

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

- (i), (iv), (v), (vi), (vii) और (viii) समुच्चय हैं।
- (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\notin$ (vi) $\in$ (v) $\in$ (vi) $\notin$
- (i) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
(iii) $C = \{17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80\}$ (iv) $D = \{2, 3, 5\}$
(v) $E = \{T, R, I, G, O, N, M, E, Y\}$ (vi) $F = \{B, E, T, R, \}$
- (i) $\{x : x = 3n, n \in \mathbb{N} \text{ और } 1 \leq n \leq 4\}$ (ii) $\{x : x = 2^n, n \in \mathbb{N} \text{ और } 1 \leq n \leq 5\}$
(iii) $\{x : x = 5^n, n \in \mathbb{N} \text{ और } 1 \leq n \leq 4\}$ (iv) $\{x : x \text{ एक सम प्राकृत संख्या है}\}$
(v) $\{x : x = n^2, n \in \mathbb{N} \text{ और } 1 \leq n \leq 10\}$
- (i) $A = \{1, 3, 5, \dots\}$ (ii) $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
(iii) $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (iv) $D = \{L, O, Y, A\}$
(v) $E = \{\text{फरवरी, अप्रैल, जून, सितंबर, नवंबर}\}$
(vi) $F = \{b, c, d, f, g, h, j\}$
- (i) $\leftrightarrow$ (c) (ii) $\leftrightarrow$ (a) (iii) $\leftrightarrow$ (d) (iv) $\leftrightarrow$ (b)

प्रश्नावली 1.2

- (i), (iii), (iv)
- (i) परिमित (ii) अपरिमित (iii) परिमित (iv) अपरिमित (v) परिमित
- (i) अपरिमित (ii) परिमित (iii) अपरिमित (iv) परिमित (v) अपरिमित
- (i) हाँ (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) नहीं
- (i) नहीं (ii) हाँ
- $B = D, E = G$

प्रश्नावली 1.3

- (i) $\subset$ (ii) $\not\subset$ (iii) $\subset$ (iv) $\not\subset$ (v) $\not\subset$ (vi) $\subset$
(vii) $\subset$
- (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) असत्य (vi) सत्य
- (i) चूँकि $\{3, 4\} \in A$, (v) चूँकि $1 \in A$, (vii) चूँकि $\{1, 2, 5\} \subset A$, (viii) चूँकि $3 \notin A$,
(ix) चूँकि $\phi \subset A$, (xi) चूँकि $\phi \subset A$
- (i) $\phi \{a\}$, (ii) $\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$
(iii) $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ (iv) ϕ
- 1
- (i) $(-4, 6]$ (ii) $(-12, -10)$ (iii) $[0, 7)$
(iv) $[3, 4]$

7. (i) $\{x : x \in \mathbb{R}, -3 < x < 0\}$ (ii) $\{x : x \in \mathbb{R}, 6 \leq x \leq 12\}$
 (iii) $\{x : x \in \mathbb{R}, 6 < x \leq 12\}$ (iv) $\{x \in \mathbb{R} : -23 \leq x < 5\}$
 9. (iii)

प्रश्नावली 1.4

1. (i) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 5\}$ (ii) $A \cup B = \{a, b, c, e, i, o, u\}$
 (iii) $A \cup B = \{x : x = 1, 2, 4, 5 \text{ या संख्या } 3 \text{ का गुणज}\}$
 (iv) $A \cup B = \{x : 1 < x < 10, x \in \mathbb{N}\}$ (v) $A \cup B = \{1, 2, 3\}$
 2. हाँ, $A \cup B = \{a, b, c\}$ 3. B
 4. (i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (iii) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
 (iv) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (v) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
 (vi) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (vii) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
 5. (i) $X \cap Y = \{1, 3\}$ (ii) $A \cap B = \{a\}$ (iii) $\{3\}$ (iv) ϕ (v) ϕ
 6. (i) $\{7, 9, 11\}$ (ii) $\{11, 13\}$ (iii) ϕ (iv) $\{11\}$
 (v) ϕ (vi) $\{7, 9, 11\}$ (vii) ϕ
 (viii) $\{7, 9, 11\}$ (ix) $\{7, 9, 11\}$ (x) $\{7, 9, 11, 15\}$
 7. (i) B (ii) C (iii) D (iv) ϕ
 (v) $\{2\}$ (vi) $\{x : x \text{ एक विषम अभाज्य संख्या है}\}$ 8. (iii)
 9. (i) $\{3, 6, 9, 15, 18, 21\}$ (ii) $\{3, 9, 15, 18, 21\}$ (iii) $\{3, 6, 9, 12, 18, 21\}$
 (iv) $\{4, 8, 16, 20\}$ (v) $\{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$ (vi) $\{5, 10, 20\}$
 (vii) $\{20\}$ (viii) $\{4, 8, 12, 16\}$ (ix) $\{2, 6, 10, 14\}$
 (x) $\{5, 10, 15\}$ (xi) $\{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16\}$ (xii) $\{5, 15, 20\}$
 10. (i) $\{a, c\}$ (ii) $\{f, g\}$ (iii) $\{b, d\}$
 11. अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय 12. (i) F (ii) F (iii) T (iv) T

प्रश्नावली 1.5

1. (i) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ (ii) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (iii) $\{7, 8, 9\}$
 (iv) $\{5, 7, 9\}$ (v) $\{1, 2, 3, 4\}$ (vi) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
 2. (i) $\{d, e, f, g, h\}$ (ii) $\{a, b, c, h\}$ (iii) $\{b, d, f, h\}$
 (iv) $\{b, c, d, e\}$

3. (i) $\{x : x \text{ एक विषम प्राकृत संख्या है}\}$
 (ii) $\{x : x \text{ एक सम प्राकृत संख्या है}\}$
 (iii) $\{x : x \in \mathbf{N} \text{ और } x \text{ संख्या 3 का गुणज नहीं है}\}$
 (iv) $\{x : x \text{ एक धन भाज्य संख्या है अथवा } x = 1\}$
 (v) $\{x : x \in \mathbf{N} \text{ और } x \text{ एक धन पूर्णांक है जो 3 से भाज्य नहीं है या जो 5 से भाज्य नहीं है}\}$
 (vi) $\{x : x \in \mathbf{N} \text{ और } x \text{ एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है}\}$
 (vii) $\{x : x \in \mathbf{N} \text{ और } x \text{ एक पूर्ण घन संख्या नहीं है}\}$
 (viii) $\{x : x \in \mathbf{N} \text{ और } x = 3\}$ (ix) $\{x : x \in \mathbf{N} \text{ और } x = 2\}$
 (x) $\{x : x \in \mathbf{N} \text{ और } x < 7\}$ (xi) $\{x : x \in \mathbf{N} \text{ और } x > \frac{9}{2}\}$
6. A' सभी समबाहु त्रिभुजों का समुच्चय है।
7. (i) U (ii) A (iii) ϕ (iv) ϕ

प्रश्नावली 1.6

1. 2 2. 5 3. 50 4. 42
 5. 30 6. 19 7. 25, 35 8. 60

अध्याय 1 पर विविध प्रश्नावली

1. $A \subset B$, $A \subset C$, $B \subset C$, $D \subset A$, $D \subset B$, $D \subset C$
 2. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य (v) असत्य
 (vi) सत्य
 7. असत्य 12. हम मान सकते हैं कि, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3\}$
 13. 325 14. 125 15. (i) 52 (ii) 30 16. 11

प्रश्नावली 2.1

1. $x = 2$ और $y = 1$ 2. $A \times B$ में अवयवों की संख्या 9 है।
 3. $G \times H = \{(7, 5), (7, 4), (7, 2), (8, 5), (8, 4), (8, 2)\}$
 $H \times G = \{(5, 7), (5, 8), (4, 7), (4, 8), (2, 7), (2, 8)\}$
 4. (i) असत्य
 $P \times Q = \{(m, n) (m, m) (n, n), (n, m)\}$
 (ii) सत्य

(iii) सत्य

5. $A \times A = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$
 $A \times A \times A = \{(-1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (1, 1, 1)\}$
6. $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y\}$
8. $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$
 $A \times B$ के $2^4 = 16$ उपसमुच्चय हैं
9. $A = \{x, y, z\}$ और $B = \{1, 2\}$
10. $A = \{-1, 0, 1\}$,
 $A \times A$ के शेष अवयव $(-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (1, 1)$ हैं।

प्रश्नावली 2.2

1. $R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$
 R का प्रांत = $\{1, 2, 3, 4\}$
 R का परिसर = $\{3, 6, 9, 12\}$
 R का सह प्रांत = $\{1, 2, \dots, 14\}$
2. $R = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$
 R का प्रांत = $\{1, 2, 3\}$
 R का परिसर = $\{6, 7, 8\}$
3. $R = \{(1, 4), (1, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6)\}$
4. (i) $R = \{(x, y) : y = x - 2, x = 5, 6, 7 \text{ के लिए}\}$
(ii) $R = \{(5, 3), (6, 4), (7, 5)\}$. R का प्रांत = $\{5, 6, 7\}$, R का परिसर = $\{3, 4, 5\}$
5. (i) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (3, 3), (3, 6)\}$
(ii) R का प्रांत = $\{1, 2, 3, 4, 6\}$
(iii) R का परिसर = $\{1, 2, 3, 4, 6\}$
6. R का प्रांत = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
 R का परिसर = $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
7. $R = \{(2, 8), (3, 27), (5, 125), (7, 343)\}$
8. A से B में संबंधों की संख्या = 2^6
9. R का प्रांत = $\mathbb{Z}$
 R का परिसर = $\mathbb{Z}$

प्रश्नावली 2.3

1. (i) हाँ, प्रांत = $\{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$, परिसर = $\{1\}$

- (ii) हाँ, प्रांत = $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)$, परिसर = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 (iii) नहीं
2. (i) प्रांत = $\mathbf{R}$, परिसर = $(-\infty, 0]$
 (ii) फलन का प्रांत = $\{x : -3 \leq x \leq 3\}$
 (iii) फलन का परिसर = $\{x : 0 \leq x \leq 3\}$
3. (i) $f(0) = -5$ (ii) $f(7) = 9$ (iii) $f(-3) = -11$
4. (i) $t(0) = 32$ (ii) $t(28) = \frac{412}{5}$ (iii) $t(-10) = 14$ (iv) 100
5. (i) परिसर = $(-\infty, 2)$ (ii) परिसर = $[2, \infty)$ (iii) परिसर = $\mathbf{R}$

अध्याय 2 पर विविध प्रश्नावली

2. 2.1 3. फलन का प्रांत, संख्याओं 6 और 2 को छोड़कर शेष वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।
4. प्रांत = $[1, \infty)$, परिसर = $[0, \infty)$
5. प्रांत = $\mathbf{R}$, परिसर = ऋणतेर वास्तविक संख्याएँ
6. परिसर = $[0, 1)$
7. $(f + g)x = 3x - 2$ 8. $a = 2, b = -1$ 9. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) नहीं
 $(f - g)x = -x + 4$
- $\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{x+1}{2x-3}, x \neq \frac{3}{2}$
10. (i) हाँ, (ii) नहीं 11. नहीं 12. f का परिसर = $\{3, 5, 11, 13\}$

प्रश्नावली 3.1

1. (i) $\frac{5\pi}{36}$ (ii) $-\frac{19\pi}{72}$ (iii) $\frac{4\pi}{3}$ (iv) $\frac{26\pi}{9}$
2. (i) $39^\circ 22' 30''$ (ii) $-229^\circ 5' 27''$ (iii) 300° (iv) 210°
3. 12π 4. $12^\circ 36'$ 5. $\frac{20\pi}{3}$ 6. $5 : 4$
7. (i) $\frac{2}{15}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{7}{25}$

प्रश्नावली 3.2

1. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{cosec} x = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \sec x = -2, \tan x = \sqrt{3}, \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$
2. $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{3}, \cos x = -\frac{4}{5}, \sec x = -\frac{5}{4}, \tan x = -\frac{3}{4}, \cot x = -\frac{4}{3}$
3. $\sin x = -\frac{4}{5}, \operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}, \cos x = -\frac{3}{5}, \sec x = -\frac{5}{3}, \tan x = \frac{4}{3}$
4. $\sin x = -\frac{12}{13}, \operatorname{cosec} x = -\frac{13}{12}, \cos x = \frac{5}{13}, \tan x = -\frac{12}{5}, \cot x = -\frac{5}{12}$
5. $\sin x = \frac{5}{13}, \operatorname{cosec} x = \frac{13}{5}, \cos x = -\frac{12}{13}, \sec x = -\frac{13}{12}, \cot x = -\frac{12}{5}$
6. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
7. 2
8. $\sqrt{3}$
9. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
10. 1

प्रश्नावली 3.3

5. (i) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $2 - \sqrt{3}$

प्रश्नावली 3.4

1. $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$
2. $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$
3. $\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi + \frac{5\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$
4. $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$
5. $x = \frac{n\pi}{3}$ or $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$
6. $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$, or $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$
7. $x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$ or $(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$

$$8. x = \frac{n\pi}{2}, \text{ or } \frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, n \in \mathbf{Z}$$

$$9. x = \frac{n\pi}{3}, \text{ or } n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$$

अध्याय 3 पर विविध प्रश्नावली

$$8. \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{1}{2}$$

$$9. \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{2}$$

$$10. \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}, \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}, 4+\sqrt{15}$$

