہ ذیل مثال کو لے کر ہم بار گراف کس طرح بناتے ہیں

مثال 6: 20,000 روپے ماہانہ کی آمدنی والے ایک خاندان نے مختلف مدوں میں فی مہینہ خرچوں کو مندرجہ ذیل طریقہ سے پلان کیا۔ ان آنکڑوں کا بار گراف بنایئے

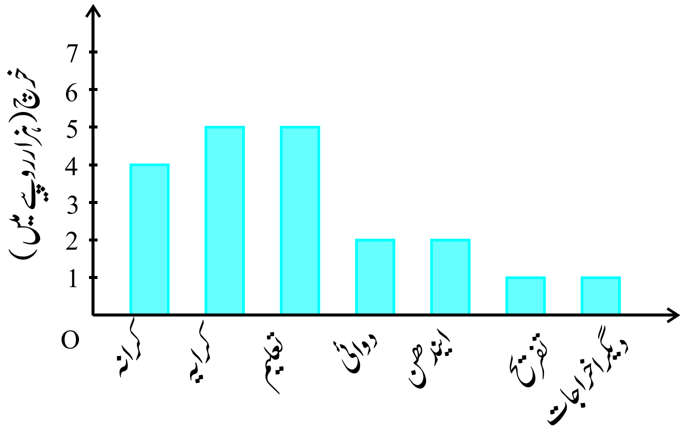
جدول 14.5

مدیں	خرچ (1000 روپیوں میں)
کرانہ	4
کرایہ	5
بچوں کی تعلیم	5
دوائیاں	2
تفریح	1
ایندھن	2
متفرق	1

حل: ان آنکڑوں کا بار گراف ہم مندرجہ ذیل طریقہ سے بناتے ہیں۔ نوٹ کیجیے کہ دوسرے کالم میں اکائی ہزار روپیوں میں ہے۔ اس لیے مسالہ کے آگے 4 کا مطلب ہے 4000 روپیے۔

1. کیوں کہ بار کی چوڑائی کوئی اہمیت نہیں رکھتی کوئی بھی پیمانہ چنتے ہوئے گراف کو مدوں (متغیر) کا اظہار ہم افقی محور پر کرتے ہیں لیکن صفائی ک لیے ہم ان بار کی یکساں چوڑائیاں لیتے ہیں اور ان کے درمیان یکساں فاصلہ (gap) برقرار رکھتے ہیں مان لیجیے ایک مد کا اظہار ایک اکائی سے ہوتا ہے۔
2. ہم خرچ (قیمت) کو عمودی محور پر ظاہر کرتے ہیں کیوں کہ زیادہ سے زیادہ خرچ Rs. 5000 ہے۔ ہم اپنا پیمانہ ایک اکائی =100 روپے لے سکتے ہیں۔
3. اپنے پہلے مد یعنی کرانہ، کو ظاہر کرنے کے لئے ہم 1 اکائی چوڑائی اور 4 اکائی اونچائی والے مستطیل بار بناتے ہیں۔
4. اسی طرح سے دولگاتار باروں کے درمیان 1 اکائی کا (gap) دیتے ہوئے باقی مدوں کو ظاہر کیا جاتا ہے۔

یہاں آپ آسانی سے ایک ہی نظر میں آنکڑوں کی خصوصیات کو دیکھ سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر تعلیم پر کیا گیا خرچ دواؤں پر کئے گئے خرچ کے دوگنے سے زیادہ ہے۔ اس طرح سے کچھ باتوں میں جدولی اظہار سے یہ اظہار زیادہ بہتر ہے۔



شکل 14.2

مشغلہ 3: مشغلہ کے انھیں 4 گروپوں کو جاری رکھتے ہوئے آنکڑوں کو مناسب بارگراف سے ظاہر کیجیے آئیے اب دیکھتے ہیں جاری کلاس۔ وقفوں کی تعدد بٹاؤ جدول گرافی طور پر کس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

(B) ہسٹوگرام (Histogram)

یہ بھی بارگراف ہی کی طرح ایک قسم کا اظہار ہے جسے چار کلاس وقفوں کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر جدول 14.6 میں دکھائے گئے ایک کلاس کے 36 طلباء کے وزنوں کے تعدد بٹاؤ پر غور کیجیے۔

جدول 14.6

وزن کلوگرام میں	طلباء کی تعداد
305-35.5	9
35.5-405	6
40.5-45.5	15
45.5-50.5	3
50.5-55.5	1
55.5-60.5	2
کل	36

© NCERT not to be republished

آیئے مذکورہ بالا آنکڑوں کو گرافی طور پر مندرجہ ذیل طریقہ سے اظہار کرتے ہیں۔

(i) ایک مناسب پیمانہ لے کر وزنوں کو افقی محور پر ظاہر کیجیے۔ ہم پیمانہ Icm=5kg چن سکتے ہیں مزید کیوں کہ پہلا کلاس وقفہ 0 سے نہیں 30.5 سے شروع ہو رہا ہے۔ اس لیے ہم اس کو محور پر ایک (ٹوٹی ہوئی لائن) کنک کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں۔

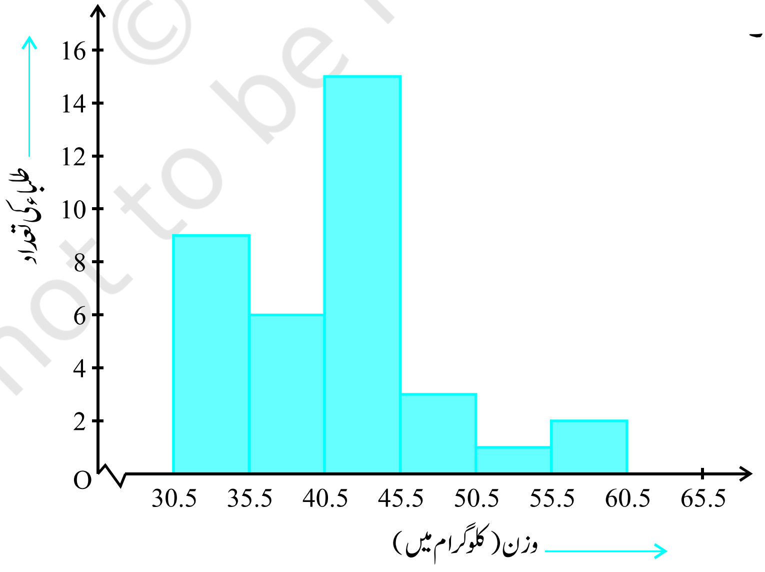
(ii) ہم طلباء کی تعداد (تعدد) کو مناسب پیمانہ لے کر عمودی محور پر ظاہر کرتے ہیں۔ کیوں کہ سب سے زیادہ تعدد 15 ہے۔ اس لئے ہم ایسا پیمانہ چنتے ہیں جس میں یہ تعداد 15 آسانی سے آجائے۔

(iii) اب ہم کلاس سائز کی چوڑائی والے مستطیلی (یا مستطیلی بار) بناتے ہیں جن کی لمبائی ان کی کلاس وقفہ کی نظیری تعدد کے برابر ہوتی مثال کے طور پر کلاس وقفہ 30.5-35.5 کا مستطیل وہ ہوگا جس کی چوڑائی 1cm اور لمبائی 4.5cm

