अध्याय 13

प्रायिकता

13.1 समग्र अवलोकन (Overview)

13.1.1 *सप्रतिबंध प्रायिकता*

यदि E तथा F किसी यादृच्छिक परीक्षण के एक ही प्रतिदर्श समष्टि से सबंधित दो घटनाएँ हैं, तो उस स्थिति में जब घटना F घटित हो चुकी हो, प्रतीक P (E | F) द्वारा निरूपित घटना E की सप्रतिबंध प्रायिकता निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होती है:

$$P(E\,|\,F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, \quad P(F) \neq 0$$

13.1.2 *सप्रतिबंध प्रायिकता के गुण*

मान लीजिए कि E तथा F किसी प्रतिदर्श समष्टि S से संबंधित घटनाएँ हैं, तो

(i) $P(S\,|\,F) = P(F\,|\,F) = 1$

(ii) $P[(A \cup B)\,|\,F] = P(A\,|\,F) + P(B\,|\,F) - P[(A \cap B\,|\,F)]$,

जहाँ A, B और S से संबंधित कोई दो घटनाएँ हैं।

(iii) $P(E'\,|\,F) = 1 - P(E\,|\,F)$

13.1.3 *प्रायिकता का गुणन नियम*

मान लीजिए कि E तथा F किसी परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित दो घटनाएँ हैं, तो

$$P(E \cap F) = P(E)\,P(F\,|\,E),\ P(E) \neq 0$$
$$= P(F)\,P(E\,|\,F),\ P(F) \neq 0$$

यदि E, F तथा G किसी प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित तीन घटनाएँ हों, तो

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)\,P(F\,|\,E)\,P(G\,|\,E \cap F)$$

13.1.4 स्वतंत्र घटनाएँ

मान लीजिए कि E तथा F किसी प्रतिदर्श समष्टि S से संबधित दो घटनाएँ हैं। यदि उनमें से किसी एक के घटित होने की प्रायिकता दूसरे के घटित होने से प्रभावित नहीं होती है, तो हम कहते हैं कि दोनों घटनाएँ स्वतंत्र हैं। अत: दो घटनाएँ E तथा F स्वतंत्र होंगी, यदि

(a) $P(F \mid E) = P(F)$, जब कि $P(E) \neq 0$

(b) $P(E \mid F) = P(E)$, जब कि $P(F) \neq 0$

प्रायिकता के गुणन प्रमेय के उपयोग द्वारा

(c) $P(E \cap F) = P(E)\, P(F)$

तीन घटनाएँ A, B तथा C परस्पर स्वतंत्र कहलाती हैं, यदि निम्नलिखित सभी प्रतिबंध प्रभावी (hold) हों :

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)\, P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)\, P(C)$$

तथा $P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C)$

13.1.5 प्रतिदर्श समष्टि का विभाजन

घटनाओं $E_1, E_2, ..., E_n$ का एक समुच्चय किसी प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन को निरूपित करता है, यदि

(a) $E_i \cap E_j = \phi,\ i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3, ..., n$

(b) $E_i \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$, तथा

(c) प्रत्येक $E_i \neq \phi$, अर्थात $P(E_i) > 0$ सभी $i = 1, 2, 3, ..., n$ के लिए

13.1.6 संपूर्ण प्रायिकता का प्रमेय

मान लीजिए कि $\{E_1, E, ..., E_n\}$ प्रतिदर्श समष्टि S का एक विभाजन है। मान लीजिए कि A प्रतिदर्श समष्टि S से संबद्ध (associated) कोई घटना है, तो

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j) P(A \mid E_j)$$

13.1.7 बेज प्रमेय (Bayes' Theorem)

यदि $E_1, E_2, ..., E_n$ किसी प्रतिदर्श समष्टि से संबद्ध परस्पर अपवर्ज़ित (mutually exclusive)और निशेष (exhaustive) घटनाएँ हों तथा A एक शून्येतर प्रायिकता वाली कोई भी घटना हो, तो

$$P(E_i | A) = \frac{P(E_i)P(A | E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A | E_i)}$$

13.1.8 यादृच्छिक चर और उसका प्रायिकता बंटन

एक यादृच्छिक चर वह वास्तविक मान फलन है, जिसका प्रांत किसी यादृच्छिक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि होता है

किसी यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन संख्याओं का नीचे दिया गया निकाय (system)होता है।

X :	x_1	x_2	...	x_n
P(X) :	p_1	p_2	...	p_n

जहाँ $p_i > 0,\ i = 1, 2, ..., n,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

13.1.9 यादृच्छिक चर का माध्य तथा प्रसरण

मान लीजिए कि X एक ऐसा यादृच्छिक चर है जिसकी लिये गये मानों $x_1, x_2, ..., x_n$ के लिए प्रायिकताएँ क्रमशः $p_1, p_2, ..., p_n$ ऐसी हैं, कि $p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ प्रतीक μ द्वारा व्यक्त X का माध्य [अथवा X का संभावित मान जिसे E (X) द्वारा निरूपित करते हैं] निम्नलिखित प्रकार परिभाषित है।

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

तथा σ^2 द्वारा निरूपित X का प्रसरण निम्नलिखित रूप में परिभाषित है।

$$^2 = \quad ^{n}_{i\ 1} (x_i - \quad)^2\, p_{\rm i} = \quad ^{n}_{i\ 1}\, x_i^2\, p_{\rm i} - \quad ^2$$

अथवा समतुल्यत: $\sigma^2 = \mathrm{E}\,(\mathrm{X} - \mu)^2$

यादृच्छिक चर X का मानक विचलन निम्नलिखित रूप में परिभाषित है।

$$\sigma = \sqrt{\text{variance (X)}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\, p_i}$$

13.1.10 *बर्नूली अभिप्रयोग* (*Bernoulli Trials*)

किसी यादृच्छिक प्रयोग की जाँच को बर्नूली अभिप्रयोग कहते हैं यदि वे निम्नलिखित प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हों:

(i) अभिप्रयोग की संख्या परिमित (निश्चित) होनी चाहिए

(ii) अभिप्रयोग स्वंतत्र होने चाहिए

(iii) प्रत्येक अभिप्रयोग के तथ्यत: दो परिणाम होने चाहिए, सफलता, या असफलता

(iv) सफलता (या असफलता) की प्रायिकता प्रत्येक अभिप्रयोग में समान रहनी चाहिए

13.1.11 *द्विपद बंटन*

0, 1, 2, ..., n मान धारण करने वाले किसी यादृच्छिक चर X को प्राचल n तथा p वाला द्विपद बंटन रखने वाला चर कहते हैं, यदि इसकी प्रायिकता बंटन निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त हो,

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{X} = r) = {}^{n}c_{r}\, p^{r}\, q^{n-r}, \text{ जहाँ } q = 1 - p \text{ rFkk } r = 0, 1, 2, ..., n.$$

13.2 हल किए हुए उदाहरण

लघुउत्तरीय (S. A.)