प्रश्नावली 5.1

$$1. 3+i0$$

$$2. 0+i0$$

$$3. 0+i1$$

$$4. 14+28i$$

$$5. 2-7i$$

$$6. -\frac{19}{5} - \frac{21i}{10}$$

$$7. \frac{17}{3} + i\frac{5}{3}$$

$$8. -4+i0$$

$$9. -\frac{242}{27} - 26i$$

$$10. -\frac{22}{3} - i\frac{107}{27}$$

$$11. \frac{4}{25} + i\frac{3}{25}$$

$$12. \frac{\sqrt{5}}{14} - i\frac{3}{14}$$

$$13. 0+i1$$

$$14. 0-i\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

प्रश्नावली 5.2

$$1. 2, \frac{-2\pi}{3}$$

$$2. 2, \frac{5\pi}{6}$$

$$3. \sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} \right)$$

$$4. \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$5. \sqrt{2} \left(\cos \frac{-3\pi}{4} + i \sin \frac{-3\pi}{4} \right)$$

6. $3(\cos \pi + i \sin \pi)$ 7. $2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ 8. $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

प्रश्नावली 5.3

1. $\pm\sqrt{3}i$ 2. $\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{4}$ 3. $\frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$ 4. $\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{-2}$
 5. $\frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$ 6. $\frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ 7. $\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2\sqrt{2}}$ 8. $\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{34}i}{2\sqrt{3}}$
 9. $\frac{-1 \pm \sqrt{(4-\sqrt{2})}i}{2}$ 10. $\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2\sqrt{2}}$

अध्याय 5 पर विविध प्रश्नावली

1. $2 - 2i$ 3. $\frac{307+599i}{442}$
 5. (i) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$, (ii) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$
 6. $\frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}i$ 7. $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 8. $\frac{5}{27} \pm \frac{\sqrt{2}}{27}i$ 9. $\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{21}i$
 10. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 12. (i) $\frac{-2}{5}$, (ii) 0 13. $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4}$ 14. $x = 3, y = -3$
 15. 2 17. 1 18. 0 20. 4

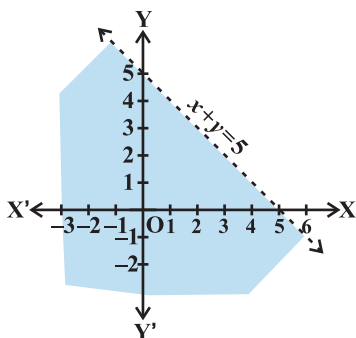
प्रश्नावली 6.1

1. (i) $\{1, 2, 3, 4\}$ (ii) $\{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
 2. (i) कोई हल नहीं है। (ii) $\{\dots - 4, -3\}$
 3. (i) $\{\dots - 2, -1, 0, 1\}$ (ii) $(-\infty, 2)$
 4. (i) $\{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (ii) $(-2, \infty)$

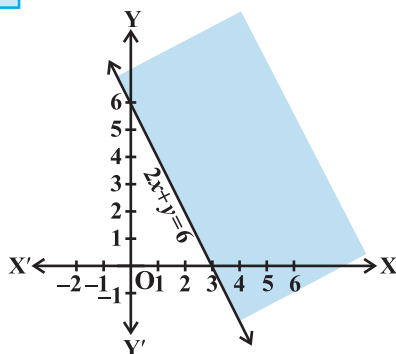
5. $(-4, \infty)$ 6. $(-\infty, -3)$ 7. $(-\infty, -3]$ 8. $(-\infty, 4]$
 9. $(-\infty, 6)$ 10. $(-\infty, -6)$ 11. $(-\infty, 2]$ 12. $(-\infty, 120]$
 13. $(4, \infty)$ 14. $(-\infty, 2]$ 15. $(4, \infty)$ 16. $(-\infty, 2]$
 17. $(-\infty, 3)$  18. $(-1, \infty)$ 
 19. $(-1, \infty)$  20. $(-\frac{2}{7}, \infty)$ 
 21. 35 22. 82
 23. $(5, 7), (7, 9)$ 24. $(6, 8), (8, 10), (10, 12)$
 25. 9 cm 26. 8 सेमी. से बड़ी या उसके बराबर किंतु 22 सेमी. से कम या उसके बराबर

प्रश्नावली 6.2

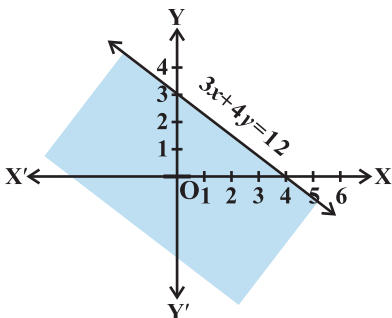
1.



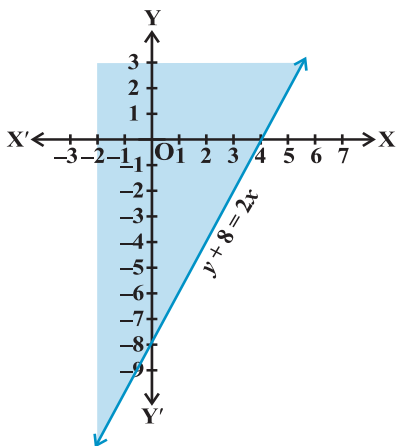
2.



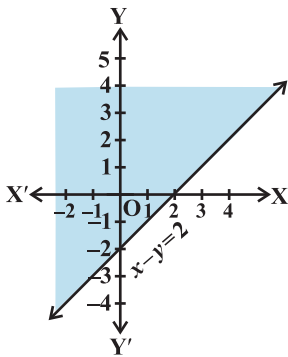
3.



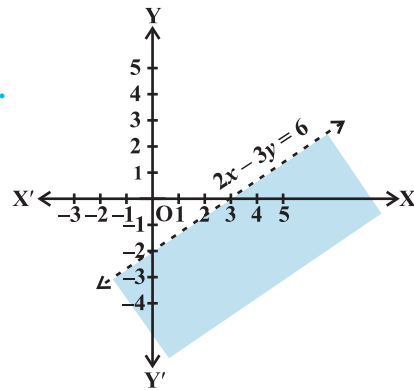
4.



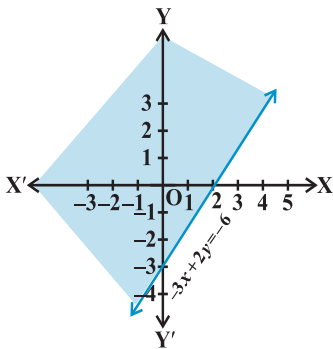
5.



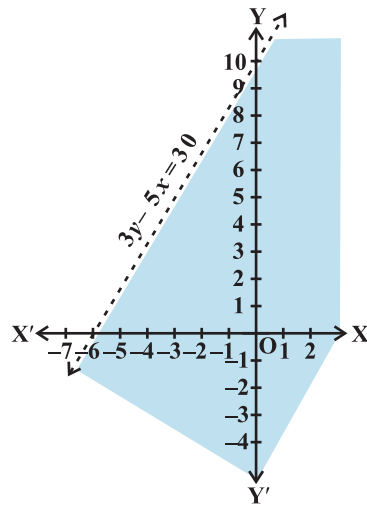
6.



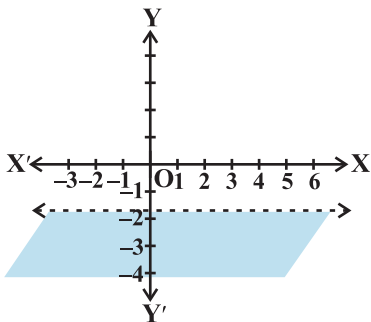
7.



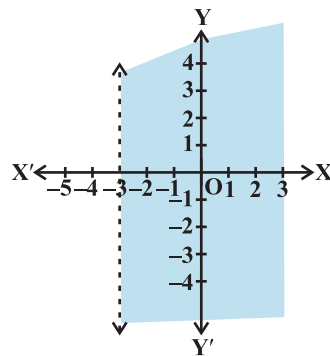
8.



9.

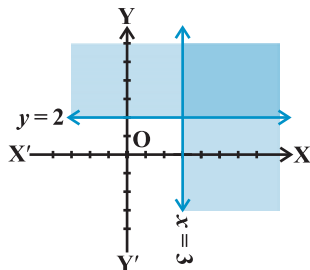


10.

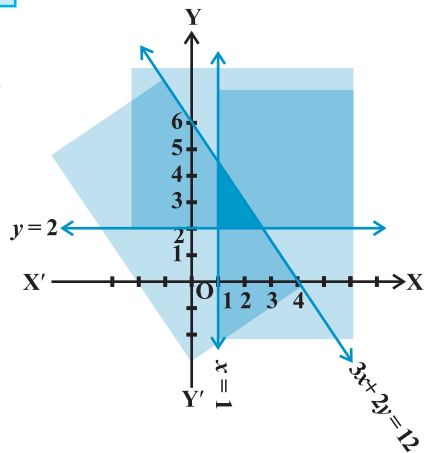


प्रश्नावली 6.3

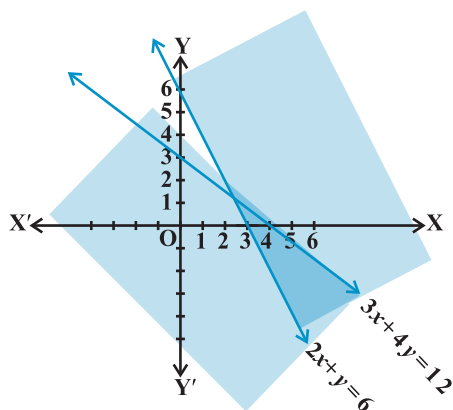
1.



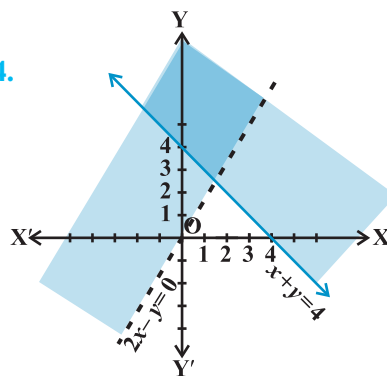
2.



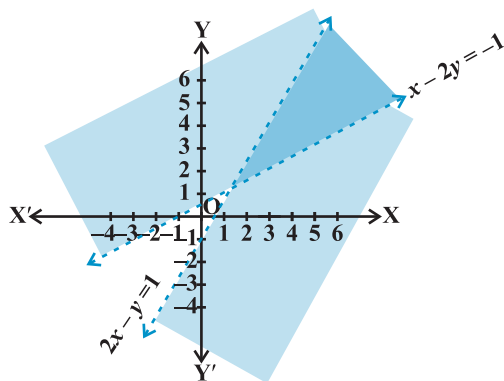
3.



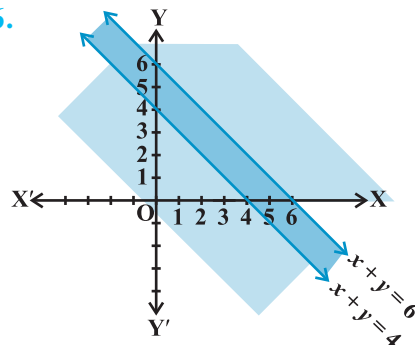
4.

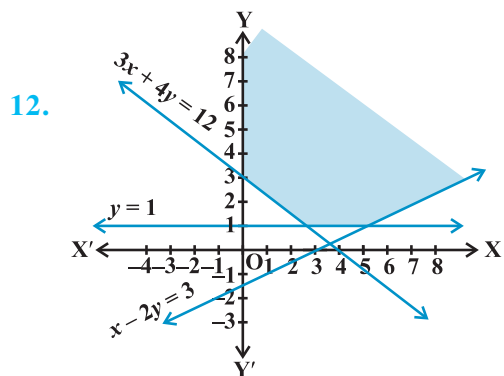
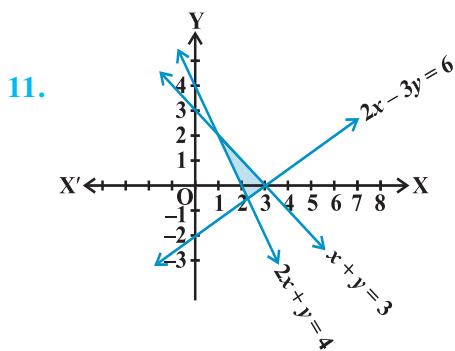
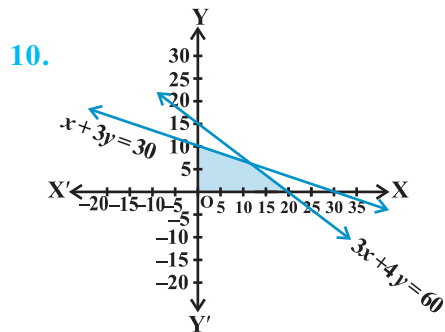
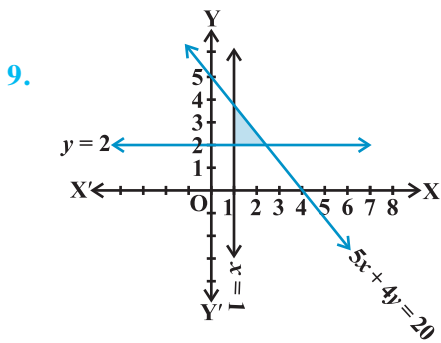
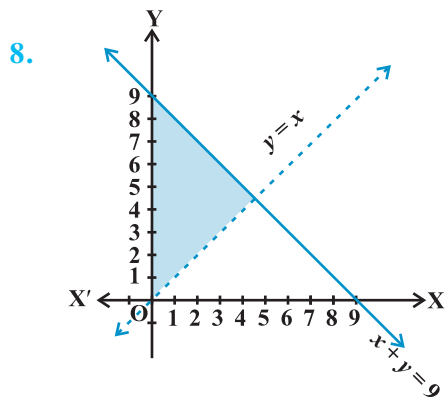
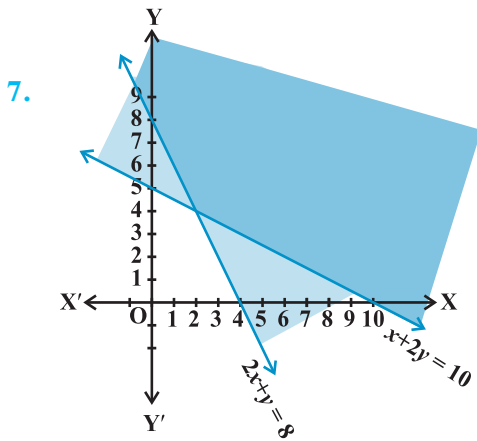