(iv) اس طرح سے ہمیں شکل 14.3 میں دکھایا گیا گراف حاصل ہوتا ہے۔

مشاہدہ کیجیے کیوں کہ دو لگاتار مستطیلوں کے درمیان کوئی gap نہیں ہے اس لیے نتیجہ کے طور پر ملا گراف ایک ٹھوس شکل کی طرح دکھتا ہے یہ ہسٹوگرام کہلاتا ہے۔ جو کہ جاری کلاسوں والی تعدد بتاؤ کا گرافی اظہار ہے۔ مزید یہ کہ اس کی بناوٹ میں بار کی چوڑائی ایک بہت اہم کردار ادا کرتی ہے جو بار گراف میں نہیں۔

درحقیقت یہاں بنائے گئے سیدھے مستطیلوں کا رقبہ ان کی نظیری تعدد کے تناسب میں کیوں کہ مستطیلیوں کی چوڑائی یکساں ہوتی ہے اس لئے مستطیلوں کی لمبائی اس کی تعدد کے متناسب ہوتی ہیں۔ اس طرح سے ہم (iii) کے مطابق ہم لمبائی کھینچتے ہیں۔



شکل 14.3

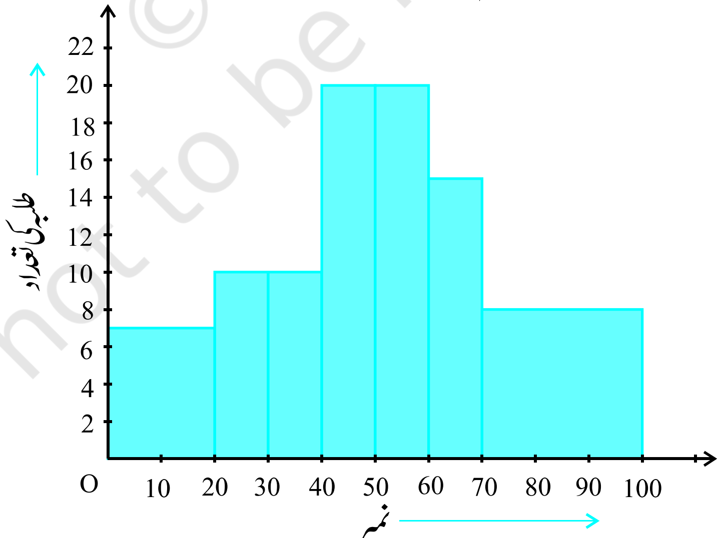
© NCERT not to be republished

اب ہم مذکورہ بالا سے مختلف ایک صورتحال پر غور کرتے ہیں

مثال 7: ایک استاد 100 نمبروں والے ریاضی کے ایک ٹیسٹ میں طلباء کے دو سیکشنوں کی کارکردگی کا تجزیہ کرنا چاہتا تھا۔ ان کی کارکردگی کو دیکھ کر اس نے پایا کہ کچھ طلباء 20 سے کم اور کچھ نے 70 یا اس سے زیادہ نمبر حاصل کئے۔ اس لئے اس نے طے کیا کہ ان کو مختلف سائز والے گروپوں میں گروپ کیا جائے جو ہوں گے 0-20، 20.30 ... 60.70، 70-100۔ پھر اس نے مندرجہ ذیل جدول بنایا:

نمبر	طلباء کی تعداد
0-20	7
20-30	10
30-40	10
40-50	20
50-60	20
60-70	15
70 سے زیادہ	8
کل	90

ایک طالب علم کے ذریعے اس جدول کا ہسٹوگرام بنایا گیا جو کہ شکل 14.4 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 14.4

اس گرافی اظہار کی احتیاط سے جانچ کرنے کے بعد کیا آپ سوچتے ہیں کہ اس نے آنکڑوں کا صحیح اظہار کیا ہے؟ نہیں یہ گراف ہماری غلط رہنمائی کرتا ہے۔ جیسا ہم نے پہلے بیان کیا تھا کہ مستطیلوں کا رقبہ ہسٹوگرام میں دئے گئے تعدد کے تناسب سے ہوتا ہے۔ پہلے یہ مسئلہ نہیں اٹھا تھا۔ کیوں کہ تمام مستطیلوں کی چوڑائی برابر تھی کیوں کہ یہاں مستطیلوں کی چوڑائی مختلف ہے۔ اس لئے یہ ہسٹوگرام صحیح تصویر نہیں دیتا۔ مثال کے طور پر یہ 100-70 کے وقفہ میں 70-60 کے وقفہ سے زیادہ تعدد ہوتا ہے۔

اس لئے یہ ضرورت ہے کہ ہم مستطیلوں کی لمبائیوں میں کچھ تبدیلیاں کریں تا کہ ان کا رقبہ ان کے تعدد کے پھر تناسب میں ہو جائے۔

اس میں کئے گئے اقدام مندرجہ ذیل ہیں

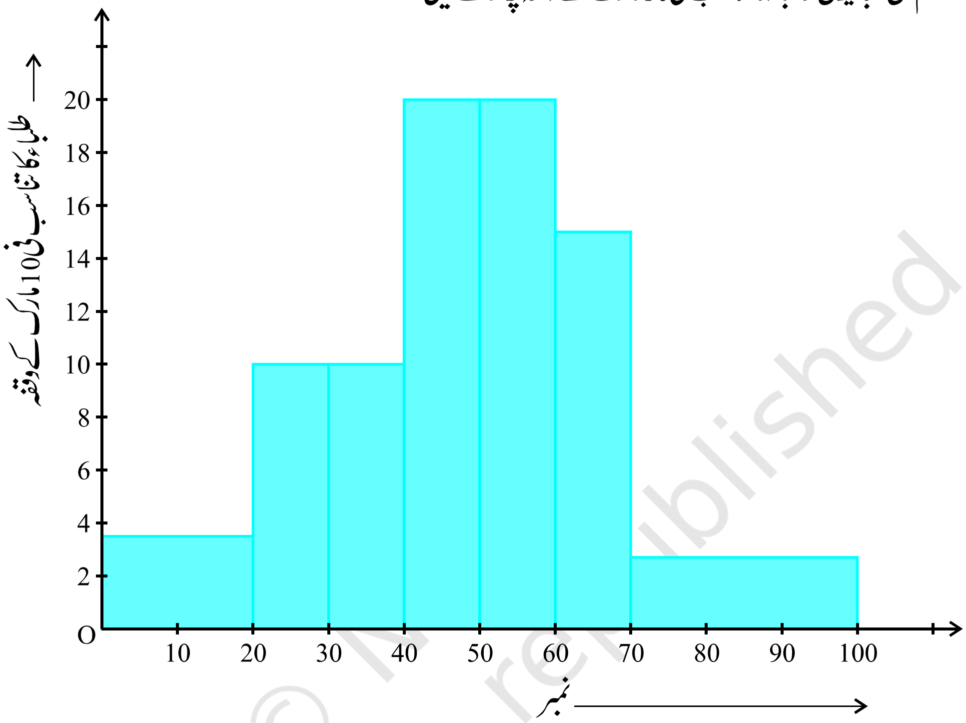
1. ایک سب سے چھوٹے کلاس سائز والے ایک کلاس وقفہ کو چنئے۔ مذکورہ بالا مثال میں سب سے چھوٹا کلاس سائز 10 ہے۔