उदाहरण 1 किसी महाविद्यालय में प्रवेश चाहने वाले A तथा B दो अभ्यर्थी हैं। A के चुने जाने की प्रायिकता 0.7 है तथा दोनों में से केवल एक के चुने जाने की प्रायिकता 0.6 है। B के चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि B के चुने जाने की प्रायिकता p है।

P (A और B में से केवल एक के चुने जाने की) = 0.6 (दिया है।)

P(A के चुने जाने तथा B के नहीं चुने जाने की अथवा B के चुने जाने तथा A के नहीं चुने जाने की) = 0.6

$$P(A \cap B') + P(A' \cap B) = 0.6$$

$$P(A)\,P(B') + P(A')\,P(B) = 0.6$$

$$(0.7)(1-p) + (0.3)\,p = 0.6$$

$$p = 0.25$$

अत: B के चुने जाने की प्रायिकता 0.25 है।

उदाहरण 2 दो घटनाओं A तथा B में से कम से कम एक की समकालिक एक साथ घटित होने की प्रायिकता p है। यदि A तथा B में से केवल एक के घटित होने की प्रायिकता q हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$P(A') + P(B') = 2 - 2p + q.$$

हल क्योंकि P (A तथा B में से केवल एक के घटित केवल) = q (दिया है)

इससे हम प्राप्त करते हैं $P(A \cup B) - P(A \cap B) = q$

$$\Rightarrow \quad p - P(A \cap B) = q$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = p - q$$

$$\Rightarrow \quad 1 - P(A' \cup B') = p - q$$

$$\Rightarrow \quad P(A' \cup B') = 1 - p + q$$

$$\Rightarrow \quad P(A') + P(B') - P(A' \cap B') = 1 - p + q$$

$$\Rightarrow \quad P(A') + P(B') = (1 - p + q) + P(A' \cap B')$$

$$= (1 - p + q) + (1 - P(A \cup B))$$

$$= (1 - p + q) + (1 - p)$$

$$= 2 - 2p + q$$

उदाहरण 3 किसी कारखाने में निर्मित 10% बल्ब लाल रंग के हैं जिन में 2% खराब हैं। यदि एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाए, तो उसके खराब होने की प्रायिकता निर्धारित कीजिए यदि वह लाल रंग का हो।

हल मान लीजिए की बल्ब के लाल रंग के होने की तथा बल्ब के खराब होने की घटनाएँ क्रमश: A तथा B हैं।

$$P(A) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}, \qquad P(A \quad B) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{50} \times \frac{10}{1} = \frac{1}{5}$$

अत: बल्ब के खराब होने की प्रायिकता, यदि वह लाल रंग का है, $\frac{1}{5}$ है।

उदाहरण 4 दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं। मान लीजिए कि घटना A 'पहले पासे पर अंक 6 प्राप्त होना' है तथा घटना B 'दूसरे पासे पर अंक 2 प्राप्त होना' है। क्या A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं?

हल

$$A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$$

$$A \cap B = \{(6, 2)\}$$

$$P(A) \quad \frac{6}{36} \quad \frac{1}{6}, \quad P(B) \quad \frac{1}{6}, \qquad P(A \quad B) \quad \frac{1}{36}$$

घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र होंगी, यदि $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$ हो।

$$\text{बांयाँ} = P(A \cap B) = \frac{1}{36}, \quad \text{दांयाँ} = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

क्योंकि बांयाँ पक्ष = दांयाँ पक्ष

अत: A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

उदाहरण 5 8 लड़कों तथा 4 लड़कियों के किसी समूह से यदृच्छया 4 विद्यार्थियों की एक समिति का चयन किया जाता है। दिया हुआ है कि समिति में कम से कम एक लड़की है, तो समिति में ठीक : 2 लड़कियों के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि कम से कम एक लड़की के चुने जाने की घटना को A से तथा ठीक : 2 लड़कियों के चुने जाने की घटना को B से निरूपित किया जाता है, तो हमें $P(B \mid A)$ ज्ञात करना है।

क्योंकि कम से कम एक लड़की के चुने जाने की घटना को A से निरूपित करते हैं, इसलिए एक भी लड़की नहीं चुने जाने की घटना अर्थात् चारों लड़के चुने जाने की घटना A से निरूपित होगी। अतएव

$$P(A') = \frac{{}^{8}C_4}{{}^{12}C_4} = \frac{70}{495} = \frac{14}{99}$$

$$P(A) \quad 1-\frac{14}{99} \quad \frac{85}{99}$$

अब $P(A \cap B) = P$ (2 लड़के तथा 2 लड़कियाँ) $= \dfrac{{}^{8}C_2 \,.\, {}^{4}C_2}{{}^{12}C_4} = \dfrac{6\times 28}{495} = \dfrac{56}{165}$

अतः $P(B\,|\,A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{56}{165} \times \dfrac{99}{85} = \dfrac{168}{425}$

उदाहरण 6 किसी कारखाने में E_1, E_2 तथा E_3 तीन मशीन बिजली के ट्यूबों के प्रतिदिन के कुल उत्पाद का क्रमशः 50%, 25% तथा 25% बनाती हैं। यह ज्ञात है कि E_1 तथा E_2 मशीनों में से प्रत्येक पर निर्मित 4% ट्यूब खराब होती हैं और मशीन E_3 पर निर्मित 5% ट्यूब खराब होती हैं। यदि किसी दिन के उत्पाद से एक ट्यूब यादृच्छया निकाला जाता है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह खराब होगी।

हल मान लीजिए कि D निकाली गई ट्यूब के खराब होने की घटना है।

मान लीजिए कि A_1, A_2 तथा A_3 क्रमशः मशीनों E_1, E_2 तथा E_3 पर ट्यूब बनाये जाने की घटनाओं को व्यक्त करते हैं।

$$P(D) = P(A_1)\,P(D\,|\,A_1) + P(A_2)\,P(D\,|\,A_2) + P(A_3)\,P(D\,|\,A_3) \qquad (1)$$

$$P(A_1) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2},\; P(A_2) = \frac{1}{4},\; P(A_3) = \frac{1}{4}$$

साथ ही $P(D\,|\,A_1) = P(D\,|\,A_2) = \dfrac{4}{100} = \dfrac{1}{25}$ तथा $P(D\,|\,A_3) = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20}$.

इन मानों को (1) में रखने से हमें प्राप्त होता है

$$P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{25} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{25} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{20}$$

$$= \frac{1}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{80} = \frac{17}{400} = .0425$$

उदाहरण 7 किसी अनभिनत पासे को 10 बार फेंकने पर कम से कम 8 बार अंक 3 का गुणज प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ अंक 3 का गुणज अर्थात 3 या 6 प्राप्त होना सफलता है।

इसलिए p (3 या 6) = $\frac{2}{6}$ $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

10 बार फेंकने पर r सफलता और प्रायिकता,

$$P(r) = {}^{10}C_r \; \frac{1}{3}^{\,r} \; \frac{2}{3}^{\,10-r}$$

अब P (कम से कम 8 सफलता) = P (8) + P (9) + P (10)

$$= {}^{10}C_8 \left(\frac{1}{3}\right)^8 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + {}^{10}C_9 \left(\frac{1}{3}\right)^9 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + {}^{10}C_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$= \frac{1}{3^{10}} [45 \times 4 + 10 \times 2 + 1] = \frac{201}{3^{10}}$$

उदाहरण 8 किसी असंतत यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है

X	1	2	3	4	5	6	7
P (X)	C	2C	2C	3C	C^2	$2C^2$	$7C^2 + C$

C का मान ज्ञात कीजिए। बंटन का माध्य भी ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $\Sigma p_i = 1$, इसलिए

$$C + 2C + 2C + 3C + C^2 + 2C^2 + 7C^2 + C = 1$$

अर्थात् $10C^2 + 9C - 1 = 0$

अर्थात् $(10C - 1)(C + 1) = 0$

$\Rightarrow$ $C = \frac{1}{10}$, $C = -1$

अतः C का स्वीकार्य मान $\frac{1}{10}$ (क्यों?)