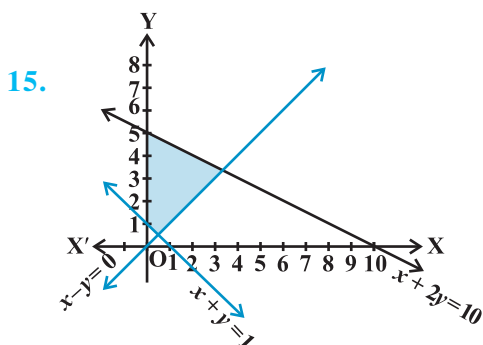
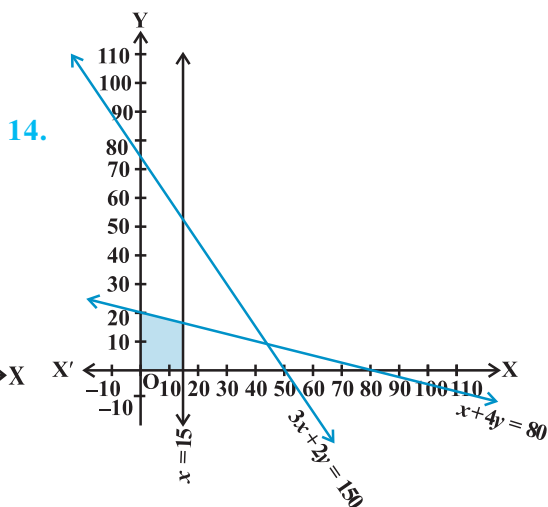
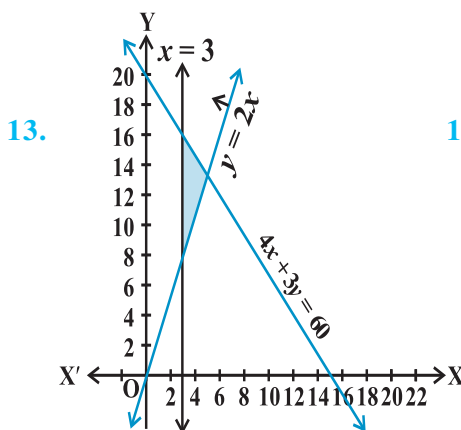
5.



6.







अध्याय 6 पर विविध प्रश्नावली

1. $[2, 3]$

2. $(0, 1]$

3. $[-4, 2]$

4. $(-23, 2]$

5. $\left[-\frac{80}{3}, -\frac{10}{3}\right]$

6. $\left[1, \frac{11}{3}\right]$

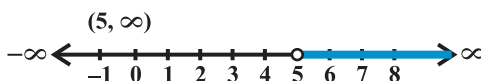
7. $(-5, 5)$



8. $(-1, 7)$



9. $(5, \infty)$



10. $[-7, 11]$



11. 20°C तथा 25°C के बीच

12. 320 लीटर से अधिक परंतु 1280 लीटर से कम।

13. 562.5 लीटर से अधिक किंतु 900लीटर से कम।

14. $9.6 \leq MA \leq 16.8$

प्रश्नावली 7.1

1. (i) 125, (ii) 60. 2. 108 3. 5040 4. 336
5. 8 6. 20

प्रश्नावली 7.2

1. (i) 40320, (ii) 18 2. 30, No 3. 28 4. 64
5. (i) 30, (ii) 15120

प्रश्नावली 7.3

1. 504 2. 4536 3. 60 4. 120, 48
5. 56 6. 9 7. (i) 3, (ii) 4 8. 40320
9. (i) 360, (ii) 720, (iii) 240 10. 33810
11. (i) 1814400, (ii) 2419200, (iii) 25401600

प्रश्नावली 7.4

1. 45 2. (i) 5, (ii) 6 3. 210 4. 40
5. 2000 6. 778320 7. 3960 8. 200
9. 35

अध्याय 7 पर विविध प्रश्नावली

1. 3600 2. 1440 3. (i) 504, (ii) 588, (iii) 1632
4. 907200 5. 120 6. 50400 7. 420

8. ${}^4C_1 \times {}^{48}C_4$

9. 2880

10. ${}^{22}C_7 + {}^{22}C_{10}$

11. 151200

प्रश्नावली 8.1

1. $1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$

2. $\frac{32}{x^5} - \frac{40}{x^3} + \frac{20}{x} - 5x + \frac{5}{8}x^3 - \frac{x^5}{32}$

3. $64x^6 - 576x^5 + 2160x^4 - 4320x^3 + 4860x^2 - 2916x + 729$

4. $\frac{x^5}{243} + \frac{5x^2}{81} + \frac{10}{27}x + \frac{10}{9x} + \frac{5}{3x^3} + \frac{1}{x^5}$

5. $x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$

6. 884736

7. 11040808032

8. 104060401

9. 9509900499

10. $(1.1)^{10000} > 1000$

11. $8(a^3b + ab^3); 40\sqrt{6}$

12. $2(x^6 + 15x^4 + 15x^2 + 1), 198$

प्रश्नावली 8.2

1. 1512

2. -101376

3. $(-1)^r {}^6C_r \cdot x^{12-2r} \cdot y^r$

4. $(-1)^r {}^{12}C_r \cdot x^{24-r} \cdot y^r$

5. $-1760x^9y^3$

6. 18564

7. $\frac{-105}{8}x^9; \frac{35}{48}x^{12}$

8. $61236x^5y^5$

10. $n = 7; r = 3$

12. $m = 4$

अध्याय 8 पर विविध प्रश्नावली

1. $a = 3; b = 5; n = 6$

2. $a = \frac{9}{7}$

3. 171

5. $396\sqrt{6}$

6. $2a^8 + 12a^6 - 10a^4 - 4a^2 + 2$

7. 0.9510

8. $n = 10$

9. $\frac{16}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{32}{x^3} + \frac{16}{x^4} - 4x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{16} - 5$

10. $27x^6 - 54ax^5 + 117a^2x^4 - 116a^3x^3 + 117a^4x^2 - 54a^5x + 27a^6$

प्रश्नावली 9.1

1. 3, 8, 15, 24, 35
2. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$
3. 2, 4, 8, 16 and 32
4. $-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ तथा $\frac{7}{6}$
5. 25, -125, 625, -3125, 15625
6. $\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{21}{2}, 21$ तथा $\frac{75}{2}$
7. 65, 93
8. $\frac{49}{128}$
9. 729
10. $\frac{360}{23}$
11. 3, 11, 35, 107, 323; $3 + 11 + 35 + 107 + 323 + \dots$
12. $-1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{24}, \frac{-1}{120}; -1 + \left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{6}\right) + \left(\frac{-1}{24}\right) + \left(\frac{-1}{120}\right) + \dots$
13. 2, 2, 1, 0, -1; $2 + 2 + 1 + 0 + (-1) + \dots$
14. $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ और $\frac{8}{5}$

प्रश्नावली 9.2

1. 1002001
2. 98450
4. 5 or 20
6. 4
7. $\frac{n}{2}(5n+7)$
8. $2q$
9. $\frac{179}{321}$
10. 0
13. 27
14. 11, 14, 17, 20 और 23
15. 1
16. 14
17. Rs 245
18. 9

प्रश्नावली 9.3

1. $\frac{5}{2^{20}}, \frac{5}{2^n}$
2. 3072
4. -2187
5. (a) 13^{th} , (b) 12^{th} , (c) 9^{th}
6. ± 1
7. $\frac{1}{6} \left[1 - (0.1)^{20} \right]$

8. $\frac{\sqrt{7}}{2}(\sqrt{3}+1)\left(3^{\frac{n}{2}}-1\right)$ 9. $\frac{[1-(-a)^n]}{1+a}$ 10. $\frac{x^3(1-x^{2n})}{1-x^2}$
11. $22+\frac{3}{2}(3^{11}-1)$ 12. $r=\frac{5}{2}$ या $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$ या $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$ अभीष्ट पद हैं।
13. 4 14. $\frac{16}{7}; 2; \frac{16}{7}(2^n-1)$ 15. 2059 अथवा 463
16. $\frac{-4}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{-16}{3}, \dots$ or 4, -8, 16, -32, 64, .. 18. $\frac{80}{81}(10^n-1)-\frac{8}{9}n$
19. 496 20. rR 21. 3, -6, 12, -24 26. 9 और 27
27. $n=\frac{-1}{2}$ 30. 120, 480, 30 (2^n) 31. Rs 500 (1.1)¹⁰
32. $x^2-16x+25=0$

प्रश्नावली 9.4

1. $\frac{n}{3}(n+1)(n+2)$ 2. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
3. $\frac{n}{6}(n+1)(3n^2+5n+1)$ 4. $\frac{n}{n+1}$ 5. 2840
6. $3n(n+1)(n+3)$ 7. $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$
8. $\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+23n+34)$
9. $\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+2(2^n-1)$ 10. $\frac{n}{3}(2n+1)(2n-1)$

अध्याय 9 पर विविध प्रश्नावली

2. 5, 8, 11 4. 8729 5. 3050 6. 1210
7. 4 8. 160; 6 9. ± 3 10. 8, 16, 32
11. 4 12. 11

21. (i) $\frac{50}{81}(10^n - 1) - \frac{5n}{9}$, (ii) $\frac{2n}{3} - \frac{2}{27}(1 - 10^{-n})$ 22. 1680
23. $\frac{n}{3}(n^2 + 3n + 5)$ 25. $\frac{n}{24}(2n^2 + 9n + 13)$
27. Rs 16680 28. Rs 39100 29. Rs 43690 30. Rs 17000; 20,000
31. Rs 5120 32. 25 दिन

प्रश्नावली 10.1

1. $\frac{121}{2}$ वर्ग इकाई
2. $(0, a)$, $(0, -a)$ और $(-\sqrt{3}a, 0)$ या $(0, a)$, $(0, -a)$, और $(\sqrt{3}a, 0)$
3. (i) $|y_2 - y_1|$, (ii) $|x_2 - x_1|$ 4. $\left(\frac{15}{2}, 0\right)$ 5. $-\frac{1}{2}$
7. $-\sqrt{3}$ 8. $x = 1$ 10. 135°
11. 1 और 2, या $\frac{1}{2}$ और 1, या -1 और -2 , या $-\frac{1}{2}$ और -1 14. $\frac{1}{2}$, 104.5 करोड़

प्रश्नावली 10.2

1. $y = 0$ और $x = 0$ 2. $x - 2y + 10 = 0$ 3. $y = mx$
4. $(\sqrt{3} + 1)x - (\sqrt{3} - 1)y = 4(\sqrt{3} - 1)$ 5. $2x + y + 6 = 0$
6. $x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$ 7. $5x + 3y + 2 = 0$
8. $\sqrt{3}x + y = 10$ 9. $3x - 4y + 8 = 0$ 10. $5x - y + 20 = 0$
11. $(1 + n)x + 3(1 + n)y = n + 11$ 12. $x + y = 5$
13. $x + 2y - 6 = 0$, $2x + y - 6 = 0$ 15. $2x - 9y + 85 = 0$
14. $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$ और $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$
16. $L = \frac{.192}{90}(C - 20) + 124.942$ 17. 1340 लीटर 19. $2kx + hy = 3kh$

प्रश्नावली 10.3

1. (i) $y = -\frac{1}{7}x + 0, -\frac{1}{7}, 0$; (ii) $y = -2x + \frac{5}{3}, -2, \frac{5}{3}$; (iii) $y = 0x + 0, 0, 0$
2. (i) $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1, 4, 6$; (ii) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1, \frac{3}{2}, -2$;
 (iii) $y = -\frac{2}{3}$, y -अक्ष पर अन्तःखण्ड $= -\frac{2}{3}$ और x -अक्ष पर कोई अन्तःखण्ड नहीं।
3. (i) $x \cos 120^\circ + y \sin 120^\circ = 4, 4, 120^\circ$ (ii) $x \cos 90^\circ + y \sin 90^\circ = 2, 2, 90^\circ$;
 (iii) $x \cos 315^\circ + y \sin 315^\circ = 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 315^\circ$ 4. 5 इकाई
5. $(-2, 0)$ और $(8, 0)$ 6. (i) $\frac{65}{17}$ इकाई, (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{p+r}{l} \right|$ इकाई
7. $3x - 4y + 18 = 0$ 8. $y + 7x = 21$ 9. 30° और 150°
10. $\frac{22}{9}$
12. $(\sqrt{3} + 2)x + (2\sqrt{3} - 1)y = 8\sqrt{3} + 1$ या $(\sqrt{3} - 2)x + (1 + 2\sqrt{3})y = -1 + 8\sqrt{3}$
13. $2x + y = 5$ 14. $\left(\frac{68}{25}, -\frac{49}{25}\right)$ 15. $m = \frac{1}{2}, c = \frac{5}{2}$
17. $y - x = 1, \sqrt{2}$