2. اس طرح سے مستطیل کی لمبائی تبدیل ہو کر کلاس سائز 10 کے متناسب میں ہو جاتی ہے۔ مثال کے طور پر جب کلاس سائز 20 ہے۔ مستطیل کی لمبائی 7 ہے۔ اس لئے جب کلاس سائز 10 ہے تو مستطیل کی لمبائی ہے $\frac{7}{10}$ 10 = 3.5

اسی طرح سے آگے بڑھتے ہوئے ہمیں مندرجہ ذیل جدول حاصل ہوتا ہے:

نمبر	تعداد	کلاس کی چوڑائی	مستطیل کی لمبائی
0-20	7	20	$\frac{7}{20}\times 10 = 3.5$
20-30	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 - 10$
30-40	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 - 10$
40-50	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 = 20$
50-60	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 - 20$
60-70	15	10	$\frac{15}{10}\times 10 = 15$
70-100	8	30	$\frac{8}{30}\times 10 - 2.67$

کیوں کہ ہم نے ہر ایک حالت میں 10 نمبروں کے لئے ان لمبائیوں کی تحسیب کی ہے
ہم ان لمبائیوں کو طلباء کا تناسب فی 10 مارک کے وقفہ پکارتے ہیں



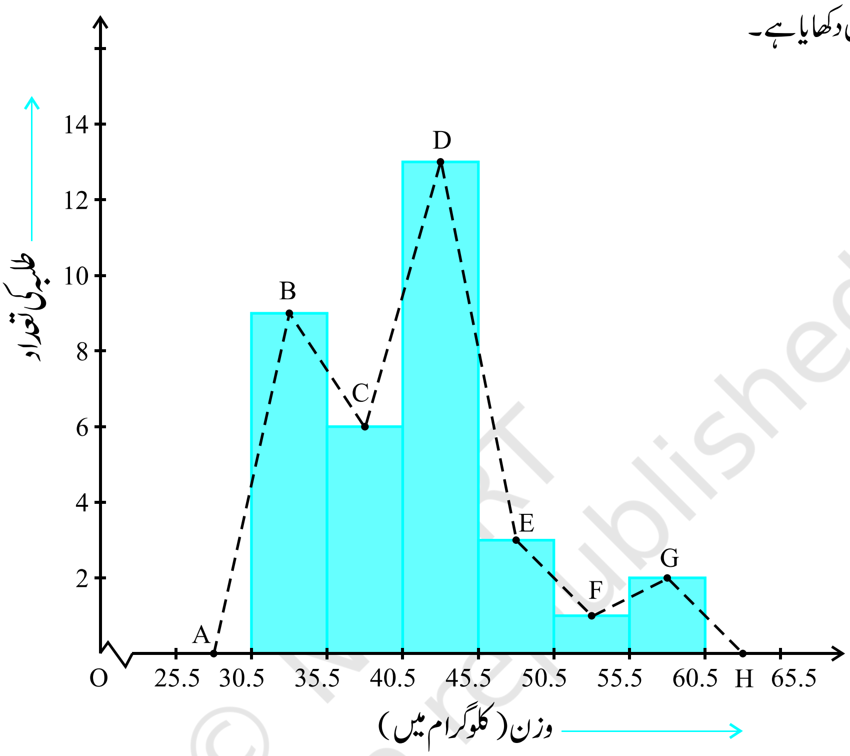
شکل 14.5

اس طرح سے صحیح ہسٹو گرام جسکی چوڑائیاں مختلف ہیں شکل 14.5 میں دیا گیا ہے

(C) تعدد کثیر (Frequency Ploygon)

مقداری آنکڑوں اور ان کے تعدد کو ظاہر کرنے کے لئے ایک اور طریقہ ہے۔ یہ ایک کثیر ضلعی ہے۔اس سے ہماری مراد کیا ہے یہ دیکھنے کے لئے شکل 14.3 میں دئے گئے ہسٹو گرام کو دیکھیے ۔ آیئے ان میں متصل مستطیلوں کے اوپری ضلعوں کے وسطی نقاط کو قطعہ خط سے ملا دیجیے ان وسطی نقاط کو B، C، D، E، F، G نام دیجئے۔ جب ان کو قطعات خط سے ملایا گیا تو ہمیں شکل BCDEFG حاصل ہوئے۔ کثیر ضلعی کو مکمل کرنے کے لئے ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ ایک کلاس وقفہ ایسا ہے جس کا تعدد 0 ہے۔ اور جو 5-35-30.5 سے پہلے ہے اور 5-60-55.5 کے بعد میں ہے اور ان کے وسطی نقاط بالترتیب A اور H

ہیں اس طرح سے ABCDEFGH شکل 14.3 میں دکھائے گئے آنکڑوں کی نظیری تعدد کثیر ضلعی ہے۔ اس کو ہم نے شکل 14.6 میں دکھایا ہے۔



شکل 14.6

© NCERT not to be republished

حالاں کہ سب سے چھوٹے کلاس وقفہ 5 سے پہلے اور سب بڑے کلاس۔ وقفہ کے بعد کوئی کلاس نہیں ہے۔ صفر تعدد والی دو کلاسوں کو شامل کرنے سے تعدد کثیر ضلعی کا رقبہ ہسٹو گرام کے رقبہ کے برابر ہو جاتا ہے۔ نتیجہ کے طور پر تعدد کثیر ضلعی کا رقبہ کل تعداد کے مناسب ہوگا۔ کیا آپ معلوم کر سکتے ہیں کہ تعداد کثیر ضلعی کا رقبہ ہسٹو گرام کے رقبہ کے برابر کیوں ہوتا ہے؟

[اشارہ: متماثل مثلثوں کی خصوصیات استعمال کیجیے]

مسئلہ جب پیدا ہوتا ہے جب پہلی کلاس سے پہلے کوئی کلاس نہیں ہوتی۔ اس لئے ایسی ایک صورت حال پر غور کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ اس صورت حال میں تعدد کثیر ضلعی کس طرح بنایا جاتا ہے

مثال 8: ایک کلاس ٹیسٹ میں 51 طلباء کے ذریعہ حاصل کردہ نمبروں 100 میں سے' پر جدول 14.9 میں دیئے گئے ہیں:

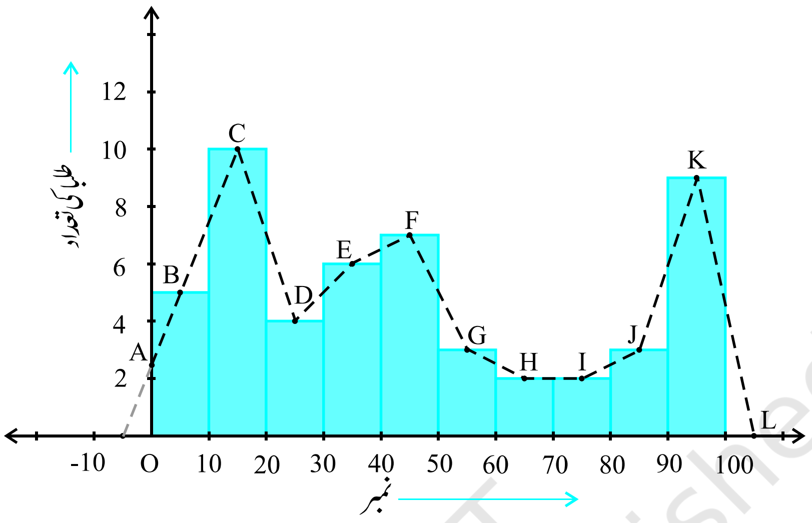
جدول 14.9

طلباء کی تعداد	نمبر
5	0-10
10	10-20
4	20-30
6	30-40
7	40-50
3	50-60
2	60-70
2	70-80
3	80-90
9	90-100
51	کل