$$\text{माध्य} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = \sum_{i=1}^{7} x_i\, p_i$$

$$1 \;\frac{1}{10} \;\; 2 \;\frac{2}{10} \;\; 3 \;\frac{2}{10} \;\; 4 \;\frac{3}{10} \;\; 5 \;\frac{1}{10}^{2} \;\; 6 \;\; 2 \;\frac{1}{10}^{2} \;\; 7 \;\; 7 \;\frac{1}{10}^{2} \;\; \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{10} \;\; \frac{4}{10} \;\; \frac{6}{10} \;\; \frac{12}{10} \;\; \frac{5}{100} \;\; \frac{12}{100} \;\; \frac{49}{100} \;\; \frac{7}{10}$$

$= 3.66$

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 9 एक बॉक्स में 8 लाल तथा 4 सफ़ेद गेंद हैं। चार गेंदों को बिना प्रतिस्थापना के निकाला है। यदि X निकाली गयी लाल गेंदों की संख्या को निरूपित करता है, तो X का प्रायिकता बटंन ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि 4 गेंद निकाली जानी हैं, इसलिए X का मान 0, 1, 2, 3, 4 हो सकता है।

P (X = 0) = P (एक भी लाल गेंद नहीं) = P (4 सफ़ेद गेंद)

$$\frac{{}^{4}C_{4}}{{}^{12}C_{4}} \quad \frac{1}{495}$$

P (X = 1) = P (एक लाल तथा 3 सफ़ेद गेंद)

$$\frac{{}^{8}C_{1} \quad {}^{4}C_{3}}{{}^{12}C_{4}} \quad \frac{32}{495}$$

P (X = 2) = P (2 लाल तथा 2 सफ़ेद)

$$\frac{{}^{8}C_{2} \quad {}^{4}C_{2}}{{}^{12}C_{4}} \quad \frac{168}{495}$$

P (X = 3) = P (3 लाल तथा 1 सफ़ेद गेंद)

$$\frac{{}^{8}C_{3} \quad {}^{4}C_{1}}{{}^{12}C_{4}} \quad \frac{224}{495}$$

$$P(X = 4) = P(4 \text{ लाल गेंद}) \quad \frac{{}^{8}C_{4}}{{}^{12}C_{4}} \quad \frac{70}{495}$$

अत: X का अभीष्ट प्रायिकता बंटन नीचे दिया गया है।

X	0	1	2	3	4
P (X)	$\frac{1}{495}$	$\frac{32}{495}$	$\frac{168}{495}$	$\frac{224}{495}$	$\frac{70}{495}$

उदाहरण 10 किसी सिक्के को तीन बार उछालने पर प्राप्त 'चित, (Heads) की संख्या का प्रसरण तथा मानक विचलन निर्धारित कीजिए।

हल मान लीजिए कि X 'चित' प्राप्त होने की संख्या को निरूपित करता है। इसलिए X का मान 0, 1, 2, 3 हो सकता है। जब किसी सिक्के को तीन बार उछाला जाता है, तो

प्रतिदर्श समष्टि S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

$$P(X = 0) = P(\text{ कोई चित नहीं}) = P(TTT) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = P(\text{एक चित}) = P(HTT, THT, TTH) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = P(\text{दो चित}) = P(HHT, HTH, THH) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = P(\text{तीन चित}) = P(HHH) = \frac{1}{8}$$

अत: X का प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है:

X	0	1	2	3
P (X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$X \text{ का प्रसरण } = \sigma^2 = \Sigma\, x_i^2\, p_i - \mu^2, \qquad (1)$$

जहाँ μ, X का माध्य है, जो निम्नलिखित प्रकार प्राप्त होता है।

$$\mu = \Sigma\, x_i\, p_i = 0 \quad \frac{1}{8} \quad 1 \quad \frac{3}{8} \quad 2 \quad \frac{3}{8} \quad 3 \quad \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{2} \qquad (2)$$

अब,

$$\Sigma\, x_i^2\, p_i = 0^2 \quad \frac{1}{8} \quad 1^2 \quad \frac{3}{8} \quad 2^2 \quad \frac{3}{8} \quad 3^2 \quad \frac{1}{8} \quad 3 \qquad (3)$$

(1), (2) तथा (3) से हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

$$\sigma^2 = 3 - \quad \frac{3}{2} \quad ^2 \quad \frac{3}{4}$$

अतः मानक विचलन $\sqrt{\quad ^2} \quad \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$

उदाहरण 11 उदाहरण 6 के संदर्भ में इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि खराब ट्यूब मशीन E_1 में निर्मित हुई।

हल यहाँ हमें $P(A_1 / D)$ ज्ञात करना है।

$$P(A_1 / D) = \frac{P(A_1 \quad D)}{P(D)} \quad \frac{P(A_1)P(D/A_1)}{P(D)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{25}}{\frac{17}{400}} = \frac{8}{17}$$

उदाहरण 12 किसी कार निर्मित करने वाले कारखाने में दो संयंत्र X तथा Y हैं। संयंत्र X, 70% तथा संयंत्र Y, 30% कारों का निर्माण करता है। संयंत्र X द्वारा निर्मित 80% तथा संयंत्र Y द्वारा निर्मित 90% कारें मानक गुणवत्ता वाली आँकी गयी हैं। एक कार यादृच्छया चुनी जाती है और वह मानक गुणवत्ता वाली पाई जाती है। इस कार के संयंत्र X द्वारा निर्मित होने की प्रायिकता क्या है?

हल 'कार मानक गुणवत्ता वाली है' को घटना E मान लीजिए। घटनाओं 'कार X संयंत्र में निर्मित हुई' तथा 'कार Y संयंत्र में निर्मित हुई' को क्रमशः B_1 तथा B_2 मान लीजिए।

अब $\quad P(B_1) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}, \; P(B_2) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

$P(E \mid B_1)$ = मानक गुणवत्ता वाली कार के संयंत्र X में निर्मित होने की प्रायिकता

$$= \frac{80}{100} = \frac{8}{10}$$

इसी प्रकार, $\quad P(E \mid B_2) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$

अत: $\quad P(B_1 \mid E)$ = मानक गुणवत्ता वाली कार के संयंत्र X द्वारा निर्मित होने की प्रायिकता

$$= \frac{P(B_1) \times P(E \mid B_1)}{P(B_1) \,.\, P(E \mid B_1) + P(B_2) \,.\, P(E \mid B_2)} = \frac{\frac{7}{10} \times \frac{8}{10}}{\frac{7}{10} \times \frac{8}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{9}{10}} \quad \frac{56}{83} \text{ है।}$$

अत: अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{56}{83}$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 13 से 17 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

उदाहरण 13 मान लीजिए कि A तथा B दो घटनाएँ हैं। यदि $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.6$, तो $P(A \mid B)$ बराबर होगा

(A) 0.8 (B) 0.5 (C) 0.3 (D) 0

हल दिए हुए आंकड़ों से $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$. इससे स्पष्ट है कि

$P(A \cap B) = 0$. अत: $P(A \mid B) = \frac{P(A \quad B)}{P(B)} = 0.$

अत: सही उत्तर (D) है।

उदाहरण 14 मान लीजिए कि A तथा B दो घटनाएँ ऐसी हैं कि $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.2$, तथा $P(A \mid B) = 0.5$. $P(A' \mid B')$ बराबर होगा:

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{6}{7}$

हल $P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B) \quad = 0.5 \times 0.2 = 0.1$

$$P(A' \mid B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{P[(A \cup B)']}{P(B')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)}$$

$$= \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{1 - 0.2} = \frac{3}{8}$$

अतः सही उत्तर (C) है।

उदाहरण 15 यदि A तथा B ऐसी स्वतंत्र घटनाएँ हैं कि $0 < P(A) < 1$ तथा $0 < P(B) < 1$, तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य नहीं है?