अध्याय 10 पर विविध प्रश्नावली

1. (a) 3, (b) ± 2 , (c) 6 या 1 2. $\frac{7\pi}{6}, 1$
3. $2x - 3y = 6, -3x + 2y = 6$ 4. $\left(0, -\frac{8}{3}\right), \left(0, \frac{32}{3}\right)$
5. $\left|\cos\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right)\right|$ 6. $x = -\frac{5}{22}$ 7. $2x - 3y + 18 = 0$

8. k^2 वर्ग इकाई 9. 5 11. $3x - y = 7, x + 3y = 9$
12. $13x + 13y = 6$ 14. $1 : 2$ 15. $\frac{23\sqrt{5}}{18}$ इकाई
16. रेखा x - अक्ष के समान्तर है या y - अक्ष पर लम्ब है।
17. $x = 1, y = 1.$ 18. $(-1, -4).$ 19. $\frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{7}$
21. $18x + 12y + 11 = 0$ 22. $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$ 24. $119x + 102y = 125$

प्रश्नावली 11.1

1. $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 2. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$
3. $36x^2 + 36y^2 - 36x - 18y + 11 = 0$ 4. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$
5. $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2b^2 = 0$ 6. $c(-5, 3), r = 6$
7. $c(2, 4), r = \sqrt{65}$ 8. $c(4, -5), r = \sqrt{53}$ 9. $c\left(\frac{1}{4}, 0\right); r = \frac{1}{4}$
10. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$ 11. $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$
12. $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$ & $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$
13. $x^2 + y^2 - ax - by = 0$ 14. $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 5$
15. वृत्त के भीतर; क्योंकि बिन्दु की वृत्त के केन्द्र से दूरी वृत्त की त्रिज्या से कम है।

प्रश्नावली 11.2

1. $F(3, 0)$, अक्ष - x - अक्ष, नियता $x = -3$, नाभिलंब जीवा की लंबाई = 12
2. $F\left(0, \frac{3}{2}\right)$, अक्ष - y - अक्ष, नियता $y = -\frac{3}{2}$, नाभिलंब जीवा की लंबाई = 6
3. $F(-2, 0)$, अक्ष - x - अक्ष, नियता $x = 2$, नाभिलंब जीवा की लंबाई = 8
4. $F(0, -4)$, अक्ष - y - अक्ष, नियता $y = 4$, नाभिलंब जीवा की लंबाई = 16
5. $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ अक्ष - x - अक्ष, नियता $x = -\frac{5}{2}$, नाभिलंब जीवा की लंबाई = 10
6. $F\left(0, \frac{-9}{4}\right)$, अक्ष - y - अक्ष, नियता $y = \frac{9}{4}$, नाभिलंब जीवा की लंबाई = 9

7. $y^2 = 24x$

8. $x^2 = -12y$

9. $y^2 = 12x$

10. $y^2 = -8x$

11. $2y^2 = 9x$

12. $2x^2 = 25y$

प्रश्नावली 11.3

1. F $(\pm\sqrt{20}, 0)$; V $(\pm 6, 0)$; दीर्घ अक्ष = 12; लघु अक्ष = 8, $e = \frac{\sqrt{20}}{6}$,

नाभिलंब जीवा = $\frac{16}{3}$

2. F $(0, \pm\sqrt{21})$; V $(0, \pm 5)$; दीर्घ अक्ष = 10 लघु अक्ष = 4, $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$;

नाभिलंब जीवा = $\frac{8}{5}$

3. F $(\pm\sqrt{7}, 0)$; V $(\pm 4, 0)$; दीर्घ अक्ष = 8; लघु अक्ष = 6, $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$;

नाभिलंब जीवा = $\frac{9}{2}$

4. F $(0, \pm\sqrt{75})$; V $(0, \pm 10)$; दीर्घ अक्ष = 20; लघु अक्ष = 10, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

नाभिलंब जीवा = 5

5. F $(\pm\sqrt{13}, 0)$; V $(\pm 7, 0)$; दीर्घ अक्ष = 14; लघु अक्ष = 12, $e = \frac{\sqrt{13}}{7}$;

नाभिलंब जीवा = $\frac{72}{7}$

6. F $(0, \pm 10\sqrt{3})$; V $(0, \pm 20)$; दीर्घ अक्ष = 40; लघु अक्ष = 20, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

नाभिलंब जीवा = 10

7. F $(0, \pm 4\sqrt{2})$; V $(0, \pm 6)$; दीर्घ अक्ष = 12; लघु अक्ष = 4, $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

नाभिलंब जीवा = $\frac{4}{3}$

8. $F(0, \pm\sqrt{15})$; $V(0, \pm 4)$; दीर्घ अक्ष = 8 ; लघु अक्ष = 2 , $e = \frac{\sqrt{15}}{4}$;

नाभिलंब जीवा = $\frac{1}{2}$

9. $F(\pm\sqrt{5}, 0)$; $V(\pm 3, 0)$; दीर्घ अक्ष = 6 ; लघु अक्ष = 4 , $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

नाभिलंब जीवा = $\frac{8}{3}$

10. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

11. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$

12. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

13. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

14. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1$

15. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

16. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

17. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

18. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

19. $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{40} = 1$

20. $x^2 + 4y^2 = 52$ या $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$

प्रश्नावली 11.4

1. नाभि $(\pm 5, 0)$, शीर्ष $(\pm 4, 0)$; $e = \frac{5}{4}$; नाभिलंब जीवा = $\frac{9}{2}$

2. नाभि $(0, \pm 6)$, शीर्ष $(0, \pm 3)$; $e = 2$; नाभिलंब जीवा = 18

3. नाभि $(0, \pm\sqrt{13})$, शीर्ष $(0, \pm 2)$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$; नाभिलंब जीवा = 9

4. नाभि $(\pm 10, 0)$, शीर्ष $(\pm 6, 0)$; $e = \frac{5}{3}$; नाभिलंब जीवा = $\frac{64}{3}$

5. नाभि $(0, \pm\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}})$, शीर्ष $(0, \pm\frac{6}{\sqrt{5}})$; $e = \frac{\sqrt{14}}{3}$; नाभिलंब जीवा = $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

6. नाभि $(0, \pm\sqrt{65})$, शीर्ष $(0, \pm 4)$; $e = \frac{\sqrt{65}}{4}$; नाभिलंब जीवा = $\frac{49}{2}$

7. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 8. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{39} = 1$ 9. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$
10. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 11. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$ 12. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{20} = 1$
13. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 14. $\frac{x^2}{49} - \frac{9y^2}{343} = 1$ 15. $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{5} = 1$

अध्याय 11 पर विविध प्रश्नावली

1. नाभि दिए हुए व्यास के मध्य बिन्दु पर है।
 2. 2.23 m (लगभग) 3. 9.11 m (लगभग) 4. 1.56m (लगभग)
5. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$ 6. 18 वर्ग इकाई 7. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
8. $8\sqrt{3}a$

प्रश्नावली 12.1

1. y तथा z - निर्देशांक शून्य है। 2. y - निर्देशांक शून्य है।
 3. I, IV, VIII, V, VI, II, III, VII
 4. (i) XY - समतल (ii) $(x, y, 0)$ (iii) आठ क्षेत्र।

प्रश्नावली 12.2

1. (i) $2\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt{43}$ (iii) $2\sqrt{26}$ (iv) $2\sqrt{5}$
 4. $x - 2z = 0$ 5. $9x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 225 = 0$

प्रश्नावली 12.3

1. (i) $\left(\frac{-4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{27}{5}\right)$, (ii) $(-8, 17, 3)$ 2. 1 : 2
 3. 2 : 3 5. $(6, -4, -2), (8, -10, 2)$

अध्याय 12 पर विविध प्रश्नावली

1. $(1, -2, 8)$ 2. $7, \sqrt{34}, 7$ 3. $a = -2, b = -\frac{16}{3}, c = 2$
 4. $(0, 2, 0)$ और $(0, -6, 0)$
 5. $(4, -2, 6)$ 6. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 7y + 2z = \frac{k^2 - 109}{2}$

प्रश्नावली 13.1

1. 6 2. $\left(\pi - \frac{22}{7}\right)$ 3. π 4. $\frac{19}{2}$
 5. $-\frac{1}{2}$ 6. 5 7. $\frac{11}{4}$ 8. $\frac{108}{7}$
 9. b 10. 2 11. 1 12. $-\frac{1}{4}$
 13. $\frac{a}{b}$ 14. $\frac{a}{b}$ 15. $\frac{1}{\pi}$ 16. $\frac{1}{\pi}$
 17. 4 18. $\frac{a+1}{b}$ 19. 0 20. 1
 21. 0 22. 2 23. 3, 6
 24. $x = 1$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।
 25. $x = 0$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है। 26. $x = 0$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।
 27. 0 28. $a=0, b=4$
 29. $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x) = 0$ और $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = (a - a_1)(a - a_2) \dots (a - a_n)$
 30. सभी $a, a \neq 0$ के लिए $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ का अस्तित्व है। 31. 2
 32. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ के अस्तित्व हेतु $m = n$ अनिवार्य रूप से होना चाहिए; m तथा n के किसी भी पूर्णांक मान के लिए $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ का अस्तित्व है।

प्रश्नावली 13.2

1. 20

2. 99

3. 1

4. (i) $3x^2$

(ii) $2x - 3$

(iii) $\frac{-2}{x^3}$

(iv) $\frac{-2}{(x-1)^2}$

6. $nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + \dots + a^{n-1}$

7. (i) $2x - a - b$ (ii) $4ax(ax^2 + b)$ (iii) $\frac{a-b}{(x-b)^2}$

8. $\frac{nx^n - anx^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$

9. (i) 2 (ii) $20x^3 - 15x^2 + 6x - 4$ (iii) $\frac{-3}{x^4}(5+2x)$ (iv) $15x^4 + \frac{24}{x^5}$

(v) $\frac{-12}{x^5} + \frac{36}{x^{10}}$ (vi) $\frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$ 10. $-\sin x$

11. (i) $\cos 2x$ (ii) $\sec x \tan x$
(iii) $5\sec x \tan x - 4\sin x$ (iv) $-\operatorname{cosec} x \cot x$
(v) $-3\operatorname{cosec}^2 x - 5 \operatorname{cosec} x \cot x$ (vi) $5\cos x + 6\sin x$
(vii) $2\sec^2 x - 7\sec x \tan x$

अध्याय 13 पर विविध प्रश्नावली

1. (i) -1 (ii) $\frac{1}{x^2}$ (iii) $\cos(x+1)$ (iv) $-\sin x - \frac{\pi}{8}$ 2. 1

3. $\frac{-qr}{x^2} + ps$

4. $2c(ax+b)(cx+d) + a(cx+d)^2$

5. $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

6. $\frac{-2}{(x-1)^2}, x \neq 0, 1$

7. $\frac{-(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}$

8. $\frac{-apx^2 - 2bpx + ar - bq}{(px^2 + qx + r)^2}$ 9. $\frac{apx^2 + 2bpx + bq - ar}{(ax + b)^2}$ 10. $\frac{-4a}{x^5} + \frac{2b}{x^3} - \sin x$
11. $\frac{2}{\sqrt{x}}$ 12. $na(ax + b)^{n-1}$
13. $(ax + b)^{n-1}(cx + d)^{m-1}[mc(ax + b) + na(cx + d)]$ 14. $\cos(x + a)$
15. $-\operatorname{cosec}^3 x - \operatorname{cosec} x \cot^2 x$ 16. $\frac{-1}{1 + \sin x}$
17. $\frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$ 18. $\frac{2 \sec x \tan x}{(\sec x + 1)^2}$ 19. $n \sin^{n-1} x \cos x$
20. $\frac{bc \cos x + ad \sin x + bd}{(c + d \cos x)^2}$ 21. $\frac{\cos a}{\cos^2 x}$
22. $x^3(5x \cos x + 3x \sin x + 20 \sin x - 12 \cos x)$
23. $-x^2 \sin x - \sin x + 2x \cos x$
24. $-q \sin x(ax^2 + \sin x) + (p + q \cos x)(2ax + \cos x)$
25. $-\tan^2 x(x + \cos x) + (x - \tan x)(1 - \sin x)$
26. $\frac{35 + 15x \cos x + 28 \cos x + 28x \sin x - 15 \sin x}{(3x + 7 \cos x)^2}$
27. $\frac{x \cos \frac{\pi}{4}(2 \sin x - x \cos x)}{\sqrt{2} \sin^2 x}$ 28. $\frac{1 + \tan x - x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$
29. $(x + \sec x)(1 - \sec^2 x) + (x - \tan x)(1 + \sec x \tan x)$
30. $\frac{\sin x - n x \cos x}{\sin^{n+1} x}$