اس تعدد بٹاؤ جدول کے نظیری تعدد کثیر ضلعی بنائیے

حل: آیئے سب سے پہلے آنکڑوں کا ہسٹوگرام بناتے ہیں اور مستطیلوں کے اوپری ضلعوں کے وسطی نقاط کو بالترتیب B، C، D، E، F، G، H، I، J، K مارک کیجیے یہاں پہلی کلاس 0-10 ہے یہاں 0-10 سے پہلے کلاس معلوم کرنے کے لئے افقی خط کو منفی سمت میں بڑھاتے ہیں۔ اور کلاس وقفہ (-10-0) کا وسطی نقطہ معلوم کرتے ہیں۔ پہلا سرے کا نقطہ یعنی B کو افقی محور پر منفی سمت میں صفر تعدد والے وسطی نقطہ سے ملا دیجیے۔ اس نقطہ جہاں یہ قطعہ خط افقی خط سے ملتا ہے' کو A مارک کرتے ہیں۔ مان لیجیے نقطہ L' دیئے ہوئے آخری کلاس وقفہ سے اگلی کلاس کا وسطی نقطہ ہے تب ABCDEFGHIJKL ایک تعدد کثیر ضلعی ہے جو شکل 14.7 میں دکھائی گئی ہے۔

© not to be republished



شکل 14.7

تعدادکثیرضلعی کو آزادانہ طور پر ہم ہسٹوگرام بنائے بغیر بھی بنا سکتے ہیں۔اس کے لیے ہمیں ان تمام کلاس۔وقفوں کے وسطی نقاط کی ضرورت ہوتی ہے جو ان آنکڑوں میں استعمال ہوئے ہیں۔کلاس۔وقفوں کے ان وسطی نقاط کو ہم کلاس مارکس کہتے ہیں کسی وقفہ کے کلاس مارک معلوم کرنے کے لیے ہم اوپری کلاس حد اور نچلی کلاس حد کو جمع کر کے 2 سے تقسیم کر دیتے ہیں۔اس طرح سے

نچلی حد+اوپری حد = کلاس مارک

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں

مثال 9: ایک شہر میں مصارف زندگی کے اشاریہ کے مطالعہ میں ہفتہ واری مشاہدات مندرجہ ذیل ہیں:

جدول 14.10

ہفتوں کی تعداد	معارف زندگی کا اشاریہ
5	140-150
10	150-160
20	160-170
9	170-180
6	180-190
2	190-200
52	کل

© NCERT not to be republished

مندرجہ بالا آنکڑوں کی تعدد کثیر ضلعی بنائیے (ہسٹوگرام بنائے بغیر)

حل: کیوں کہ ہمیں ہسٹوگرام کا استعمال کئے بغیر تعدد کثیر ضلعی بنائے ہے۔آئے اوپر دیئے گئے کلاس وقفوں 140-150 ‘ 150-160 کے کلاس مارک معلوم کرتے ہیں۔ 140-150 کے لئے اوپری حد=150 اور نچلی حد=140

اس لئے $\frac{150+140}{2} = \frac{290}{2} = 145$ کلاس مارک

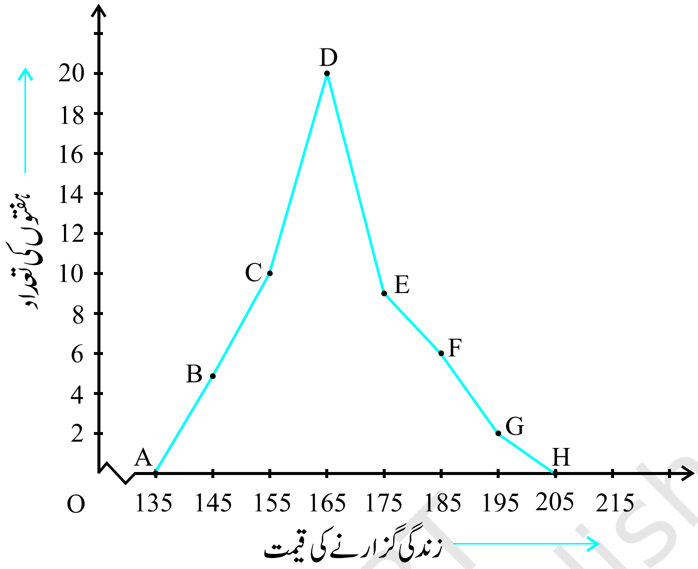
اسی طرح سے ہم دوسری کلاسوں کے بھی کلاس مارک معلوم کرتے ہیں۔اس طرح سے حاصل نیا جدول نیچے دکھایا گیا ہے

جدول 14.11

کلاس۔وقفہ یا کلاسیں	کلاس مارکس	تعدد
140-150	145	5
150-160	155	10
160-170	165	20
170-180	175	9
180-190	185	6
190-200	195	2
کل		52

ہم کلاس مارکس افقی محور پر لے کر اور تعدد عمودی محور پر لے کر تعدد کثیر ضلعی بنا سکتے ہیں۔اس کے لئے ہم پلاٹ کئے گئے نقاط B (145,5) ‘ C(155,10)‘ D (165,20) ‘ E(175,9)‘ F(185,6) اور G(195,2) کو قطعہ خطوط سے ملانا ہوگا۔ہمیں 130-140 کلاس کے نظیری کلاس مارکس کے نظیری نقاط کو پلاٹ کرنا نہیں بھولنا چاہیے (140-150) سے تھوڑا پہلے تعدد 0 ہے۔یعنی (135,0) A اور نقطہ H(205,0) ‘ایک دم G (195,2) کے بعد ہیں۔اس طرح سے نتیجہ میں ملی تعدد کثیر ضلعی ABCDEFGH ہوگی۔دیکھئے شکل 14.8

not to be republished



شکل 14.8

تعدد کثیر ضلعی کا استعمال جب ہوتا ہے جب آنکڑے لگا تار اور بڑے ہوتے ہیں۔ایک ہی قسم کے دو مختلف آنکڑوں کا موازنہ کرنے میں یہ بہت مفید ہے۔مثال کے طور پر ایک ہی کلاس کے دو سیکشنوں کی کارکردگی کا موازنہ کرنا۔اب تک آپ سمجھ چکے ہوں گے کہ بار گراف، ہسٹو گرام اور تعدد کثیر ضلعی کا استعمال کہاں اور کیسے ہوتا ہے۔

مشق 14.3

ا. دنیا بھر میں 15-44 (سالوں میں) عمر کی خواتین کے درمیان موت اور بیماری کی وجہ معلوم کرنے کے لیے ایک تنظیم نے ایک سروے کیا۔جس سے مندرجہ ذیل اعداد و شمار (% میں) حاصل ہوئے:

S.N.		خواتین کے مرنے کی % وجوہات
1.	تولیدی صحت کی وجہ	31.8
2.	دماغی صحت کی وجہ سے	25.4
3.	چوٹ کی وجہ سے	12.4
4.	دل کی حالت	4.3
5.	سانس کی وجہ	4.1
6.	دوسری وجوہات	22.0

(i) دی ہوئی اطلاعات کو گراف سے ظاہر کیجیے

(ii) دنیا بھر میں خواتین کی بیماری اور موت کی سب سے بڑی وجہ کیا ہے؟

(iii) اپنے استاد کی مدد سے معلوم کیجیے کہ مذکورہ بالا وجہ (ii) کو بیماری یا موت کی سب سے بڑی وجہ ہونے میں کون سی دو باتیں یا چیزیں اہم کردار ادا کرتی ہیں۔

2. مندرجہ ذیل آنکڑے ہندوستانی سماج کے مختلف سیکشنوں میں لڑکیوں کی تعداد فی ہزار لڑکوں کی (نزدیکی دہائی پر) تعداد سے نیچے دی ہوئی ہے:

سیکشن	فی ہزار لڑکوں پر لڑکیوں کی تعداد
SC	940
ST	970
غیر SC/ST	920
پچھڑا ہوا طبقہ	950
غیر پچھڑا ہوا طبقہ	920
دیہاتی	930
شہری	910

(i) مندرجہ بالا اطلاعات کو گراف سے ظاہر کیجیے:

(ii) گراف سے آپ کون سے دو نتائج اخذ کرتے ہیں۔ ان کا جواز بھی دیجیے۔

3. صوبائی اسمبلی انتخابات میں مختلف سیاسی جماعتوں کے ذریعہ جیتی گئی سیٹوں کے نتیجہ مندرجہ ذیل ہیں:

سیاسی پارٹی	A	B	C	D	E	F
جیتی ہوئی سیٹ	75	55	37	29	10	37

(i) انتخابات کے نتائج کو ظاہر کرنے کے لیے مناسب گراف بنائیے

(ii) کس سیاسی پارٹی نے سب سے زیادہ سیٹیں جیتیں؟

4. 40 پودوں کی پتیوں 1 کی لمبائی کی پیائش ملی میٹر میں اور حاصل آنکڑوں کو مندرجہ ذیل جدول میں ظاہر کیا گیا ہے:

لمبائی (mm میں)	پتیوں کی تعداد
118-126	3
127-135	5
136-144	9
145-153	12
154-162	5
163-171	4
172-180	2

(i) دئے ہوئے آنکڑوں کو ظاہر کرنے کے لئے ایک مناسب گراف (اشارہ: پہلے Class Intervels conti'nuos بنائیے)

(ii) کیا انھیں آنکڑوں کے لئے کوئی دوسری مناسب گرافی اظہار بھی ہے؟

(iii) کیا یہ نتیجہ اخذ کرنا درست ہے کہ زیادہ تر پتیوں کی لمبائی 153 ملی میٹر ہے؟ کیوں؟

5. مندرجہ ذیل جدول میں 400 نیون لیمپ کی کل زندگی کا وقت دیا ہوا ہے

زندگی کا وقت (گھنٹوں میں)	لیمپ کی تعداد
300-400	14
400-500	56
500-600	60
600-700	86
700-800	74
800-900	62
900-1000	48

(i) ہسٹو گرام کی مدد سے دی ہوئی اطلاعات کو ظاہر کیجئے۔

© NCERT not to be republished

(ii) کتنے لیمپوں کی زندگی 700 گھنٹوں سے زیادہ ہے؟

.6 مندرجہ ذیل دو جدول میں دو سیکشنوں کے طلباء کے ذریعہ حاصل کردہ نمبروں کا بٹاؤ دیا ہوا:

سیکشن A		سیکشن B	
نمبر	تعدد	نمبر	تعدد
0-10	3	0-10	5
10-20	9	10-20	19
20-30	17	20-30	15
30-40	12	30-40	10
40-50	9	40-50	1

دونوں سیکشنوں کے طلباء کے نمبروں کو ایک ہی گراف میں تعدد کثیر ضلعی سے ظاہر کیجئے

.7 ایک کرکٹ میچ میں پہلی 60 گیندوں پر دو ٹیموں کے ذریعہ بنائے گئے رن مندرجہ ذیل ہیں:

گیندوں کی تعداد	ٹیم A	ٹیم B
10-6	2	5
7-12	1	6
13-18	8	2
19-24	9	10
25-30	4	5
31-36	5	6
37-42	6	3
43-48	10	4
49-54	6	8
55-60	2	10

دونوں ٹیموں کے آنکڑوں کو ایک ہی گراف میں تعدد کثیر ضلعی سے ظاہر کیجیے

8. ایک پارک میں کھیلتے ہوئے مختلف عمروں کے بچوں کی تعداد کو ایک بلا منصوبہ سروے میں مندرجہ ذیل پایا گیا:

عمر (سالوں میں)	بچوں کی تعداد
1-2	5
2-3	3
3-5	6
5-7	12
7-10	9
10-15	10
15-17	4

مندرجہ بالا آنکڑوں کو ہسٹوگرام سے ظاہر کیجیے

9. ایک ٹیلیفون کی ڈائرکٹری سے بلا منصوبہ 100 سرنیم (sur names) چنے گئے۔ سرنیم میں موجود انگلش کے حروفوں کا تعدد بٹاؤ نیچے دیا ہوا ہے:

حرفوں کی تعداد	سرنیم کی تعداد
1-4	6
4-6	30
6-8	44
8-12	16
12-20	4

(i) اطلاعات کو ظاہر کرنے کے لیے ہسٹوگرام بنائیے۔

(ii) وہ کلاس وقفہ لکھیے جس میں سب سے زیادہ سرنیم ہیں

© NCERT not to be republished

14.5 مرکزی رجحان کی پیمائش (Measures of Central Tendency)

اس بات کے شروع میں ہم نے آنکڑوں کو مختلف شکلوں میں تعداد بٹاؤ جدول، بارگراف، ہسٹو گرام اور تعدد کثیر ضلعی کے ذریعہ ظاہر کیا۔ اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ کیا ہم ہمیشہ ان آنکڑوں کا مطالعہ اس لئے کرتے ہیں کہ ان کا مطلب واضح ہو یا ان آنکڑوں کے کچھ خاص نمائندوں پر غور کر کے ہم ان سے کچھ اہم نکات اخذ کر سکیں۔ یہ مرکزی رجحان کی پیمائش یا اوسط سے ممکن ہے۔ اس صورت حال پر غور کیجئے جب میری اور ہری نے اپنی کاپی حاصل کیں۔ ٹیسٹ میں 10 نمبر والے کل 5 سوال تھے ان کے حاصل کردہ نمبر مندرجہ ذیل ہیں:

سوال کا نمبر	1	2	3	4	5
میری کا اسکور	10	8	9	8	7
ہری کا اسکور	4	7	10	10	10

کاپی لینے کے بعد دونوں نے اپنے اوسط اسکور اس طرح پائے

میری کا اوسط اسکور $= \frac{52}{5} = 8.4$

ہری کا اوسط اسکور $= \frac{41}{5} = 8.2$

میری کی کارکردگی ہری سے بہتر ہے کیوں کہ اس کا اوسط اسکور ہری سے زیادہ ہے۔ لیکن ہری اس بات سے متفق نہیں ہے۔ اس نے اسکور کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں رکھا اور بیچ کا اسکور نکالا جیسا کہ نیچے دیا ہوا ہے:

میری کا اسکور	7	8	8	9	10
ہری کا اسکور	4	7	10	10	10

ہری نے کہا کیوں کہ اسکے بیچ کا اسکور میری کے بیچ کے اسکور سے زیادہ ہے اس لئے اس کی کارکردگی میری کی کارکردگی سے بہتر ہے۔ لیکن میری اس بات سے مطمئن نہیں ہوئی۔ اس کو مطمئن کرنے کے لیے ہری نے ایک اور حکمت عملی اختیار کی۔ اس نے کہا کہ میری کے مقابلہ میں اُس نے 10 نمبر 3 مرتبہ حاصل کئے جب کہ میری نے صرف ایک مرتبہ اس لئے اس کی کارکردگی میری سے بہتری ہے۔

میری اور ہری کے درمیان اس مسئلہ کو حل کرنے کے لئے اپنی بات کو ثابت کرنے کے لئے ان کے ذریعہ اپنائی گئی تین

© NCERT not to be republished

پیمائشوں کو دیکھئے۔ان میں کون سی بات بہتر کارکردگی کو طے کرے گی۔

پہلی حالت میری کے ذریعہ معلوم کئے گئے اوسط اسکور کو درمیانہ (mean) کہتے ہیں۔اپنی بحث کے سلسلہ میں ہری کے ذریعہ استعمال کی گئی وسطی اسکور وسطانیہ (mediam) ہے۔ہری کے ذریعہ دوسری حالت میں سب زیادہ بار آنے والے نمبروں کو موڈ Mode کہتے ہیں۔

آیئے پہلے ہم درمیانہ (Mediam) کے بارے میں تفصیل سے پڑھتے ہیں

کچھ مشاہدات کی قدروں کے حاصل جمع کو اُن مشاہدات کی کل تعداد سے تقسیم کرنے پر حاصل تقسیم کو درمیانہ کہتے ہیں۔

اس کو ہم علامت $\bar{x}$ سے ظاہر کرتے ہیں اور اس کو پڑھتے ہیں x بار آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں:

مثال 10: 5 لوگوں سے پوچھا گیا کہ وہ اپنے فرقہ میں ایک ہفتہ کے اندر سماجی خدمت میں کتنا وقت صرف کرتے ہیں۔انھوں نے کہا 10' 7' 13' 20 اور 15 گھنٹے۔ایک ہفتہ میں سماجی خدمت کے لئے ان کے ذریعہ لگایا درمیانہ وقت معلوم کیجیے۔

حل: ہم پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں کہ کچھ مشاہدات کا درمیانہ = $\dfrac{\text{تمام مشاہدات کا حاصل جمع}}{\text{مشاہدات کی کل تعداد}}$

درمیانہ معلوم کرنے کے عمل کو مختصر بنانے کے لئے ایک متغیر x کو استعمال کرتے ہیں جو i th مشاہدہ کو ظاہر کرتا ہے i 1 سے 5 تک کی کوئی سی بھی قدر لے سکتا ہے۔اس طرح سے ہمارا پہلا مشاہدہ x_1 دوسرا مشاہدہ x_2 اور اسی طرح سے پانچواں مشاہدہ x_5 مزید $x_1 = 10$ کا مطلب ہے کہ پہلے مشاہدہ کی قدر جس کو x_1 سے ظاہر کیا جاتا ہے 10 اسی طرح سے $x_2 = 7$ ' $x_3 = 13$ ' $x_4 = 20$ اور $x_4 = 20$

اس لئے درمیانہ = $\dfrac{\text{تمام مشاہدات کا حاصل جمع}}{\text{مشاہدات کی کل تعداد}}$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$= \frac{10 + 7 + 13 + 20 + 5}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

اس طرح سے 5 لوگوں کے ذریعہ سماجی خدمت میں صرف کیا گیا ایک ہفتے کا درمیانہ وقت 13 گھنٹے ہے اب اگر ہمیں 30 لوگوں

© NCERT not to be republished

کے ذریعہ سماجی خدمت میں صرف کئے گئے وقت کا درمیانہ معلوم کرنا ہوتو اس طرح $x_1 + x_2 + x_3 ... + x_{30}$ سے لکھنا کافی دشوار کام ہے۔اس سے بچنے کے لیے ہم ایک یونانی علامت $\sum$ (حرف سگما کے لئے) حاصل جمع کے لئے استعمال کرتے ہیں۔اس لئے $x_1 + x_2 + x_3 ... + x_{30}$ لکھنے کے بجائے ہم $\sum_{i=1}^{30} x_i$ لکھتے ہیں اور ہم اس کو اس طرح پڑھتے ہیں۔ x کا حاصل جمع جب 12 سے لے کر 30 تک ہو اس لئے

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x}{30}$$

اسی طرح سے X مشاہدات کے لیے

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x}{n}$$

مثال 11: مثال 2 میں دیئے گئے ایک اسکول کی نویں جماعت کے 30 طلباء کے ذریعہ حاصل کئے گئے نمبروں کا درمیانہ معلوم کیجئے۔

حل: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ...x_{30}}{30}$ کا استعمال کرتے ہوئے درمیانہ ہے

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 10 + 20 - 36 + 92 + 95 + 40 - 50 + 56 + 60 + 70 - 92 + 88$$

$$+ 80 + 70 + 72 + 70 + 36 + 40 + 36 + 40 + 92 + 40 + 50 + 50$$

$$+ 56 + 60 + 70 + 60 + 60 + 88 = 1779$$

$$\bar{x} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

کیا یہ عمل دیر طلب ہے؟ کیا ہم اس عمل سے بچ سکتے ہیں؟ نوٹ کیجئے کہ ہم نے ان آنکڑوں کا ایک تعدد جدول بنایا تھا (جدول 14.1 دیکھئے) اسی جدول سے پتہ چلتا ہے کہ 1 طالب علم نے 10 نمبر، ایک طالب علم نے 20 نمبر، 3 طلباء نے 36 نمبر، 4 طلباء نے 40 نمبر، 3 طلباء نے 50 نمبر، 2 طلباء نے 26 نمبر، 4 طلباء نے 60 نمبر، 4 طلباء نے 70 نمبر، 1 طالب علم نے 72 نمبر، ایک طالب علم نے 80 نمبر، 2 طلباء نے 88 نمبر، 3 طلباء نے 60 نمبر، 4 طلباء نے 70 نمبر، 1 طالب نے 72 نمبر، ایک طالب علم نے 80 نمبر، 2 طلباء نے 88 نمبر، 3 طلباء 92 نمبر اور ایک طالب علم نے 95 نمبر حاصل کئے۔

اس طرح سے حاصل کردہ نمبر

$=(1\times10)+(1\times20)+(3\times36)+(4\times40)+(3\times50)+(2\times56)+$
$(4\times60)+(4\times70)+(1\times72)+(1\times80)+(2\times88)+(3\times92)+$
(1×95)