(A) A तथा B परस्पर अपवर्जीत हैं।
(B) A तथा B′ स्वतंत्र हैं।
(C) A′ तथा B स्वतंत्र हैं।
(D) A′ तथा B′ स्वतंत्र हैं।

हल सही उत्तर (A) है।

उदाहरण 16 मान लीजिए कि X एक असंतत यादृच्छिक चर है। X का प्रायिकता बंटन नीचे दिया गया है।

X	30	10	– 10
P (X)	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

E (X) का मान होगा।

(A) 6 (B) 4 (C) 3 (D) – 5

हल $E(X) = 30 \times \frac{1}{5} + 10 \times \frac{3}{10} - 10 \times \frac{1}{2} = 4$

अतः सही उत्तर (B) है।

उदाहरण 17 मान लीजिए कि X एक असंतत यादृच्छिक चर है जो $x_1, x_2, ..., x_n$ मान धारण करता है जिनकी प्रायिकताएँ क्रमशः $p_1, p_2, ..., p_n$, हैं, तो X का प्रसरण होगा

(A) $E(X^2)$ (B) $E(X^2) + E(X)$ (C) $E(X^2) - [E(X)]^2$ (D) $\sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}$

हल सही उत्तर (C) है।

उदाहरण 18 तथा 19 में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

उदाहरण 18 यदि A तथा B ऐसी स्वतंत्र घटनाएँ है कि P (A) = p, P (B) = $2p$ तथा

P (A, B में से केवल एक) = $\frac{5}{9}$, तो p = __________ होगा

हल $\left[(1-p)(2p)+p(1-2p)=3p-4p^2=\frac{5}{9}\right]$

इससे प्राप्त होता है : $p = \frac{1}{3}, \frac{5}{12}$

उदाहरण 19 यदि A तथा B′ स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो P (A′∪B) = 1 – ________

हल P (A′∪B) = 1 – P (A∩B′) = 1 – P (A) P (B′) (क्योंकि A तथा B′ स्वतंत्र घटनाएँ हैं।)

अतः खाली स्थान में P(A) P (B′) भरा जायेगा।

बताइए कि 20 से 22 तक के उदाहरणों में से प्रत्येक में दिया हुआ कथन सत्य है या असत्य?

उदाहरण 20 यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो P (A∩B) = P (A) + P (B)

हल असत्य, क्योंकि P (A∩B) = P (A) . P(B), जहाँ A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

उदाहरण 21 तीन घटनाएँ A, B तथा C स्वतंत्र कहलाती हैं, यदि P(A∩B∩C) = P (A) P (B) P (C)

हल असत्य। कारण यह है कि A, B, C, स्वतंत्र होती हैं, यदि वे युग्मतः (pairwise) स्वतंत्र हों तथा P (A∩B∩C) = P (A) P (B) P (C) हो

उदाहरण 22 बर्नूली अभिप्रयोगों के प्रतिबंधों में से एक यह है कि अभिप्रयोग एक दूसरे से स्वतंत्र होने चाहिए।

हल सत्य

13.3. प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. किसी भारित (loaded) पासे के लिए घटित होने वाले परिणामों की प्रायिकताएँ नीचे दी हुई हैं P(1) = P(2) = 0.2, P(3) = P(5) = P(6) = 0.1 तथा P(4) = 0.3.

पासे को दो बार फेंका जाता है। मान लीजिए कि A तथा B क्रमशः घटनाओं 'प्रत्येक बार एक ही संख्या आना' तथा B घटना 'कुल स्कोर 10 या 10 से अधिक आना' को निरूपित करता है। निर्धारित कीजिए कि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं या नहीं।

2. उपर्युक्त प्रश्न संख्या 1 पर ध्यान दीजिए। यदि पासा अनभिनत हो, तो निर्धारित कीजिए कि घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र होंगी या नहीं।

3. A तथा B दो घटनाओं में से कम से कम एक के घटित होने की प्रायिकता 0.6 है। यदि A तथा B के एक साथ घटित होने की प्रायिकता 0.3 है, तो $P(\overline{A}) + P(\overline{B})$ का मान निकालिए।

4. एक थैले में 5 लाल तथा 3 काले कंचे हैं। तीन कंचों को एक-एक करके बिना प्रतिस्थापित किए निकाला जाता है। निकाले गए तीन कंचों में से कम से कम एक कंचे के काले होने की प्रायिकता क्या है, यदि निकाला गया पहला कंचा लाल रंग का है?

5. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है और प्राप्त संख्याओं का योगफल नोट कर लिया जाता है। घटनाएँ E, F तथा G क्रमशः 'योगफल 4' 'योगफल 9 या 9 से अधिक' तथा 'योगफल संख्या 5 से भाज्य' को निरूपित करती हैं। P(E), P(F) तथा P(G) को परिकलित कीजिए और निर्णय कीजिए कि घटनाओं का कौन सा जोड़ा (युग्म) स्वतंत्र है।

6. स्पष्ट कीजिए कि किसी सिक्के को तीन बार उछालने के परीक्षण को द्विपद बंटन रखने वाला क्यों कहा जाता है।

7. A तथा B दो घटनाएँ ऐसी हैं कि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ तथा $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$। ज्ञात कीजिए:

(i) $P(A|B)$ (ii) $P(B|A)$ (iii) $P(A'|B)$ (iv) $P(A'|B')$

8. तीन घटनाओं A, B तथा C की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{2}$, हैं। दिया है कि $P(A \cap C) = \frac{1}{5}$ तथा $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$; $P(C | B)$ तथा $P(A' \cap C')$ के मान ज्ञात कीजिए।

9. मान लीजिए कि E_1 तथा E_2 दो स्वतंत्र घटनाएँ ऐसी हैं कि $p(E_1) = p_1$ तथा $P(E_2) = p_2$. निम्नलिखित प्रायिकताओं वाली घटनाओं का वर्णन शब्दों में कीजिए:

(i) $p_1\, p_2$ (ii) $(1-p_1)\, p_2$ (iii) $1-(1-p_1)(1-p_2)$ (iv) $p_1 + p_2 - 2p_1p_2$

10. किसी असंतत यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन नीचे दिया हुआ है:

X	0.5	1	1.5	2
P(X)	k	k^2	$2k^2$	k

(i) k का मान ज्ञात कीजिए। (ii) उपर्युक्त बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए।

11. सिद्ध कीजिए कि:

(i) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

(ii) $P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$

12. यदि यादृच्छ चर X किसी सिक्के को तीन बार उछालने पर 'पट' आने की संख्या को निरूपित करता है, तो X का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

13. पासे के किसी खेल में एक खिलाड़ी पासे की प्रत्येक फेंक पर 1 रु का दाँव (बाजी) लगाता है। उसे पासे पर 3 आने पर 5 रु मिलते हैं, फेंक के लिए अथवा 6 आने पर 2 रु मिलते हैं अन्यथा कुछ भी नहीं मिलता। पासे को फेंकने के एक लंबे सिलसिले में प्रति फेंक पर खिलाड़ी का संभावित लाभ क्या होगा?