प्रश्नावली 14.1

1. (i) यह वाक्य सदैव असत्य है, क्योंकि किसी माह में अधिकतम 31 दिन होते हैं। अतएव यह एक कथन है।
- (ii) यह एक कथन नहीं है, क्योंकि कुछ लोगों के लिए गणित सरल हो सकती है और कुछ अन्य लोगों के लिए यह कठिन हो सकती है।
- (iii) यह वाक्य सदैव सत्य है क्योंकि, योगफल 12 है और यह 10 से अधिक है। अतः यह एक कथन है।
- (iv) यह वाक्य कभी सत्य होता है और कभी सत्य नहीं होता है। उदाहरण के लिए 2 का वर्ग एक सम संख्या है और 3 का वर्ग एक विषम संख्या है। इसलिए यह एक कथन नहीं है।
- (v) यह वाक्य कभी सत्य होता है और कभी असत्य होता है। उदाहरणार्थ, वर्ग और समचतुर्भुज भुजाएँ समान लंबाई की होती हैं जबकि आयत और समलम्ब की भुजाएँ असमान लंबाई की होती हैं। इसलिए, यह कथन नहीं है।
- (vi) यह एक आदेश है और इसलिए यह एक कथन नहीं है।
- (vii) यह वाक्य असत्य है, क्योंकि गुणनफल (-8) है। अतः यह एक कथन है।
- (viii) यह वाक्य सदैव सत्य होता है और इसलिए यह एक कथन है।
- (ix) प्रस्तुत संदर्भ से यह स्पष्ट नहीं है कि किस दिन का उल्लेख किया गया है और इसलिए यह एक कथन नहीं है।
- (x) यह एक सत्य कथन है, क्योंकि सभी वास्तविक संख्याओं को $a + i \times 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।
2. तीन उदाहरण इस प्रकार हो सकते हैं:
 - (i) इस कमरे में उपस्थित प्रत्येक व्यक्ति निडर है। यह एक कथन नहीं है, क्योंकि संदर्भ से स्पष्ट नहीं है कि यहाँ पर किस कमरे के बारे में कहा जा रहा है और निडर शब्द भी स्पष्ट रूप से परिभाषित नहीं है।
 - (ii) वह अभियान्त्रिकी की छात्रा है। यह भी एक कथन नहीं है क्योंकि यह स्पष्ट नहीं है कि 'वह' कौन है।
 - (iii) " $\cos^2 \theta$ का मान सदैव $1/2$ ". से अधिक होता है। जब तक हमें यह ज्ञात न हो कि θ क्या है हम यह नहीं कह सकते कि वाक्य सत्य है या नहीं।

प्रश्नावली 14.2

1. (i) चैन्नई तामिलनाडू की राजधानी नहीं है।
- (ii) $\sqrt{2}$ एक सम्मिश्र संख्या है।
- (iii) सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज हैं।

- (iv) संख्या 2 संख्या 7 से बड़ी नहीं है।
 (v) प्रत्येक प्राकृत संख्या एक पूर्णांक नहीं है।
2. (i) कथन “संख्या x एक परिमेय संख्या है।” पहले कथन का निषेधन है जो दूसरे कथन के समतुल्य है। यह इस कारण से कि जब कोई संख्या अपरिमेय नहीं है तो वह परिमेय है। अतः दिए हुए कथन एक दूसरे के निषेधन हैं।
 (ii) कथन “ x एक अपरिमेय संख्या है।” पहले कथन का निषेधन है, जो दूसरे कथन के समान है। इसलिए दोनों कथन एक दूसरे के निषेधन हैं।
3. (i) संख्या 3 अभाज्य है; संख्या 3 विषम है (सत्य)।
 (ii) सभी पूर्णांक धन हैं; सभी पूर्णांक ऋण हैं (असत्य)
 (iii) संख्या 100 संख्या 3 से भाज्य है, संख्या 100 संख्या 11 से भाज्य है तथा संख्या 100 संख्या 5 से भाज्य है (असत्य)।

प्रश्नावली 14.3

1. (i) ‘और’। घटक कथन :
 सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं।
 सभी वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याएँ नहीं होती हैं।
 (ii) ‘या’। घटक कथन :
 किसी पूर्णांक का वर्ग धन होता है।
 किसी पूर्णांक का वर्ग ऋण होता है।
 (iii) ‘और’। घटक कथन :
 रेत धूप में शीघ्र गरम हो जाती है।
 रेत रात्रि में शीघ्र ठंडी नहीं होती है।
 (iv) ‘और’। घटक कथन :
 $x = 2$ समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ का मूल है।
 $x = 3$ समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ का मूल है।
2. (i) “एक ऐसे का अस्तित्व है”। निषेधन
 एक ऐसी संख्या का अस्तित्व नहीं है जो अपने वर्ग के बराबर है।
 (ii) “प्रत्येक के लिए”। निषेधन
 एक ऐसी वास्तविक संख्या x का अस्तित्व है ताकि $x, x + 1$ से कम नहीं है।
 (iii) “एक ऐसे का अस्तित्व है”। निषेधन
 भारत में एक ऐसे राज्य का अस्तित्व है जिसकी राजधानी नहीं है।

3. निषेधन नहीं है। (i) में दिए हुए कथन का निषेधन: x और y वास्तविक संख्याओं के अस्तित्व इस प्रकार है, कि $x + y \neq y + x$, जो (ii) में दिए कथन से भिन्न है।
4. (i) अपवर्जित
(ii) अन्तर्विष्ट
(iii) अपवर्जित

प्रश्नावली 14.4

1. (i) एक प्राकृत संख्या विषम है का तात्पर्य है कि उसका वर्ग भी विषम है।
(ii) कोई प्राकृत संख्या विषम है केवल यदि उसका वर्ग विषम है।
(iii) किसी प्राकृत संख्या के विषम होने के लिए यह अनिवार्य है कि उसका वर्ग विषम है।
(iv) किसी प्राकृत संख्या के वर्ग के विषम होने के लिए यह पर्याप्त है कि संख्या विषम है।
(v) यदि किसी प्राकृत संख्या का वर्ग विषम नहीं है, तो वह प्राकृत संख्या विषम नहीं है।
2. (i) प्रतिधनात्मक:
यदि एक संख्या x विषम नहीं है, तो x एक अभाज्य संख्या नहीं है।
विलोम:
यदि एक संख्या x विषम है, तो x एक अभाज्य संख्या है।
- (ii) प्रतिधनात्मक:
यदि दो रेखाएँ एक दूसरे को एक तल में काटती हैं; तो रेखाएँ समान्तर नहीं हैं।
विलोम:
यदि दो रेखाएँ एक दूसरे को एक समतल में नहीं काटती हैं; तो रेखाएँ समान्तर हैं।
- (iii) प्रतिधनात्मक:
यदि कोई वस्तु कम तापक्रम पर नहीं है, तो वह वस्तु ठंडी नहीं है।
विलोम:
यदि कोई वस्तु कम तापक्रम पर है, तो वह वस्तु ठंडी है।
- (iv) प्रतिधनात्मक:
यदि आपको ज्ञात है कि निगमनात्मक विवेचन किस प्रकार किया जाता है, तो आप ज्यामिति विषय को आत्मसात् कर सकते हैं।
विलोम:
यदि आपको ज्ञात नहीं है कि निगमनात्मक विवेचन किस प्रकार किया जाता है, तो आप ज्यामिति विषय को आत्मसात् नहीं कर सकते हैं।

- (v) इस कथन को इस प्रकार लिख सकते हैं: “यदि x एक सम संख्या है, तो x संख्या 4 से भाज्य है।”
 प्रतिधनात्मक, यदि x संख्या 4, से भाज्य नहीं है, तो x एक सम संख्या नहीं है।
 विलोम: यदि x संख्या 4 से भाज्य है, तो x एक सम संख्या है।
3. (i) यदि आपको नौकरी मिल गई है, तो आपकी विश्वसनीयता अच्छी है
 (ii) यदि केले का पेड़ एक माह तक गरम बना रहता है तो केले के पेड़ में फूल लगेंगे।
 (iii) यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, तो वह एक समान्तर चतुर्भुज है।
 (iv) यदि आप कक्षा में A+ ग्रेड पाते हैं, तो आप पुस्तक के सभी प्रश्न सरल कर लेते हैं।
4. a (i) प्रतिधनात्मक
 (ii) विलोम
 b (i) प्रतिधनात्मक
 (ii) विलोम

प्रश्नावली 14.5

5. (i) असत्य। परिभाषा से जीवा वृत्त को दो भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर काटती है।
 (ii) असत्य। इसे एक प्रत्युदाहरण द्वारा सिद्ध किया जा सकता है। एक ऐसी जीवा जो व्यास नहीं है एक प्रत्युदाहरण है।
 (iii) सत्य। यदि दीर्घवृत्त के समीकरण में $a = b$, रखा जाए तो वह वृत्त का समीकरण हो जाता है (प्रत्यक्ष विधि)।
 (iv) सत्य। असमिका के नियम द्वारा।
 (v) असत्य। क्योंकि 11 एक अभाज्य संख्या है, इसलिए $\sqrt{11}$ अपरिमेय है।

अध्याय 14 पर विविध प्रश्नावली

1. (i) एक ऐसी धनात्मक वास्तविक संख्या x का अस्तित्व है कि $x-1$ धनात्मक नहीं है।
 (ii) एक ऐसी बिल्ली का अस्तित्व है जो खरोचती नहीं है।
 (iii) एक ऐसी वास्तविक संख्या x का अस्तित्व है कि न तो $x > 1$ और न $x < 1$.
 (iv) किसी ऐसी वास्तविक संख्या x का अस्तित्व नहीं है कि $0 < x < 1$.
2. (i) कथन इस प्रकार भी लिखा जा सकता है “यदि एक धन पूर्णांक अभाज्य है, तो 1 तथा स्वयं के अतिरिक्त इसका कोई अन्य भाज्य नहीं है।”
 प्रतिधनात्मक
 यदि एक धन पूर्णांक के 1 तथा स्वयं के अतिरिक्त अन्य भाजक भी हैं, तो वह पूर्णांक अभाज्य संख्या नहीं है।

(ii) प्रदत्त कथन इस प्रकार भी लिखा जा सकता है : यदि दिन में धूप है तो मैं समुद्र तट पर जाता हूँ।

विलोम:

यदि मैं समुद्र तट पर नहीं जाता हूँ, तो दिन में धूप है।

प्रतिधनात्मक

यदि मैं समुद्र तट पर नहीं जाता हूँ, तो दिन में धूप नहीं है।

(iii) विलोम:

यदि आपको प्यास लगी है, तो बाहर गरम है।

प्रतिधनात्मक

यदि आपको प्यास नहीं लगती है, तो बाहर गरमी नहीं है।

3. (i) यदि सर्वर पर लाग आन है, तो पासवर्ड ज्ञात है।

(ii) यदि वर्षा होती है, तो यातायात में अवरोध उत्पन्न होता है।

(iii) यदि आप निर्धारित शुल्क का भुगतान करते हैं, तो आप वेबसाइट में प्रवेश कर सकते हैं।

4. (i) आप टेलीविजन देखते हैं यदि और केवल यदि आपका मन मुक्त है।

(ii) आप A-ग्रेड पाते हैं यदि और केवल यदि आप समस्त गृहकार्य नियमित रूप से करते हैं।

(iii) एक चतुर्भुज समान कोणिक है यदि और केवल यदि वह एक आयत है।

5. “और” से प्रयुक्त मिश्र कथन: 25 संख्या 5 और 8 का गुणज है।

यह असत्य है।

“या” से प्रयुक्त मिश्र कथन : 25 संख्या 5 या 8 का गुणज है।

यह सत्य है।

7. प्रश्नावली 14.4 का प्रश्न संख्या 1 देखिए

प्रश्नावली 15.1

1. 3

2. 8.4

3. 2.33

4. 7

5. 6.32

6. 16

7. 3.23

8. 5.1

9. 157.92

10. 11.28

11. 10.34

12. 7.35

प्रश्नावली 15.2

1. 9, 9.25
2. $\frac{n+1}{2}, \frac{n^2-1}{12}$
3. 16.5, 74.25
4. 19, 43.4
5. 100, 29.09
6. 64, 1.69
7. 107, 2276
8. 27, 132
9. 93, 105.58, 10.27
10. 5.55, 43.5

प्रश्नावली 15.3

1. B
2. Y
3. (i) B, (ii) B
4. A
5. भार

अध्याय 15 पर विविध प्रश्नावली

1. 4, 8
2. 6, 8
3. 24, 12
5. (i) 10.1, 1.99 (ii) 10.2, 1.98
6. अधिकतम रसायन शास्त्र तथा न्यूनतम गणित
7. 20, 3.036

प्रश्नावली 16.1

1. {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT, TTT}
2. $\{(x, y) : x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
या $\{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \dots, (6,1), (6,2), \dots, (6,6)\}$
3. {HHHH, HHHT, HHHT, HTHH, THHH, HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH, HTTT, THTT, TTHT, TTTH, TTTT}
4. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}
5. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T}
6. {XB₁, XB₂, XG₁, XG₂, YB₃, YG₃, YG₄, YG₅}
7. {R1, R2, R3, R4, R5, R6, W1, W2, W3, W4, W5, W6, B1, B2, B3, B4, B5, B6}
8. (i) {BB, BG, GB, GG} (ii) {0, 1, 2}
9. {RW, WR, WW}
10. {HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6}
11. {DDD, DDN, DND, NDD, DNN, NDN, NND, NNN}
12. {T, H1, H3, H5, H21, H22, H23, H24, H25, H26, H41, H42, H43, H44, H45, H46, H61, H62, H63, H64, H65, H66}
13. {(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)}
14. {1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2H, 2T, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4H, 4T, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT, 6H, 6T}