نوٹ کیجئے کہ یہ ہے $\sum_{i=1}^{13} f_i x_i = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots f_{13}x_{13}$

$=10+20+108+160+150+112+240+280+72+80+$
$+176+276+95$
$=1779$

اب کل مشاہدات کی تعداد $=1+1+3+4+3+2+4+4+1+1+2+3+1$

نوٹ کیجئے یہ ہے $\sum_{i=1}^{13} f_i = f_1 + f_2 + \ldots f_{13}$

اس لئے $x =$ ______ $\left(= \dfrac{\sum_{i=1}^{13} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{13} f_i x_i} \right)$

$=\dfrac{1779}{30}$

اس عمل کو ہم مندرجہ ذیل شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں

جدول 14.12

نمبر (x_i)	طلباء کی تعداد (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112

60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
	$\sum_{i=1}^{13} f_i = 30$	$\sum_{i=1}^{13} f_i x_i = 1779$

اس طرح سے غیرمرتب تعدد بٹاؤ کے لئے درمیانہ معلوم کرنے کے لئے آپ مندرجہ ذیل فارمولا استعمال کر سکتے ہیں

$$\bar{x} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{13} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{13} f_i} \right)$$

آیئے اب واپس ہری اور میری کی بحث کی طرف واپس چلتے ہیں اور دوسری حالت پر غور کرتے ہیں جہاں ہری نے میچ کا اسکور معلوم کر کے اپنی کارکردگی کو بہتر بتایا تھا۔ جیسا کہ پہلے یہ بیان کیا جا چکا ہے کہ مرکزی رجحان کی اس پیائش کو وسطانیہ کہتے ہیں۔ وسطانیہ دی ہوئی مشاہدات کی وہ قدر ہے جو ان کو دو برابر حصوں میں منقسم کرتی ہے۔ اس لئے جب آنکڑے بڑھتی (یا گھٹتی) ترتیب میں لکھے ہوں تو غیر مرتب آنکڑوں کے وسطانیہ کی تحسیب ہم مندرجہ ذیل طریقہ سے کرتے ہیں۔

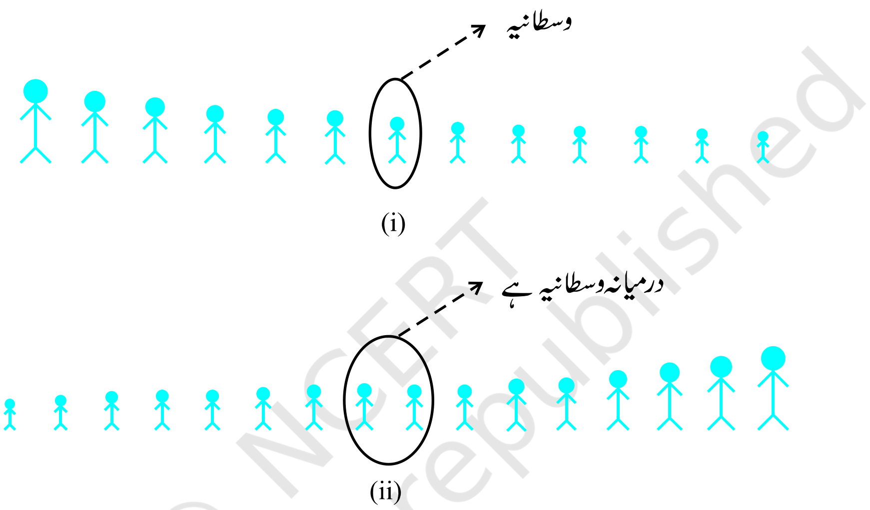
جب مشاہدات کی تعداد طاق ہوتی ہے تب وسطانیہ کی قدر $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ واں مشاہدہ ہوتا ہے

مثال کے طور پر اگر $n = 13$ تب $\left(\frac{13+1}{2}\right)$ ویں مشاہدہ کی قدر یعنی ساتواں مشاہدہ وسطانیہ ہو گیا شکل دیکھئے

(i) جب مشاہدات کی تعداد جفت ہوتی ہے تب وسطانیہ (n) ویں اور $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں مشاہدات کا درمیانہ Mean ہوتا ہے۔

© NCERT not to be republished

مثال کے طور پر اگر n=16 تب $\frac{16}{2}$ ویں اور $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ ویں مشاہدات کا درمیانہ یعنی 8 ویں اور 9 ویں مشاہدات کی قدروں کے درمیانہ وسطانیہ ہوگا (شکل (ii) 14.9 دیکھئے)



شکل (i) (ii) 14.9

آیئے اس کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کریں:

مثال 12: ایک کلاس کے 9 طلباء کی اونچائی (cm میں) نیچے دی گئی ہے

155	160	145	149	150	147	152	149	148

ان آنکڑوں کا وسطانیہ معلوم کیجیے

حل: سب سے پہلے آنکڑوں کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھئے جو ذیل میں دی گئی ہے:

144	145	147	148	149	150	152	155	160

کیوں کہ طلباء کی تعداد 9 ہے جو کہ ایک طاق عدد ہے ہم $\left(\frac{n+1}{2}\right)=\left(\frac{9+1}{2}\right)$ یعنی 5 ویں طالب علم کی اونچائی معلوم

© NCERT not to be republished

کرکے وسطانیہ معلوم کرتے ہیں جو کہ 149cm ہے۔اس لئے اونچائیوں کا وسطانیہ 149cm ہے

مثال 13: میچوں کے ایک سلسلہ (serial) میں ایک کبڈّی ٹیم کے ذریعہ اسکور کئے گئے پوائنٹ مندرجہ ذیل ہیں

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

ٹیم کے ذریعہ اسکور کئے گئے پوائنٹس کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔

حل: ٹیم کے ذریعہ اسکور کئے گئے points کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے:

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48

یہاں 16 ارکان ہیں اس لئے یہاں دو وسطی رُکن ہیں یعنی $\frac{16}{2}$ اور $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ یعنی 8 ویں اور 9 ویں ارکان

اس طرح سے 8 ویں اور 9 ویں قدروں کا درمیانہ وسطانیہ ہے یعنی $12=\frac{10+14}{2}$ وسطانیہ اس طرح سے کبڈی ٹیم کے ذریعہ اسکور کئے گئے points کا وسطانیہ 12 ہے۔

آیئے پھر واپس ہری اور میری کے مسئلہ کی طرف چلتے ہیں

اوسط معلوم کرنے کے لئے ہری کے ذریعہ استعمال کی گئی تیسری پیمائش mode ہے

mode مشاہدہ کی وہ قدر ہوتی ہے جو سب سے زیادہ مرتبہ ظاہر ہوتی ہے۔یعنی سب سے زیادہ تعدد والے مشاہدہ کو موڈ کہتے ہیں۔

ریڈیمیڈ گارمنٹ اور جوتے کی انڈسٹری مرکزی رُجحان کی اس پیمائش کا بہت زیادہ استعمال کرتے ہیں موڈ کی معلومات کا استعمال کرکے یہ انڈسٹریز طے کرتی ہیں کہ پروڈکٹ (مصنوعات) کے کون سے سائز کی پیداوار زیادہ کرنی ہے۔

آیئے اس کی وضاحت ایک مثال لےکر کرتے ہیں:

مثال 14: 20 طلباء کے ذریعہ حاصل کئے مندرجہ ذیل نمبروں (10 میں سے) کا موڈ معلوم کیجئے۔

4, 6, 5, 9, 3, 2, 7, 7, 6, 5, 4, 9, 10, 10, 3, 4, 7, 6, 9, 9

حل: ہم ان اعداد کی مندرجہ ذیل طریقہ سے ترتیب دیتے ہیں۔

© NCERT not to be republished

2,3,3,4,4,4,5,5,6,6,6,7,7,7,9,9,9,9,10,10,

یہاں 9 سب سے زیادہ مرتبہ ظاہر ہوتا ہے اس لئے موڈ 9 ہے

مثال 15: فیکٹری کے ایک چھوٹے یونٹ پر غور کیجئے جہاں 5 ملازمین ہیں۔ ایک سپر وائزر اور 4 مزدور ہیں۔ مزدور 5000 روپے مہینہ تنخواہ لیتے ہیں جب کہ سپر وائزر 15000 روپے تنخواہ پاتا ہے۔ فیکٹری کے اس یونٹ کی تنخواہ کا درمیانہ، وسطانیہ اور موڈ معلوم کیجیے۔

حل:

$$= \frac{500 + 5000 + 5000 + 5000 + 15000}{5}$$

$$\text{درمیانہ} = \frac{35000}{5} = 7000$$

اس طرح سے درمیانہ تنخواہ 7000 روپے مہینہ ہے

وسطانیہ حاصل کرنے کے لئے ہم تنخواہ کو بڑھتی ترتیب میں لکھتے ہیں

5000, 5000, 5000, 5000, 15000

کیوں کہ فیکٹری میں ملازمین کی تعداد 5 ہے۔ اس وسطانیہ $\frac{6}{2} = \frac{5+1}{2}$ مشاہدہ کی قدر ہوگی۔ اس لئے 3rd مشاہدہ کی قدر درمیانہ ہوگی یعنی 5000 روپے۔

تنخواہ کا موڈ معلوم کرنے کے لئے یعنی موڈل تنخواہ ہم دیکھتے ہیں کہ 5000, 5000, 5000, 5000+, 15000 میں 5000 سب سے زیادہ مرتبہ ظاہر ہو رہا ہے اس لئے موڈل تنخواہ 5000 روپے مہینہ ہے۔

اب اوپر دی گئی مثال میں دیے ہوئے آنکڑوں کی مرکزی رجحان کی تین پیائشوں کا موازنہ کیجیے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درمیانہ تنخواہ 7000 روپے کسی بھی تنخواہ کا کوئی تقریبی اندازہ بھی نہیں دیتی جب کہ وسطانیہ اور موڈل تنخواہ 5000 روپے زیادہ مؤثر انداز میں آنکڑوں کا خلاصہ کرتی ہے۔

انہائی قدروں سے درمیانہ کافی اثر انداز ہوتا ہے۔ درمیانہ کی یہ سب سے بڑی کمی ہے۔ کیوں کہ آنکڑوں میں موجود انتہائی قدروں سے وسطانیہ اور موڈ پر اثر نہیں پڑتا اس لئے اس مثال میں یہ دونوں اوسط کا بہتر اندازہ دیتے ہیں آیئے پھر واپس ہری اور میری کے مسئلہ کی طرف واپس چلتے ہیں اور مرکزی رجحان کی تینوں پیائشوں کا موازنہ کرتے ہیں۔

	میری	ہری
درمیانہ	8.4	8.2
وسطانیہ	8	10
موڈ	8	10

رُجحان کی یہ پیمائشیں یہ بتانے کے لئے کافی نہیں ہیں کہ کون سا طالب علم بہتر ہے۔ ہمیں اس کے علاوہ بھی اور کچھ چاہئے جو ہم اگلی کلاسوں میں پڑھیں گے۔

© NCERT not to be republished

مشق 14.4

1. 10 میچوں کی ایک سیریز میں ایک ٹیم کے ذریعہ اسکور کئے گئے goal کی تعداد مندرجہ ذیل ہے۔

2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

ان اسکور کا درمیانہ، وسطانیہ اور موڈ معلوم کیجئے

2. 15 طلباء کو دئے گئے ریاضی کے ایک ٹیسٹ میں مندرجہ ذیل نمبر (100 میں سے) ریکارڈ کئے گئے۔

41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60

ان نمبروں کا درمیانہ، وسطانیہ اور موڈ معلوم کیجئے

3. مندرجہ ذیل مشاہدات کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں دکھایا گیا ہے۔ اگر آنکڑوں کا درمیانہ 63 ہے تو x کی قدر معلوم کیجئے

29, 32, 48, 50, x, x+2, 72, 78, 84, 95

4. مندرجہ ذیل کا موڈ معلوم کیجئے:

(i) 7, 9, 12, 13, 7, 12, 15, 7, 12, 7, 25, 18, 7,

(ii) 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18,

5. مندرجہ ذیل جدول میں دئی گئی 60 مزدوروں کی درمیانہ تنخواہ معلوم کیجئے

مزدوروں کی تعداد	تنخواہ (روپیوں میں)
16	3000
12	4000
10	5000
8	6000
6	7000
4	8000
3	9000
1	10000

6. ایک ایسی حالت (Situation) کی مثال دیجئے جس میں

(i) مرکزی رجحان کی مناسب پیائش درمیانہ کی جا سکے۔

(ii) مرکزی رجحان کی مناسب پیائش درمیانہ کے ذریعہ نہ کی جا سکے بلکہ وسطانیہ کے ذریعہ کی جا سکے۔

14.7 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں

1. کسی خاص مقصد کے تحت جمع کی جانے والی حقیقتیں یا اشکال اعداد و شمار کہلاتی ہیں۔

2. شماریات آنکڑوں کو اکٹھا کرنا، ان کو منظّم کرنا، ان کا تجزیہ کرنا، اور ان کی ترجمانی کرنے کے متعلق پڑھائی ہے۔

3. اعداد و شمار کو گراف کے مختلف طریقوں بار گراف، ہسٹوگرام اور تعدد کثیر ضلعی میں کیسے ظاہر کیا جاتا ہے۔

4. غیر مرتب اعداد و شمار کے مرکزی رجحان کی تین پیائش ہیں۔

(i) درمیانہ: اسکور تمام مشاہدات کی قدروں کے حاصل جمع کو مشاہدات کی کل تعداد سے تقسیم کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کو ہم $\bar{x}$ سے ظاہر کرتے ہیں:

اور غیر مرتب تعدد بٹاؤ کے لئے یہ ہے اور اس لئے $\bar{x} = \dfrac{\sum_{t=1}^{13} x_1}{n}$

© NCERT not to be republished

$$\bar{x} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{13} f_i x_i}{n}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{13} f_i}{n}}$$

(ii) وسطانیہ: یہ مشاہدات کی وسطی قدر ہوتی ہے۔ اگر n ایک طاق عدد ہے

تو وسطانہ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ کی مشاہدہ کی قدر

اگر n جفت ہے تو وسطانیہ $\left(\frac{n}{2}\right)$ اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ویں مشاہدہ کا درمیانہ۔

(iii) موڈ: سب سے زیادہ ظاہر ہونے والے مشاہدہ کو موڈ کہتے ہیں۔

© NCERT not to be republished