14. तीन पासों को एक साथ फेंका जाता है। तीनों पासों पर 2 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, यदि यह ज्ञात है कि पासों पर प्रकट होने वाली संख्याओं का योग 6 है।

15. किसी लाटरी के 10,000 टिकटों, में से प्रत्येक को 1 रु का बेचा जाता है। प्रथम पुरस्कार 3000 रु का है तथा द्वितीय पुरस्कार 2000 रु का है। इनके अतिरिक्त 500 रु वाले तीन अन्य पुरस्कार हैं। यदि आप एक टिकट खरीदते हैं, तो आप की प्रत्याशा (expectation) क्या होगी?

16. एक थैले में 4 सफेद तथा 5 काली गेंद हैं। एक अन्य थैले में 9 सफेद तथा 7 काली गेंद हैं। पहले थैले से एक गेंद दूसरे थैले में स्थानांतरित कर दी जाती है। तत्पश्चात् दूसरे थैले में से एक गेंद यदृच्छया निकाली जाती है। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई गेंद सफेद रंग की है।

17. थैला I में 3 काली तथा 2 सफेद गेंद हैं और थैला II में 2 काली तथा 4 सफेद गेंद हैं। एक थैला तथा एक गेंद यादृच्छया छाँटे जाते हैं। काले रंग की गेंद के छाँटे जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

18. किसी बाक्स में 5 नीली तथा 4 लाल गेंद हैं। एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है और प्रतिस्थापित नहीं की जाती है। उस गेंद का रंग भी नोट नहीं किया जाता है। तत्पश्चात् एक अन्य गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। दूसरी गेंद के नीले रंग की होने की प्रायिकता क्या है?

19. ताश के 52 पत्तों की एक गड्डी से चार पत्ते बिना प्रतिस्थापन एक के बाद एक करके निकाले जाते हैं। सभी चारों पत्तों के "बादशाह " होने की प्रायिकता क्या है?

20. एक पासा 5 बार फेंका जाता है। पासे पर ठीक तीन बार विषम संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

21. दस सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं। कम से कम 8 चित प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

22. किसी व्यक्ति द्वारा लक्ष्य-भेदन की प्रायिकता 0.25 है। वह 7 बार लक्ष्य-भेदन का प्रयास करता है। उस व्यक्ति द्वारा कम से कम दो बार लक्ष्य भेदने की प्रायिकता क्या है?

23. यह ज्ञात है कि 100 घड़ियों के एक ढ़ेर में 10 घड़ियाँ खराब हैं। यदि 8 घड़ियाँ यादृच्छया, (एक-एक करके बिना प्रतिस्थापन के) चुनी जाती हैं, तो कम से कम एक खराब घड़ी चुनी जाने की प्रायिकता क्या है?

24. एक यादृच्छिक चर X के नीचे दिये गए प्रायिकता बंटन पर विचार कीजिए।

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.1	0.25	0.3	0.2	0.15

(i) $\text{Var}\left(\frac{X}{2}\right)$ (ii) X का प्रसरण को परिकलित कीजिए।

25. किसी यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन नीचे दिया है।

X	0	1	2	3
P(X)	k	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{4}$	$\frac{k}{8}$

(i) k का मान निर्धारित कीजिए. (ii) $P(X \leq 2)$ तथा $P(X > 2)$ निर्धारित कीजिए

(iii) $P(X \leq 2) + P(X > 2)$ ज्ञात कीजिए।

26. निम्नलिखित प्रायिकता बंटन के लिए यादृच्छिक चर X का मानक विचलन निर्धारित कीजिए:

X	2	3	4
P(X)	0.2	0.5	0.3

27. एक अनभिनत पासा इस प्रकार का है कि $P(4) = \frac{1}{10}$ तथा अन्य स्कोर सम सम्भाव्य हैं। पासा दो बार उछाला जाता है। यदि 'पासे पर 4 प्रकट होने की संख्या' X है, तो यादृच्छिक चर X का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

28. एक पासा तीन बार फेंका जाता है। मान लीजिए कि पासे पर 2 आने की संख्या X द्वारा निरूपित होती है। X की प्रत्याशा (expectation) ज्ञात कीजिए।

29. दो अभिनत पासे एक साथ फेंके जाते हैं। पहले पासे के लिए $P(6) = \frac{1}{2}$, अन्य स्कोर सम

सम्भाव्य हैं; जब कि दूसरे पासे के लिए $P(1) = \frac{2}{5}$ तथा अन्य स्कोर सम सम्भाव्य हैं। "1 के प्रकट होने की संख्या" का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

30. दो असंतत यादृच्छिक चर X तथा Y के प्रायिकता बटंन निम्नलिखित हैं:

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Y	0	1	2	3
P(Y)	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

सिद्ध कीजिए कि $E(Y^2) = 2\,E(X)$

31. एक कारखाने में बल्ब बनते हैं। किसी बल्ब के खराब होने की प्रायिकता $\frac{1}{50}$ है तथा बल्बों को दस-दस करके डिब्बों में पैक किया गया है। किसी एक डिब्बे के लिए निम्नलिखित प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) कोई भी बल्ब खराब नहीं है

(ii) ठीक दो बल्ब खराब हैं।

(iii) 8 से अधिक बल्ब ठीक काम करते हैं।

32. मान लीजिए कि आपकी जेब में दो सिक्के हैं जो एक जैसे दिखाई देते हैं। आपको ज्ञात है कि एक सिक्का अनभिनत (न्याय्य) है तथा दूसरे सिक्के में दोनों ओर 'चित' (2-headed) है। यदि आप एक सिक्का निकाल कर उछालते हैं और 'चित' प्राप्त करते हैं, तो इस बात की प्रायिकता क्या है कि यह सिक्का न्याय्य है?

33. मान लीजिए कि रुधिर वर्ग O वाले लोगों में 6% वामहस्तिक (left handed) हैं और अन्य रुधिर वर्ग वाले लोगों में 10% वामहस्तिक हैं। 30% लोगों का रुधिर वर्ग O है। यदि एक वामहस्तिक व्यक्ति यादृच्छया चुना जाता है, तो इस बात की प्रायिकता क्या है कि उसका रुधिर वर्ग O है?