15. $\{TR_1, TR_2, TB_1, TB_2, TB_3, H1, H2, H3, H4, H5, H6\}$
 16. $\{6, (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (1,1,6), (1,2,6), \dots, (1,5,6), (2,1,6), (2,2,6), \dots, (2,5,6), \dots, (5,1,6), (5,2,6), \dots\}$

प्रश्नावली 16.2

1. No.
 2. (i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) ϕ (iii) $\{3, 6\}$ (iv) $\{1, 2, 3\}$ (v) $\{6\}$
 (vi) $\{3, 4, 5, 6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \phi$, $B \cup C = \{3, 6\}$, $E \cap F = \{6\}$,
 $D \cap E = \phi$,
 $A - C = \{1, 2, 4, 5\}$, $D - E = \{1, 2, 3\}$, $E \cap F' = \phi$, $F' = \{1, 2\}$
 3. $A = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (4,6), (5,5), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)\}$
 $B = \{(1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$
 $C = \{(3,6), (6,3), (5,4), (4,5), (6,6)\}$
 A और B, B और C परस्पर अपवर्जी हैं
 4. (i) A और B; A और C; B और C; C और D (ii) A और C (iii) B और D
 5. (i) “न्यूनतम दो पट्ट प्राप्त होना”, और “न्यूनतम दो चित् प्राप्त होना”
 (ii) “कोई पट्ट प्राप्त न होना”, “तथ्यतः एक पट्ट प्राप्त होना” और “न्यूनतम दो पट्ट प्राप्त होना”
 (iii) “अधिकतम दो चित्त प्राप्त होना”, और “तथ्यतः दो चित्त प्राप्त होना”
 (iv) “तथ्यतः एक पट्ट प्राप्त होना” और “तथ्यतः दो पट्ट प्राप्त होना”
 (v) “तथ्यतः एक चित्त प्राप्त होना” और “तथ्यतः दो चित्त प्राप्त होना” और “तथ्यतः तीन चित्त प्राप्त होना”



उपरोक्त प्रश्न के उत्तर में अन्य घटनाएँ भी हो सकती हैं

6. $A = \{(2, 1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$
 $B = \{(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\}$
 $C = \{(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$
 (i) $A' = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\} = B$
 (ii) $B' = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} = A$
 (iii) $A \cup B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} = S$

(iv) $A \cap B = \phi$

(v) $A - C = \{(2,4), (2,5), (2,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

(vi) $B \cup C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\}$

(vii) $B \cap C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,1), (3,2)\}$

(viii) $A \cap B' \cap C' = \{(2,4), (2,5), (2,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

7. (i) सत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य, (iv) असत्य, (v) असत्य, (vi) असत्य

प्रश्नावली 16.3

1. (a) हाँ (b) हाँ (c) नहीं (d) नहीं (e) नहीं

2. $\frac{3}{4}$

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{1}{6}$ (iv) 0 (v) $\frac{5}{6}$

4. (a) 52 (b) $\frac{1}{52}$ (c) (i) $\frac{1}{13}$, (ii) $\frac{1}{2}$

5. (i) $\frac{1}{12}$, (ii) $\frac{1}{12}$

6. $\frac{3}{5}$

7. 4.00 रु लाभ, 1.50 रु लाभ, 1.00 रु हानि, 3.50 रु हानि, 6.00 रु हानि

$$P(4.00 \text{ रु जीतना}) = \frac{1}{16}, P(1.50 \text{ रु जीतना}) = \frac{1}{4}, P(1.00 \text{ रु हारना}) = \frac{3}{8}$$

$$P(3.50 \text{ रु हारना}) = \frac{1}{4}, P(6.00 \text{ रु हानि}) = \frac{1}{16}$$

8. (i) $\frac{1}{8}$, (ii) $\frac{3}{8}$, (iii) $\frac{1}{2}$, (iv) $\frac{7}{8}$, (v) $\frac{1}{8}$, (vi) $\frac{1}{8}$, (vii) $\frac{3}{8}$, (viii) $\frac{1}{8}$, (ix) $\frac{7}{8}$

9. $\frac{9}{11}$

10. (i) $\frac{6}{13}$, (ii) $\frac{7}{13}$

11. $\frac{1}{38760}$

12. (i) नहीं, क्योंकि $P(A \cap B)$, $P(A)$ और $P(B)$, से छोटा या उसके बराबर होना चाहिए (ii) हाँ

13. (i) $\frac{7}{15}$, (ii) 0.5, (iii) 0.15

14. $\frac{4}{5}$

15. (i) $\frac{5}{8}$, (ii) $\frac{3}{8}$

16. No

17. (i) 0.58, (ii) 0.52, (iii) 0.74,

18. 0.6

19. 0.55

20. 0.65

21. (i) $\frac{19}{30}$ (ii) $\frac{11}{30}$ (iii) $\frac{2}{15}$

अध्याय 16 पर विविध प्रश्नावली

1. (i) $\frac{{}^{20}C_5}{{}^{60}C_5}$ (ii) $1 - \frac{{}^{30}C_5}{{}^{60}C_5}$ 2. $\frac{{}^{13}C_3 \cdot {}^{13}C_1}{{}^{52}C_4}$

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{5}{6}$ 4. (a) $\frac{999}{1000}$ (b) $\frac{{}^{9990}C_2}{{}^{10000}C_2}$ (c) $\frac{{}^{9990}C_{10}}{{}^{10000}C_{10}}$

5. (a) $\frac{17}{33}$ (b) $\frac{16}{33}$ 6. $\frac{2}{3}$

7. (i) 0.88 (ii) 0.12 (iii) 0.19 (iv) 0.34 8. $\frac{4}{5}$

9. (i) $\frac{33}{83}$ (ii) $\frac{3}{8}$ 10. $\frac{1}{5040}$

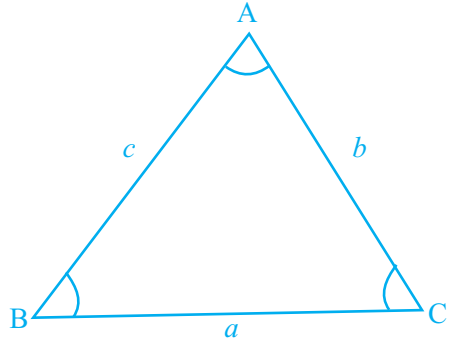


पूरक पाठ्य सामग्री

अध्याय 3

3.6. साइन (sine) और कोसाइन (cosine) सूत्रों की उपपत्तियाँ तथा उनके कुछ सरल अनुप्रयोग

मान लीजिए कि ABC एक त्रिभुज है। कोण A से हमारा तात्पर्य है कि भुजाओं AB और AC से बना कोण, जो 0° और 180° के बीच में स्थित है। कोणों B और C को भी इस प्रकार परिभाषित किया जाता है। शीर्षों C, A और B की सम्मुख भुजाओं को क्रमशः c, a और b से व्यक्त किया जाएगा (देखिए आकृति 3.15)।



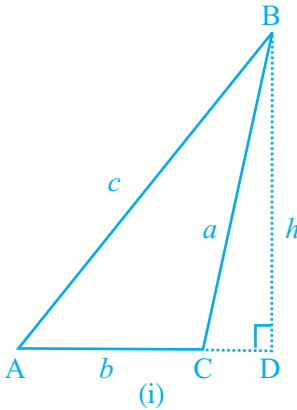
आकृति 3.15

प्रमेय 1 (साइन सूत्र) किसी भी त्रिभुज में, भुजाएँ सम्मुख कोणों के साइनों (sines) के समानुपाती होती हैं।

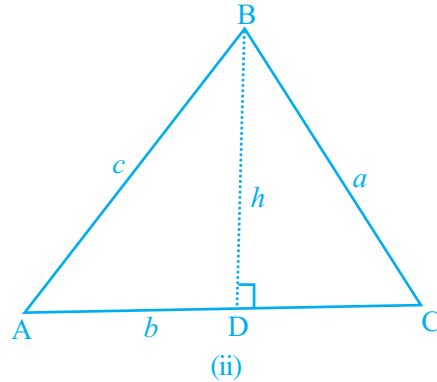
अर्थात् एक त्रिभुज ABC में,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

उपपत्ति मान लीजिए कि आकृति 3.16 (i) और (ii) में दर्शाए दोनों त्रिभुजों में से प्रत्येक ΔABC है।



(i)



(ii)

आकृति 3.16

शीर्ष B से शीर्षलंब h खींचा गया है, जो भुजा AC के बिंदु D पर मिलता है [(i) में AC को शीर्षलंब से मिलने के लिए बढ़ाया गया है]। आकृति 3.16(i) में समकोण त्रिभुज ABC से, हमें प्राप्त होता है—

$$\sin A = \frac{h}{c}, \text{ अर्थात् } h = c \sin A \quad (1)$$

$$\text{तथा} \quad \sin (180^\circ - C) = \frac{h}{a} \quad h = a \sin C \quad (2)$$

(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है—

$$c \sin A = a \sin C, \text{ अर्थात् } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \quad (3)$$

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \quad (4)$$

(3) और (4) से, हम प्राप्त करते हैं—

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

आकृति 3.16 (ii) के त्रिभुज ABC के लिए, समीकरण (3) और (4) इसी प्रकार प्राप्त होते हैं।

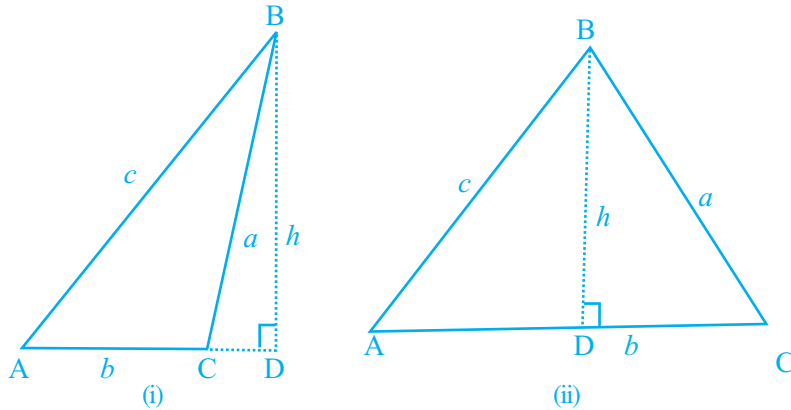
प्रमेय 2 (कोसाइन सूत्र) मान लीजिए कि A, B और C किसी त्रिभुज ABC के कोण हैं तथा a, b और c क्रमशः कोणों A, B और C की सम्मुख भुजाओं की लंबाईयाँ हैं। तब,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

उपपत्ति मान लीजिए कि ABC आकृति 3.17 (i) और (ii) में दिए अनुसार एक त्रिभुज है।



आकृति 3.17

आकृति 3.17 (ii) के संदर्भ में, हम प्राप्त करते हैं—

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + DC^2 = BD^2 + (AC - AD)^2 \\ &= BD^2 + AD^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AB \cos A \end{aligned}$$

या $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

इसी प्रकार, हम प्राप्त कर सकते हैं कि

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

और

इसी प्रकार की समीकरण, हम आकृति 3.17 (i) के लिए भी प्राप्त कर सकते हैं, जहाँ C एक अधिक कोण है। जब कोणों को ज्ञात करना हो, तो कोसाइन सूत्रों के सुविधाजनक सूत्र नीचे दिए जा रहे हैं—

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

उदाहरण 25 त्रिभुज ABC में, सिद्ध कीजिए कि

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$$

$$\tan \frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{B}{2}$$

$$\tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}$$

हल साइन सूत्र से, हमें प्राप्त होता है—

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \quad (\text{मान लीजिए})$$

अतः,

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{k(\sin B - \sin C)}{k(\sin B + \sin C)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} \\
&= \cot \frac{(B+C)}{2} \tan \frac{(B-C)}{2} \\
&= \cot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) \tan \left(\frac{B-C}{2} \right) \\
&= \frac{\tan \frac{B-C}{2}}{\cot \frac{A}{2}}
\end{aligned}$$

अतः $\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$

इसी प्रकार, हम अन्य परिणामों को सिद्ध कर सकते हैं। इन परिणामों को नेपियर की अनुपात (Napier's Analogies) के रूप में जाना जाता है।

उदाहरण 26 किसी त्रिभुज ABC में, सिद्ध कीजिए कि

$$a \sin (B-C) + b \sin (C-A) + c \sin (A-B) = 0 \text{ होता है।}$$

हल आप जानते हैं कि

$$a \sin (B-C) = a [\sin B \cos C - \cos B \sin C] \quad (1)$$

अब, $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k$ (मान लीजिए)

अतः, $\sin A = ak$, $\sin B = bk$, $\sin C = ck$

(1) में, $\sin B$ और $\sin C$ के मान रखकर कोसाइन सूत्र के प्रयोग द्वारा, हम प्राप्त करते हैं—

$$\begin{aligned}
a \sin(B-C) &= a \left[bk \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) - ck \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \right) \right] \\
&= \frac{k}{2} (a^2 + b^2 - c^2 - c^2 - a^2 + b^2) \\
&= k(b^2 - c^2)
\end{aligned}$$

इसी प्रकार, $b \sin (C-A) = k (c^2 - a^2)$

और $c \sin (A - B) = k (a^2 - b^2)$

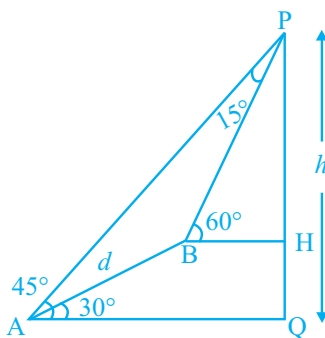
अतः
$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= k (b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2) \\ &= 0 = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

उदाहरण 27 उँचाई h वाली किसी उर्ध्वाधर मीनार PQ के शीर्ष बिंदु P का एक बिंदु A से उन्नयन कोण 45° है तथा बिंदु B से उन्नयन कोण 60° है, जहाँ B बिंदु A से दूरी d पर स्थित है, जिसे रेखा AB के अनुदिश मापा गया है, जो AQ के साथ 30° का कोण बनाती है।

सिद्ध कीजिए कि $d = h(\sqrt{3} - 1)$ है।

हल आकृति 3.18 से, हमें प्राप्त है—

$\angle PAQ = 45^\circ$, $\angle BAQ = 30^\circ$, $\angle PBH = 60^\circ$



आकृति 3.18

स्पष्टतः $\angle APQ = 45^\circ$, $\angle BPH = 30^\circ$, जिससे $\angle APB = 15^\circ$ प्राप्त होता है।

पुनः, $\angle PAB = 15^\circ \Rightarrow \angle ABP = 150^\circ$

त्रिभुज APQ से, हमें प्राप्त होता है—

$$AP^2 = h^2 + h^2 = 2h^2 \text{ (क्यों ?)}$$

या $AP = \sqrt{2}h$

ΔABP में, साइन सूत्र का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है—

$$\frac{AB}{\sin 15^\circ} = \frac{AP}{\sin 150^\circ} \quad \frac{d}{\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{2}h}{\sin 150^\circ}$$

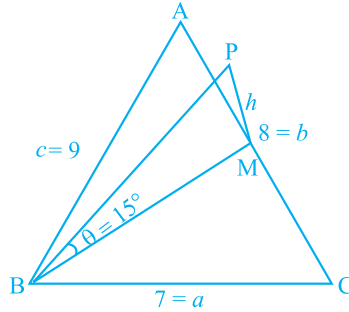
अर्थात्,

$$\begin{aligned} d &= \frac{\sqrt{2}h \sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} \\ &= h(\sqrt{3} - 1) \text{ (क्यों ?)} \end{aligned}$$

उदाहरण 28 एक लेम्प-पोस्ट किसी त्रिभुजाकार भूखंड ABC की भुजा AC के मध्य-बिंदु M पर स्थित है, जिसमें $BC = 7\text{m}$, $CA = 8\text{m}$ और $AB = 9\text{m}$ है। यह लेम्प पोस्ट बिंदु B पर 15° का कोण अंतरित करता है। लेम्प पोस्ट की उँचाई निर्धारित कीजिए।

हल आकृति 3.19 से, मह प्राप्त करते हैं—

$AB = 9 = c$, $BC = 7 = a$ और $AC = 8 = b$.



आकृति 3.19

M भुजा AC का मध्य-बिंदु है, जिस पर उँचाई h (मान लीजिए) का लेम्प पोस्ट स्थित है। पुनः यह भी दिया गया है कि लेम्प पोस्ट बिंदु B पर कोण θ (मान लीजिए) अंतरित करता है, जो 15° के बराबर है। $\triangle ABC$ में, कोसाइन सूत्र का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं;

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + 64 - 81}{2 \times 7 \times 8} = \frac{2}{7} \quad (1)$$

इसी प्रकार, $\triangle BMC$ में कोसाइन सूत्र का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं—

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 - 2 BC \times CM \cos C.$$

यहाँ, $CM = \frac{1}{2}CA = 4$, क्योंकि M भुजा AC का मध्य-बिंदु है।

इसलिए, (1) का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है—

$$\begin{aligned} BM^2 &= 49 + 16 - 2 \times 7 \times 4 \times \frac{2}{7} \\ &= 49 \end{aligned}$$

या $BM = 7$

अतः, $\triangle BMP$ जिसका बिंदु M पर कोण समकोण है, से, हमें प्राप्त होता है—

$$\tan \theta = \frac{PM}{BM} = \frac{h}{7}$$

या $\frac{h}{7} = \tan(15^\circ) = 2 - \sqrt{3}$ (क्यों ?)

या $h = 7(2 - \sqrt{3})\text{m}.$

प्रश्नावली 3.5

किसी त्रिभुज ABC में, यदि $a = 18$, $b = 24$, और $c = 30$ है। तो प्राप्त कीजिए—

1. $\cos A, \cos B, \cos C$ (उत्तर $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0$)

2. $\sin A, \sin B, \sin C$ (उत्तर $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$)

किसी त्रिभुज ABC के लिए, सिद्ध कीजिए कि—

3. $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}$

4. $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}}$

5. $\sin\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a} \cos\frac{A}{2}$

6. $a(b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2$

7. $a(\cos C - \cos B) = 2(b-c) \cos^2 \frac{A}{2}$

8. $\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{b^2 - c^2}{a^2}$

9. $(b+c) \cos\frac{B+C}{2} = a \cos\frac{B-C}{2}$

10. $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C$

11. $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

12. $(b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B + (a^2 - b^2) \cot C = 0$

13. $\frac{b^2 - c^2}{a^2} \sin 2A + \frac{c^2 - a^2}{b^2} \sin 2B + \frac{a^2 - b^2}{c^2} \sin 2C = 0$

14. एक पहाड़ी क्षैतिज से 15° कोण बनाती है। इस पहाड़ी पर एक पेड़ उर्ध्वाधर खड़ा हुआ है। पहाड़ी की ढाल के अनुदिश 35 m की दूरी भूमि पर स्थित किसी बिंदु से, पेड़ के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। पेड़ की उँचाई ज्ञात कीजिए। (उत्तर $35\sqrt{2}$ m)

15. दो जहाज एक ही समय पर, किसी बंदरगाह से चलते हैं। एक 24 km प्रति घंटा की चाल से $N45^\circ E$ दिशा में चलता है तथा दूसरा 32 km प्रति घंटा की चाल से $S75^\circ E$ की दिशा में चलता है। 3 घंटे के पश्चात् दोनों जहाजों की दूरी ज्ञात कीजिए।

(उत्तर 86.4 km (लगभग))

16. दो पेड़ A और B एक नदी के एक ही ओर खड़े हैं। नदी के अंदर किसी बिंदु C से पेड़ों A और B की दूरियाँ क्रमशः 250 m और 300 m हैं। यदि कोण C, 45° के बराबर है, तो पेड़ों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{2} = 1.44$ का प्रयोग कीजिए) (उत्तर 215.5 m)

अध्याय 5

5.7. एक सम्मिश्र संख्या का वर्गमूल

हम पाठ्यपुस्तक के पृष्ठों 108-109 पर सम्मिश्र मूलों से संबद्ध द्विघात समीकरणों के हल करने की चर्चा कर चुके हैं। यहाँ हम मानक रूप में व्यक्त किसी सम्मिश्र संख्या के वर्गमूल ज्ञात करने की विशिष्ट विधि को स्पष्ट करेंगे। हम एक उदाहरण द्वारा इसे स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 12 $-7 - 24i$ के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $x + iy = \sqrt{-7 - 24i}$ है।

$$\text{तब,} \quad (x + iy)^2 = -7 - 24i$$

$$\text{या} \quad x^2 - y^2 + 2xyi = -7 - 24i$$

वास्तविक और काल्पनिक भागों को बराबर करने पर, हमें प्राप्त होता है—

$$x^2 - y^2 = -7 \quad (1)$$

$$2xy = -24$$

$$\text{सर्वसमिका} \quad (x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 \text{ से,}$$

$$(x^2 + y^2) = 49 + 576 = 625$$

$$\text{अतः,} \quad x^2 + y^2 = 25 \quad (2)$$

(1) और (2) से, $x^2 = 9$ और $y^2 = 16$ प्राप्त होता है।

$$\text{या} \quad x = \pm 3 \text{ और } y = \pm 4$$

क्योंकि गुणनफल xy ऋणात्मक है, इसलिए हमें प्राप्त होता है—

$$x = 3, y = -4 \text{ or, } x = -3, y = 4$$

अतः, $-7 - 24i$ के वर्गमूल $3 - 4i$ और $-3 + 4i$ हैं।

प्रश्नावली 5.4

निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात कीजिए—

1. $-15 - 8i$ (उत्तर $1 - 4i, -1 + 4i$)

2. $-8 - 6i$ (उत्तर $1 - 3i, -1 + 3i$)

3. $1 - i$ (उत्तर $\left(\pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \mp \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} i \right)$)

4. $-i$ (उत्तर $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \mp \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$)

$$5. i \text{ (उत्तर } \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)) \quad 6. 1 + i \text{ (उत्तर } \left(\pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} i \right))$$

अध्याय 9

9.7. अपरिमित G.P. और उसका योग

$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$ के प्रकार की G.P. एक अपरिमित (infinite) G.P. कहलाती है। अब, एक अपरिमित G.P. के योग का सूत्र ज्ञात करने के लिए, हम एक उदाहरण से प्रारंभ करते हैं। आइए निम्न G.P. पर विचार करें—

$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \dots$$

यहाँ $a = 1, r = \frac{2}{3}$ है। हमें प्राप्त होता है—

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

जैसे-जैसे n बड़ा होता जाता है, आइए देखें कि $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ का क्या व्यवहार रहता है।

n	1	5	10	20
$\frac{2}{3}^n$	0.6667	0.1316872428	0.01734152992	0.00030072866

हम देखते हैं कि जैसे-जैसे n बड़ा होता जाता है, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ शून्य के निकटतर और अधिकतर निकटतर

होता जाता है। गणितीय रूप से, हम कहते हैं कि जैसे n पर्याप्त रूप से बड़ा हो जाता है, वैसे ही $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

पर्याप्त रूप से छोटा हो जाता है। दूसरे शब्दों में, जब $n \rightarrow \infty, \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$ होता है। इसके परिणाम स्वरूप,

हम ज्ञात करते हैं कि अपरिमित रूप से अनेक पदों का योग $S_\infty = 3$ है।

अब, एक गुणोत्तर श्रेणी $a, ar, ar^2, \dots$ के लिए, यदि सार्वानुपात r का संख्यात्मक मान 1 से छोटा है, तो

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

इस स्थिति में, जब $n \rightarrow \infty$, $r^n \rightarrow 0$ है, क्योंकि $|r| < 1$ है। अतः,

$$S_n \rightarrow \frac{a}{1-r}$$

सांकेतिक रूप से, अपरिमित पदों के योग को S_∞ या S से व्यक्त किया जाता है।

इस प्रकार, हमें $S = \frac{a}{1-r}$ प्राप्त होता है।

उदाहरणार्थ, (i) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$

(ii) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

प्रश्नावली 9.4

निम्न गुणोत्तर श्रेणियों के अपरिमित पदों तक योग ज्ञात कीजिए—

1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$

(उत्तर 1.5)

2. $6, 1.2, .24, \dots$

(उत्तर 7.5)

3. $5, \frac{20}{7}, \frac{80}{49}, \dots$

(उत्तर $\frac{35}{3}$)

4. $\frac{-3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{-3}{64}, \dots$

(उत्तर $\frac{-3}{5}$)

5. सिद्ध कीजिए कि $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \dots = 3$ है।

6. मान लीजिए कि $x = 1 + a + a^2 + \dots$ और $y = 1 + b + b^2 + \dots$, जहाँ $|a| < 1$ और $|b| < 1$ है। सिद्ध कीजिए कि

$$1 + ab + a^2b^2 + \dots = \frac{xy}{x + y - 1}$$

अध्याय 10

10.6 दो रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर जाने वाली रेखाओं के कुल (परिवार) की समीकरण

मान लीजिए कि दो प्रतिच्छेदी रेखाओं l_1 और l_2 की समीकरण निम्न हैं—

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{और} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (2)$$

समीकरणों (1) और (2) से, हम निम्न समीकरण बना सकते हैं—

$$A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (3)$$

जहाँ k एक स्वेच्छ अचर है, जिसे प्राचल (parameter) कहा जाता है। k के किसी भी मान के लिए, समीकरण (3) चरों x और y में प्रथम घात की समीकरण है। अतः, यह रेखाओं के एक कुल (family) को निरूपित करती है। k के किसी मान को लेकर इस कुल (या परिवार) के एक विशिष्ट सदस्य को प्राप्त किया जा सकता है। k के इस मान को अन्य प्रतिबंधों द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 20 उस रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए, जो y -अक्ष के समांतर है तथा $x - 7y + 5 = 0$ और $3x + y - 7 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर खींची गई है।