34. समुच्चय S= 1, 2, 3, ..., n से दो प्राकृत संख्याएँ r, s, एक बार में एक, बिना प्रतिस्थापन के, निकाली जाती हैं। $P\left[r \le p | s \le p\right]$, जहाँ $p \in S$ ज्ञात कीजिए।

35. जब एक पासे को दो बार फेंका जाता है तो प्राप्त दो स्कोरों में से महत्तम स्कोर का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए। बंटन का माध्य भी निर्धारित कीजिए।

36. एक यादृच्छिक चर X केवल 0, 1, 2 मानों को धारण कर सकता है। दिया हुआ है कि $P(X = 0) = P(X = 1) = p$,तथा यह कि $E(X^2) = E[X]$, तो p का मान ज्ञात कीजिए।

37. निम्नलिखित बंटन का प्रसरण ज्ञात कीजिए:

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

38. A और B पासे के एक जोड़े को बारी-बारी से फेंकते हैं। A जीतता है, यदि वह B द्वारा पासे पर 7 प्राप्त करने से पहले 6 प्राप्त कर लेता है तथा B जीतती है, यदि वह A द्वारा पासे पर 6 प्राप्त करने से पहले 7 प्राप्त कर लेती है। यदि A पासे को फेंकना प्रारम्भ करता है, तो तीसरी फेंक में उसके जीतने का संयोग (प्रायिकता) ज्ञात कीजिए।

39. दो पासे उछाले जाते हैं। ज्ञात कीजिए कि क्या निम्नलिखित दो घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र हैं:

$A = (x, y) : x+y=11$ $B = (x, y) : x \quad 5$ जहाँ (x, y) एक विशिष्ट प्रतिदर्श बिंदु को निरूपित करते हैं।

40. किसी कलश में m सफ़ेद तथा n काली गेंद है। एक गेंद को यादृच्छया निकाल कर उसी के रंग की k अतिरिक्त गेंदों के साथ कलश में वापस रख दिया जाता है। एक गेंद यादृच्छया पुन: निकाली जाती है। सिद्ध कीजिए कि इस बार सफेद गेंद के निकाले जाने की प्रायिकता k पर निर्भर नहीं है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

41. तीन थैलों में लाल तथा सफ़ेद गेंदों की संख्या निम्नलिखित है।

थैला प्रथम – 3 लाल गेंद

थैला द्वितीय – 2 लाल गेंद तथा 1 सफेद गेंद

थैला तृतीय –3 सफेद गेंद

थैला i के चुने जाने तथा उसमें से एक गेंद के चयन की प्रायिकता $\frac{i}{6}$ है, $i = 1, 2, 3$. इस बात की प्रायिकता क्या है कि

(i) एक लाल गेंद चुनी जाती है? (ii) एक सफ़ेद गेंद चुनी जाती है?

42. उपर्युक्त प्रश्न संख्या 41 पर ध्यान दीजिए। यदि एक सफेद गेंद चुनी जाती है, तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद

(i) थैला – 2 (ii) थैला – 3 से निकाली गयी है?

43. एक दुकानदार तीन प्रकार के फूलों के बीज A_1, A_2 तथा A_3 बेचता है। बीजों को 4:4:2 के अनुपात में मिलाकर बेचा जाता है। इन तीन प्रकार के बीजों के अंकुरण की दर क्रमशः 45%, 60% तथा 35% है। निम्नलिखित प्रायिकताओं का परिकलन कीजिए:

(i) एक यादृच्छया चुने गऐ बीज के अंकुरित होने की

(ii) बीज के अंकुरित नहीं होने की, दिया हुआ है कि बीज का प्रकार A_3, है।

(iii) बीज का प्रकार A_2 होने की, दिया हुआ है कि यादृच्छया चुना गया बीज अंकुरित नहीं होता है।

44. यह ज्ञात है कि एक पत्र या तो TATA NAGAR से या CALCUTTA से आया है। पत्र के लिफ़ाफ़े पर केवल दो क्रमागत अक्षर TA दिखलाई पड़ते हैं। पत्र के TATA NAGAR से आने की प्रायिकता क्या है?

45. दो थैलों में से एक में 3 काली तथा 4 सफेद गेंदें हैं जबकि दूसरे में 4 काली तथा 3 सफ़ेद गेंद हैं। एक पासा फेंका जाता है। यदि उस पर संख्या 1 या 3 प्रकट होती है, तो पहले थैले से एक गेंद निकालते हैं, परंतु यदि उस पर कोई अन्य संख्या प्रकट होती है, तो दूसरे थैले से एक गेंद निकाली जाती है। एक काले रंग की गेंद के चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

46. तीन कलशों में क्रमशः 2 सफ़ेद तथा 3 काली गेंद, 3 सफ़ेद तथा 2 काली गेंद और 4 सफ़ेद तथा 1 काली गेंद है। प्रत्येक कलश के चुने जाने की प्रायिकता समान है। चुने गए कलश से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है और वह सफेद रंग की पाई जाती है। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए वह गेंद दूसरे कलश से निकाली गई है।

47. छाती के एक्स–रे की जाँच द्वारा क्षय रोग (T.B.) के पहचान की प्रायिकता 0.99 है, जब कि व्यक्ति वास्तव में क्षय रोग से ग्रसित है। एक स्वस्थ व्यक्ति के क्षय रोग से ग्रसित पाये हो जाने की प्रायिकता 0.001 है। किसी शहर में 1000 लोगों में से 1 में क्षय रोग पाया जाता है। एक व्यक्ति यादृच्छया चुना जाता है और निदान किए जाने पर पता चलता है कि उसे क्षय रोग है। इस बात की प्रायिकता क्या है कि उसे वास्तव में क्षय रोग है।

48. कोई वस्तु A, B तथा C तीन मशीनों द्वारा निर्मित होती है। किसी विशिष्ट अवधि में निर्मित वस्तुओं की कुल संख्या में से 50% A पर, 30% B पर तथा 20% C पर निर्मित होती हैं। A पर उत्पादित वस्तुओं का 2% तथा B पर उत्पादित वस्तुओं का 2% ख़राब है और उन वस्तुओं का 3% जो C पर उत्पादित होती हैं, ख़राब हैं। सभी वस्तुओं को एक गोदाम में रखते हैं। एक

वस्तु को यादृच्छया निकाला जाता है और वह ख़राब पायी जाती है। इस बात की प्रायिकता क्या है कि वह वस्तु मशीन A पर निर्मित हुई है?

49. मान लीजिए कि X एक असंतत यादृच्छिक चर है, जिसका प्रायिकता-बंटन निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है।

$$P(X = x) = \begin{cases} k(x+1), x = 1,2,3,4 \text{ के लिए} \\ 2kx, \quad x = 5,6,7 \quad \text{ के लिए} \\ 0, \quad \text{अन्य स्थिति में} \end{cases}$$

जहाँ k एक अचर है। निम्नलिखित परिकलित कीजिए।

(i) k का मान (ii) E (X) (iii) X का मानक विचलन

50. किसी असंतत यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है।

X 1	2	4	2A	3A	5A	
P(X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$

निम्नलिखित को परिकलित कीजिए।

(i) A का मान, यदि E(X) = 2.94 (ii) X का प्रसरण

51. किसी यादृच्छिक चर x का प्रायिकता-बंटन नीचे दिया है।

$$P(X = x) = \begin{cases} kx^2, \ x = 1,2,3 \text{ के लिए} \\ 2kx, \ x = 4,5,6 \text{ के लिए} \\ 0 \quad \text{अन्यथा (अन्य स्थिति में)} \end{cases}$$

जहाँ k एक अचर है। परिकलित कीजिए।

(i) E(X) (ii) E $(3X^2)$ (iii) P(X $\geq$ 4)

52. एक थैले में $(2n + 1)$ सिक्के हैं। यह ज्ञात है कि इन में से n सिक्के अनभिनत (न्याय्य) हैं। थैले से एक सिक्का यादृच्छया निकाला जाता है और उसे उछाला जाता है। यदि उछालने पर 'चित' प्राप्त होने की प्रायिकता $\frac{31}{42}$, है। तो n का मान निर्धारित कीजिए।

53. ताश की एक भली–भाँति फेंटी हुई गड्डी से दो पत्ते उत्तरोत्तर बिना प्रतिस्थापन के निकाले जाते हैं। यादृच्छिक चर X का माध्य तथा मानक प्रसरण ज्ञात कीजिए, जँहा X इक्कों की संख्या हैं।

54. एक पासे को दो बार उछाला जाता है। पासे पर एक सम संख्या का प्राप्त होना एक 'सफलता' गिनी जाती है। सफलताओं की संख्या का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

55. 5 पत्ते 1 से 5, तक संख्यांकित हैं।, एक पत्ते पर एक ही संख्या अंकित हैं। दो पत्ते यादृच्छया बिना प्रतिस्थापन के निकाले जाते हैं। मान लीजिए कि निकाले गए दो पत्तों पर अंकित संख्याओं का योगफल X से निरुपित होता है। X का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 56 से 82 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

56. यदि $P(A) = \frac{4}{5}$, तथा $P(A \cap B) = \frac{7}{10}$, तो $P(B \mid A)$ का मान

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{17}{20}$

57. यदि $P(A \cap B) = \frac{7}{10}$ तथा $P(B) = \frac{17}{20}$, तो $P(A \mid B)$ बराबर है।

(A) $\frac{14}{17}$ (B) $\frac{17}{20}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{1}{8}$

58. यदि $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ तथा $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$, तो $P(B \mid A) + P(A \mid B)$ के बराबर है।

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{7}{2}$

59. यदि $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{10}$ तथा $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, तो $P(A' \mid B').P(B' \mid A')$ बराबर है।

(A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{5}{7}$ (C) $\frac{25}{42}$ (D) 1

60. यदि A तथा B दो घटनाएँ ऐसी हैं, कि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A/B)=\frac{1}{4}$, तो $P(A' \cap B')$ बराबर है।

(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{16}$

61. यदि P(A) = 0.4, P(B) = 0.8 तथा P(B | A) = 0.6, तो $P(A \cup B)$ बराबर है।

(A) 0.24 (B) 0.3 (C) 0.48 (D) 0.96

62. यदि A तथा B दो घटनाएँ हैं और A ϕ, B ϕ, तो

(A) P(A | B) = P(A).P(B) (B) $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

(C) P(A | B).P(B | A)=1 (D) P(A | B) = P(A) | P(B)

63. A तथा B घटनाएँ इस प्रकार हैं कि P(A) = 0.4, P(B) = 0.3 और $P(A \cup B) = 0.5$ तो P (B A) बराबर है।

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{1}{5}$

64. आपको ऐसी दो घटनाएँ A तथा B दी हुई हैं कि $P(B)=\frac{3}{5}$, $P(A | B) = \frac{1}{2}$ और $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, तो P(A) बराबर है।

(A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{5}$

65. उपर्युक्त प्रश्न संख्या 64 में, P(B | A) बराबर है।

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{5}$

66. यदि $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(A \mid B) = \frac{1}{2}$ तथा $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, तो $P(A \cup B) + P(A \cup B)$ बराबर है।

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

67. मान लीजिए कि $P(A) = \frac{7}{13}$, $P(B) = \frac{9}{13}$ तथा $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$, तो $P(A \mid B)$ बराबर है।

(A) $\frac{6}{13}$ (B) $\frac{4}{13}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{5}{9}$

68. यदि A तथा B ऐसी घटनाएँ हैं कि $P(A) > 0$ और $P(B) \neq 1$, तो $P(A \mid B)$ बराबर है:

(A) $1 - P(A \mid B)$ (B) $1 - P(A \mid B)$

(C) $\frac{1 - P(A \cup B)}{P(B')}$ (D) $P(A) \mid P(B)$

69. यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं और $P(A) = \frac{3}{5}$ तथा $P(B) = \frac{4}{9}$, तो $P(A \cap B)$ बराबर है:

(A) $\frac{4}{15}$ (B) $\frac{8}{45}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{9}$

70. यदि दो घटनाएँ स्वंतत्र हैं, तो

(A) वे केवल परस्पर अपवर्जीत होंगी

(B) केवल उनकी प्रायिकताओं का योग अनिवार्यतः 1 होगा

(C) (A) तथा (B) दोनों सत्य हैं

(D) उपर्युक्त में से कोई भी सत्य नहीं है।

71. मान लीजिए कि A तथा B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{5}{8}$ तथा $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ तो $P(A \mid B).P(A \mid B)$ बराबर है:

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{3}{20}$ (D) $\frac{6}{25}$

72. यदि घटनाएँ A तथा B स्वंतत्र हैं, तो $P(A \cap B)$ बराबर है–

(A) P (A) + P (B) (B) P(A) – P(B)

(C) P (A) . P(B) (D) P(A) | P(B)

73. दो घटनाएँ E तथा F स्वतंत्र हैं। यदि P(E) = 0.3, $P(E \cup F) = 0.5$, तो P(E | F) – P(F | E) बराबर है–

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{3}{35}$ (C) $\frac{1}{70}$ (D) $\frac{1}{7}$

74. एक थैले में 5 लाल तथा 3 नीली गेंद हैं। यदि 3 गेंद यादृच्छया बिना प्रतिस्थापन के निकाली जाती हैं, तो तथ्यत: एक लाल रंग की गेंद के निकालने की प्रायिकता–

(A) $\frac{45}{196}$ (B) $\frac{135}{392}$ (C) $\frac{15}{56}$ (D) $\frac{15}{29}$

75. उपर्युक्त प्रश्न संख्या 74 पर ध्यान दीजिए। तीन गेंदों में से तथ्यत: दो गेंदों के लाल रंग की होने की प्रायिकता, जबकि पहली गेंद लाल रंग की है–

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{4}{7}$ (C) $\frac{15}{28}$ (D) $\frac{5}{28}$

76. तीन व्यक्ति A, B तथा C, A से प्रारम्भ करके, एक लक्ष्य पर बारी – बारी से गोली चलाते हैं। उनके द्वारा लक्ष्य-भेदन की प्रायिकताएँ क्रमश: 0.4, 0.3 तथा 0.2 हैं। दो बार लक्ष्य – भेदन की प्रायिकता है–

(A) 0.024 (B) 0.188 (C) 0.336 (D) 0.452

77. मान लीजिए कि किसी परिवार में प्रत्येक बच्चे का लड़का या लड़की होना सम सम्भाव्य है। तीन बच्चों वाले एक परिवार को यादृच्छया चुना जाता है। सबसे बड़े बच्चे के लड़की होने की यदि यह दिया हुआ है कि परिवार में कम से कम एक लड़की है तो प्रायिकता है–

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{7}$

78. एक पासा फेंका जाता है तथा 52 पत्तों की ताश की किसी गड्डी से एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है। पासे पर सम संख्या के प्राप्त होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{3}{4}$

79. किसी बॉक्स में 3 नारंगी, 3 हरी तथा 2 नीली गेंद हैं। बॉक्स से तीन गेंद यादृच्छया बिना प्रतिस्थापन के निकाली जाती हैं। दो हरी गेंद तथा एक नीली गेंद के निकालने की प्रायिकता है

(A) $\frac{3}{28}$ (B) $\frac{2}{21}$ (C) $\frac{1}{28}$ (D) $\frac{167}{168}$

80. एक फ्लैश लाइट (कौंध बत्ती) में 8 बैटरी हैं, जिनमें से तीन निस्तेज (dead) हैं। यदि दो बैट्रियों को बिना प्रतिस्थापन के चुनकर जाँचा जाता है तो उन दोनों के निस्तेज होने की प्रायिकता है,

(A) $\frac{33}{56}$ (B) $\frac{9}{64}$ (C) $\frac{1}{14}$ (D) $\frac{3}{28}$

81. आठ सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। ठीक 3 चित प्राप्त होने की प्रायिकता है,

(A) $\frac{1}{256}$ (B) $\frac{7}{32}$ (C) $\frac{5}{32}$ (D) $\frac{3}{32}$

82. दो पासे फेंके जाते हैं। यदि यह ज्ञात है कि पासों पर प्राप्त संख्याओं का योगफल 6 से कम था तो उन पर प्राप्त संख्याओं का योग 3 होने की प्रायिकता है,

(A) $\frac{1}{18}$ (B) $\frac{5}{18}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

83. निम्नलिखित में से कौन सा कथन द्विपद-बंटन के लिए आवश्यक नहीं है?