हल दी हुई रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर जानेवाली रेखा की समीकरण निम्न रूप की होगी—

$$x - 7y + 5 + k(3x + y - 7) = 0$$

$$\text{अर्थात्} \quad (1 + 3k)x + (k - 7)y + 5 - 7k = 0 \quad (1)$$

यदि यह रेखा y -अक्ष के समांतर है, तो y का गुणांक शून्य होगा।

अर्थात्, $k - 7 = 0$ है, जिससे $k = 7$ प्राप्त होता है।

k के इस मान को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है—

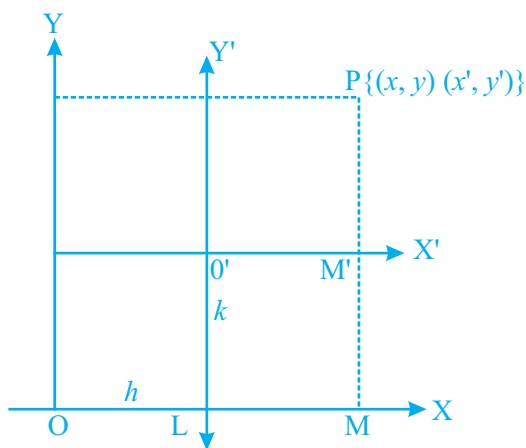
$$22x - 44 = 0, \quad \text{अर्थात्} \quad x - 2 = 0, \quad \text{जो वाँछित समीकरण है।}$$

उदाहरण 10.4

1. उस रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखाओं $3x + 4y = 7$ और $x - y + 2 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर जाती है और उसकी प्रवणता 5 है। (उत्तर $35x - 7y + 18 = 0$)
2. रेखाओं $x + 2y - 3 = 0$ और $4x - y + 7 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर जाने उस रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $5x + 4y - 20 = 0$ के समांतर है। (उत्तर $15x + 12y - 7 = 0$)
3. रेखाओं $2x + 3y - 4 = 0$ और $x - 5y = 7$ के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर जाने वाली उस रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका x -अंतः खंड -4 के बराबर है। (उत्तर $10x + 93y + 40 = 0$)
4. रेखाओं $5x - 3y = 1$ और $2x + 3y - 23 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर जाने वाली उस रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $5x - 3y - 1 = 0$ पर लंब है। (उत्तर $63x + 105y - 781 = 0$)

10.7. मूलबिंदु का स्थानांतरण

निर्देशांक अक्षों की एक निकाय (system) के संदर्भ में, बिंदुओं के एक समुच्चय के संगत एक समीकरण को, बिंदुओं के समुच्चय को एक उपयुक्त निर्देशांक पद्धति में इस प्रकार लेकर कि सभी ज्यामितीय गुण अपरिवर्तनीय रहें, सरलीकृत किया जा सकता है। एक ऐसा रूपांतरण है जिसमें नई अक्षों को प्रारंभिक अक्षों के समांतर बदल दिया जाता है तथा मूलबिंदु को नए बिंदु पर स्थानांतरित कर दिया जाता है। इस प्रकार के रूपांतरण को *अक्षों का स्थानांतरण* कहते हैं।



आकृति 10.21

तल के प्रत्येक बिंदु के निर्देशांक अक्षों के इस स्थानांतरण के अंतर्गत बदल जाते हैं। बिंदुओं के पुराने और नए निर्देशांकों के बीच संबंध ज्ञात होने पर, हम निर्देशांक अक्षों की नई पद्धति के पदों में एक विश्लेषणात्मक समस्या का अध्ययन कर सकते हैं।

यह देखने के लिए कि अक्षों के एक स्थानांतरण के अंतर्गत तल के एक बिंदु के निर्देशांक किस प्रकार बदलते हैं, आइए अक्षों OX और OY के संदर्भ में एक बिंदु $P(x, y)$ लें। मान लीजिए कि $O'X'$ और $O'Y'$ क्रमशः OX और OY के समांतर नई अक्ष हैं, जहाँ O' नया मूलबिंदु है। मान लीजिए कि पुरानी अक्षों के संदर्भ में O' के निर्देशांक (h, k) हैं, अर्थात् $OL = h$ और $LO' = k$ है। साथ ही, $OM = x$ और $MP = y$ है (देखिए आकृति 10.21)।

मान लीजिए कि $O'M' = x'$ और $M'P = y'$ क्रमशः, नई अक्षों $O'X'$ और $O'Y'$ के संदर्भ में, बिंदु P के भुज और कोटि हैं। आकृति 10.21 से, यह सरलता से देखा जा सकता है कि

$$OM = OL + LM, \text{ अर्थात् } x = h + x'$$

$$\text{और } MP = MM' + M'P, \text{ अर्थात् } y = k + y'$$

$$\text{अतः, } x = x' + h \text{ और } y = y' + k$$

ये ही सूत्र पुराने और नए निर्देशांकों में संबंध दर्शाते हैं।

उदाहरण 21 बिंदु $(3, -4)$ के नए निर्देशांक ज्ञात कीजिए, यदि मूलबिंदु को $(1, 2)$ पर स्थानांतरित कर दिया जाता है।

हल नए मूलबिंदु के निर्देशांक $h = 1$ और $k = 2$ हैं तथा बिंदु के प्रारंभिक निर्देशांक $x = 3$ और $y = -4$ हैं।

पुराने निर्देशांक (x, y) और नए निर्देशांक (x', y') के बीच में रूपांतरण संबंध निम्न से दिए जाते हैं—

$$x = x' + h \quad \text{अर्थात्} \quad x' = x - h$$

$$\text{और } y = y' + k \quad \text{अर्थात् } y' = y - k$$

मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं—

$$x' = 3 - 1 = 2 \text{ और } y' = -4 - 2 = -6$$

अतः, नई पद्धति में बिंदु $(3, -4)$ के निर्देशांक $(2, -6)$ हैं।

उदाहरण 22 सरल रेखा $2x - 3y + 5 = 0$ की रूपांतरित समीकरण ज्ञात कीजिए, यदि अक्षों के स्थानांतरण द्वारा मूलबिंदु को बिंदु $(3, -1)$ पर स्थानांतरित कर दिया जाता है।

हल मान लीजिए कि एक बिंदु P के निर्देशांक (x, y) नई निर्देशांक अक्षों में (x', y') में बदल जाते हैं, जबकि मूलबिंदु $h = 3, k = -1$ हो जाता है। अतः, हम रूपांतरण सूत्रों को $x = x' + 3$ और $y = y' - 1$ के रूप में लिख सकते हैं। सरल रेखा की दी हुई समीकरण में इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है—

$$2(x' + 3) - 3(y' - 1) + 5 = 0$$

$$\text{या } 2x' - 3y' + 14 = 0$$

अतः, नई पद्धति में, सरल रेखा की समीकरण $2x - 3y + 14 = 0$

प्रश्नावली 10.5

1. निम्न में से प्रत्येक स्थिति में, बिंदुओं के नए निर्देशांक ज्ञात कीजिए, यदि अक्षों के एक स्थानांतरण द्वारा मूलबिंदु को बिंदु $(-3, -2)$ पर स्थानांतरित कर दिया जाता है—

(i) $(1, 1)$ (उत्तर $(4, 3)$) (ii) $(0, 1)$ (उत्तर $(3, 3)$)

(iii) $(5, 0)$ (उत्तर $(8, 2)$) (iv) $(-1, -2)$ (उत्तर $(2, 0)$)

(v) $(3, -5)$ (उत्तर $(6, -3)$)

2. ज्ञात कीजिए कि मूलबिंदु को बिंदु $(1, 1)$ पर स्थानांतरित करने पर निम्न समीकरण क्या हो जाती है;

(i) $x^2 + xy - 3y^2 - y + 2 = 0$ (उत्तर $x^2 - 3y^2 + xy + 3x - 6y + 1 = 0$)

(ii) $xy - y^2 - x + y = 0$ (उत्तर $xy - y^2 = 0$)

(iii) $xy - x - y + 1 = 0$ (उत्तर $xy = 0$)

अध्याय 13

13.5. चरघातांकीय और लघुगणकीय फलनों से संबद्ध सीमाएँ

चरघातांकीय (exponential) और लघुगणकीय (logarithmic) फलनों से संबंध व्यंजकों की सीमाओं (limits) के मानों को निकालने की चर्चा करने से पहले, हम इन दोनों फलनों के प्रांत और परिसर बताते

हुए, इनका परिचय कराते हैं तथा इनके रफ़ आलेख बनाते हैं। एक महान स्विस गणितज्ञ लियोनार्ड ऑयलर (1707–1783) ने संख्या e का परिचय दिया जिसका मान 2 और 3 के बीच स्थित है। यह संख्या चरघातांकीय फलन को परिभाषित करने के लिए उपयोगी है तथा इसे $f(x) = e^x, x \in \mathbf{R}$ के रूप में परिभाषित किया जाता है। इसका प्रांत $\mathbf{R}$ है और परिसर घनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। चरघातांकीय फलन, अर्थात् $y = e^x$ का आलेख आकृति 13.11 में दिए अनुसार होता है।

इसी प्रकार, लघुगणकीय फलन, जिसे

$\log_e : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ के रूप में व्यक्त किया जाता है, को $\log_e x = y$ द्वारा प्रदत्त किया जाता है, यदि और केवल यदि $e^y = x$ हो। इसका प्रांत $\mathbf{R}^+$ है, जो सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा इसका परिसर $\mathbf{R}$ है। लघुगणकीय फलन $y = \log_e x$ का आलेख आकृति 13.12 में दर्शाया गया है।

परिणाम $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ को सिद्ध करने

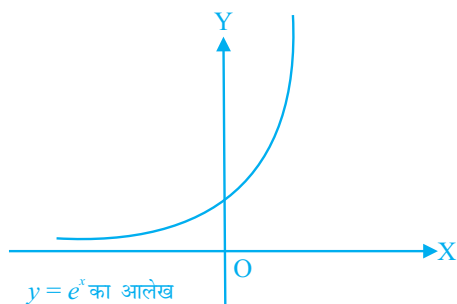
के लिए, हम व्यंजक $\frac{e^x - 1}{x}$ से संबद्ध एक असमिका का उपयोग करते हैं, जो इस प्रकार है—

$$\frac{1}{1+|x|} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1 + (e - 2)|x|, [-1, 1] \sim \{0\} \text{ में सभी } x \text{ के लिए सत्य है।}$$

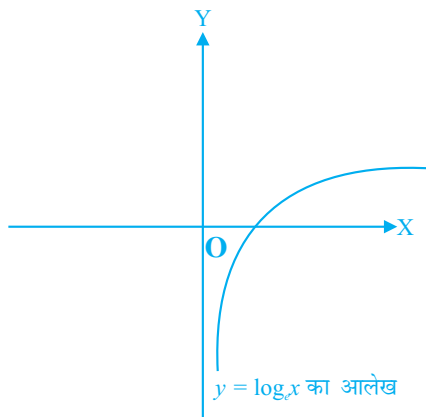
प्रमेय 6 सिद्ध कीजिए कि $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ है।

उपपत्ति उपर्युक्त असमिका का उपयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है—

$$\frac{1}{1+|x|} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1 + |x|(e - 2), x \in [-1, 1] \sim \{0\}$$



आकृति 13.11



आकृति 13.12

साथ ही,
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1+\lim_{x \rightarrow 0}|x|} = \frac{1}{1+0} = 1$$

और
$$\lim_{x \rightarrow 0} 1+(e-2)|x| = 1+(e-2)\lim_{x \rightarrow 0}|x| = 1+(e-2)0 = 1$$

अतः, सैंडविच प्रमेय द्वारा, हमें प्राप्त होता है—

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

प्रमेय 7 सिद्ध कीजिए कि $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$

उपपत्ति मान लीजिए कि Let $\frac{\log_e(1+x)}{x} = y$ है तब,

$$\log_e(1+x) = xy$$

$$1+x = e^{xy}$$

$$\frac{e^{xy} - 1}{xy} = 1$$

या
$$\frac{e^{xy} - 1}{xy} \cdot y = 1$$

$$\lim_{xy \rightarrow 0} \frac{e^{xy} - 1}{xy} \lim_{x \rightarrow 0} y = 1 \quad (\text{क्योंकि } x \rightarrow 0 \text{ से } xy \rightarrow 0 \text{ प्राप्त होता है})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = 1 \quad (\text{क्योंकि } \lim_{xy \rightarrow 0} \frac{e^{xy} - 1}{xy} = 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$$

उदाहरण 5 अभिकलित कीजिए $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

हल हमें प्राप्त है—

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot 3$$

$$= 3 \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \right), \text{ जहाँ } y = 3x$$

$$= 3.1 = 3$$

उदाहरण 6 अभिकलित कीजिए $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x}$

हल हमें प्राप्त है— $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^x - 1}{x} - \frac{\sin x}{x} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 - 1 = 0$$

उदाहरण 7 अभिकलित कीजिए $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_e x}{x - 1}$

हल $x = 1 + h$ रखिए। तब, $x \rightarrow 1 \Rightarrow h \rightarrow 0$ है। अतः,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_e x}{x - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e (1 + h)}{h} = 1 \text{ (क्योंकि } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e (1 + x)}{x} = 1 \text{ है)}$$

प्रश्नावली 13.2

निम्न सीमाओं के मान निकालिए, यदि उनका अस्तित्व है—

- | | | | |
|---|----------------|---|----------------|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{x}$ | (उत्तर 4) | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2+x} - e^2}{x}$ | (उत्तर e^2) |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{e^x - e^5}{x - 5}$ | (उत्तर e^5) | 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$ | (उत्तर 1) |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^x - e^3}{x - 3}$ | (उत्तर e^3) | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$ | (उत्तर 2) |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e (1 + 2x)}{x}$ | (उत्तर 2) | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log (1 + x^3)}{\sin^3 x}$ | (उत्तर 1) |