(A) प्रत्येक परीक्षण के 2 परिणाम होने चाहिए,

(B) परीक्षणों की संख्या निश्चित (अचर) होनी चाहिए,

(C) परिणाम एक दूसरे पर निर्भर होने चाहिए,

(D) सफलता की प्रायिकता सभी परीक्षणों के लिए समान होनी चाहिए।

84. ताश के 52 पत्तों की भली– भाँति फेंटी हुई किसी गड्डी से दो पत्ते प्रतिस्थापन सहित निकाले जाते हैं। दोनों पत्तों के 'रानी' होने की प्रायिकता है,

(A) $\frac{1}{13}\times\frac{1}{13}$ (B) $\frac{1}{13}+\frac{1}{13}$ (C) $\frac{1}{13}\times\frac{1}{17}$ (D) $\frac{1}{13}\times\frac{4}{51}$

85. किसी सत्य – असत्य प्रकार के प्रश्नों की परीक्षा में 10 उत्तरों में से कम से कम 8 उत्तरों का सही अनुमान लगाने की प्रायिकता है,

(A) $\frac{7}{64}$ (B) $\frac{7}{128}$ (C) $\frac{45}{1024}$ (D) $\frac{7}{41}$

86. किसी व्यक्ति के तैराक नहीं होने की प्रायिकता 0.3 है। 5 व्यक्तियों में से 4 के तैराक होने की प्रायिकता है,

(A) $^5C_4\ (0.7)^4\ (0.3)$ (B) $^5C_1\ (0.7)\ (0.3)^4$

(C) $^5C_4\ (0.7)\ (0.3)^4$ (D) $(0.7)^4\ (0.3)$

87. किसी असंतत यादृच्छिक चर X का प्रायिकता-बंटन नीचे दिया हुआ है:

X	2	3	4	5
P(X)	$\frac{5}{k}$	$\frac{7}{k}$	$\frac{9}{k}$	$\frac{11}{k}$

k का मान है,

(A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 48

88. निम्नलिखित प्रायिकता बंटन के लिए E (X)का मान है,

X	– 4	–3	–2	–1	0
P(X)	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

(A) 0 (B) –1 (C) –2 (D) –1.8

89. निम्नलिखित प्रायिकता-बंटन के लिए $E(X^2)$ का मान

X	1	2	3	4
P (X)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 10

90. मान लीजिए कि एक यादृच्छिक चर X, प्राचल n तथा p, वाले द्विपद-बंटन का पालन करता है, जहाँ $0 < p < 1$, यदि $P(x = r) / P(x = n–r)$ n तथा r, से स्वंतत्र हैं तो p बराबर है,

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{7}$

91. किसी महाविद्यालय में, 30% विद्यार्थी भौतिक विज्ञान में अनुत्तीर्ण होते हैं, 25% गणित में अनुत्तीर्ण होते हैं तथा 10% दोनों विषयों में अनुत्तीर्ण होते हैं। एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना जाता है। इस बात की प्रायिकता कि वह भौतिक विज्ञान में अनुत्तीर्ण है, यदि वह गणित में अनुत्तीर्ण हो चुका है।

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{9}{20}$ (D) $\frac{1}{3}$

92. A तथा B दो विद्यार्थी हैं। उनके द्वारा किसी प्रश्न को सही प्रकार से हल करने की संभावनाएँ क्रमशः $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{4}$ हैं। यदि उनके द्वारा एक ही प्रकार की गलती करने की प्रायिकता $\frac{1}{20}$ है तथा उनके उत्तर समान हैं, तो उनके द्वारा प्राप्त उत्तर के सही होने की प्रायिकता है,

(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{40}$ (C) $\frac{13}{120}$ (D) $\frac{10}{13}$

93. एक बॉक्स में 100 कलम हैं, जिसमें से 10 कलम खराब हैं। इस बात की प्रायिकता क्या है कि बिना प्रतिस्थापित किए एक-एक करके निकाले गए 5 कलमों के किसी नमूने में अधिक से अधिक 1 कलम खराब है,

(A) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (B) $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^4$ (C) $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (D) $\left(\frac{9}{10}\right)^5 + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^4$

बताइए कि प्रश्न संख्या 94 से 103 तक प्रत्येक में दिए हुए कथन सत्य हैं या असत्य ?

94. मान लीजिए कि $P(A) > 0$ तथा $P(B) > 0$, तो घटनाएँ A तथा B परस्पर अपवर्जी तथा स्वंतत्र हैं।

95. यदि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो A तथा B भी स्वतंत्र हैं।

96. यदि A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तो वे स्वतंत्र भी होंगी।

97. दो स्वतंत्र घटनाएँ सदैव परस्पर अपवर्जी होती हैं।

98. यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो P(A तथा B) = P(A).P(B).

99. किसी प्रायिकता बंटन के माध्य का दूसरा नाम प्रत्याशा है।

100. यदि A तथा B′ स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो $P(A' \cup B) = 1 - P(A)\,P(B')$

101. यदि A तथा B स्वतंत्र हैं, तो

P (A, B में से केवल एक घटित होती है) = P(A) P(B) + P B P A

102. यदि A तथा B ऐसी दो घटनाएँ हैं कि P(A) > 0 तथा P(A) + P(B) >1, तो

$$P(B \mid A) \geq 1 - \frac{P(B')}{P(A)}$$

103. यदि A, B तथा C तीन स्वतंत्र घटनाएँ हैं कि P(A) = P(B) = P(C) = p, तो
P (A, B, C में से कम से कम दो घटित होती हैं) = $3p^2 - 2p^3$

निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

104. यदि A तथा B ऐसी दो घटनाएँ हैं कि P (A | B) = p, P(A) = p, P(B) = $\frac{1}{3}$ तथा

$P(A \cup B) = \frac{5}{9}$, तो p = _____

105. यदि A तथा B ऐसे हैं कि $P(A' \cup B') = \frac{2}{3}$ तथा $P(A \cup B) = \frac{5}{9}$, तो P(A') + P(B') = _____

106. यदि X, प्राचल n = 5, p वाले द्विपद बंटन का पालन करता है तथा P (X = 2) = 9,

P (X = 3), तो p = ___________

107. मान लीजिए कि X एक ऐसा यादृच्छिक चर है, जो $x_1, x_2, \ldots, x_n$ मानों को धारण करता है जिनकी प्रायिकताएँ क्रमशः $p_1, p_2, \ldots, p_n$, हैं। तब, Var (X) = _________

108. मान लीजिए कि A तथा B दो घटनाएँ हैं। यदि P(A | B) = P(A), तो A, B से _______ है।