क्रियाकलाप 21

उद्देश्य

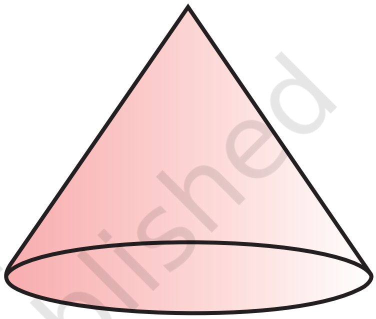
विभिन्न प्रकार के शांकव-परिच्छेद बनाना।

आवश्यक सामग्री

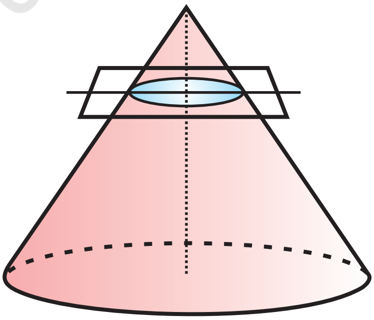
पारदर्शी शीट, कैंची, मोटा गत्ता, चिपकाने का पदार्थ, सफ़ेद कागज़

रचना की विधि

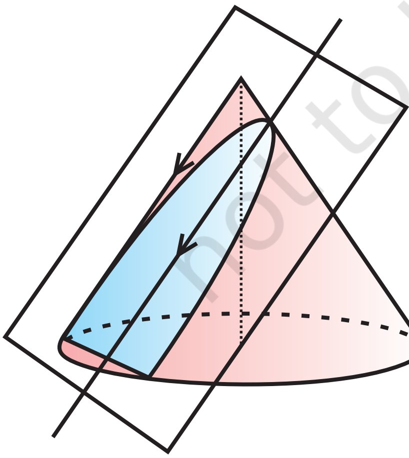
1. एक मोटा गत्ता लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. एक पारदर्शी शीट को वृत्त के सेक्टर के आकार में काट कर इस तरह मोड़िए कि एक लंब वृत्तीय शंकु बनें जैसा आकृति 21.1 में दिखाया गया है।
3. पारदर्शी शीट से इसी आकार के पाँच और शंकु बनाइए। इन शंकुओं को मोटे गत्ते पर रखिए।
4. इन शंकुओं को एक पारदर्शी समतल शीट से विभिन्न स्थितियों में काटिए जैसा आकृतियों 21.2 से 21.5 में दिखाया गया है।



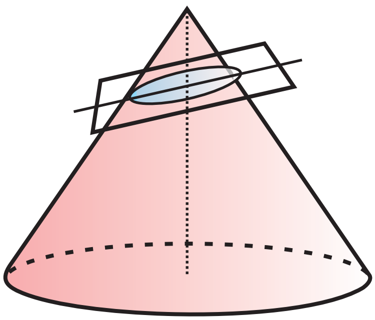
आकृति 21.1



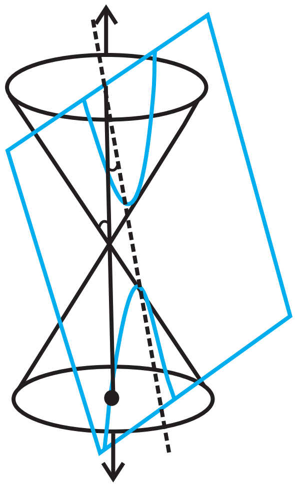
आकृति 21.2



आकृति 21.4



आकृति 21.3



आकृति 21.5

प्रदर्शन

1. आकृति 21.2 में पारदर्शी समतल शंकु को इस प्रकार काटती है कि शीट शंकु के आधार के समांतर है। इस प्रकार प्राप्त सेक्शन एक वृत्त है।
2. आकृति 21.3 में समतल शीट शंकु के अक्ष से थोड़ी झुकी हुई है। इस प्रकार प्राप्त सेक्शन एक दीर्घ वृत्त है।
3. आकृति 21.4 में समतल शीट शंकु के जनक (तिरछी-ऊँचाई)के समांतर है। इस तरह से प्राप्त सेक्शन को परवलय कहते हैं।
4. आकृति 21.5 में समतल शीट के अक्ष के समांतर है। इस प्रकार प्राप्त सेक्शन एक अतिपरवलय है।

प्रेक्षण

1. आकृति 21.2 में समतल शीट पारदर्शी शंकु के आधार के _______ है। इस प्रकार प्राप्त सेक्शन ______है।
2. आकृति 21.3 में समतल शीट शंकु के _______ से थोड़ी-सी झुकी हुई है। इस प्रकार प्राप्त शांकव परिच्छेद __________है।

3. आकृति 21.4 में समतल शीट __________ के समांतर है। इस प्रकार प्राप्त शांकव परिच्छेद _______ है।

4. आकृति 21.5 में समतल शीट शंकु के अक्ष के _________ है। इस प्रकार प्राप्त शांकव परिच्छेद अतिपरवलय है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप विभिन्न प्रकार के शांकव परिच्छेदों कों समझने में सहायक है। इन शांकव परिच्छेदों का वास्तविक जीवन और आधुनिक विज्ञान में बहुत उपयोग है। उदाहरणार्थ शांकवों में रुचिकर ज्यामितीय गुणधर्म होते है जिनका उपयोग प्रकाश की किरणों और ध्वनि की तरंगों के परावर्तन में होता है। जैसे–

1. वृत्त, केंद्र से जाने वाली प्रकाश किरणों को वापस केंद्र की ओर परावर्तित कर देता है।
2. परवलय में फोकस से निकली प्रकाश की किरणें परवलय के अक्ष के समांतर परावर्तित हो जाती हैं।
3. दीर्घ वृत्त, एक नाभि से निकली प्रकाश की किरणों को दूसरी नाभि पर परावर्तित कर देता है।
4. अतिपरवलय एक नाभि से निकली प्रकाश की किरणों को इस प्रकार परावर्तित करता है कि वे दूसरी नाभि से आती प्रतीत होती है।

क्रियाकलाप 22

उद्देश्य

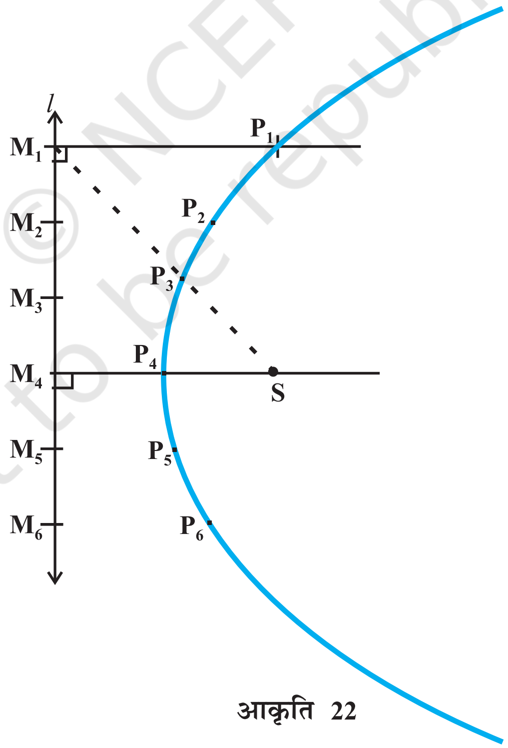
परवलय की रचना करना

आवश्यक सामग्री

कार्डबोर्ड, सफ़ेद कागज़, स्केच पेन, पेंसिल, परकार, रूलर इत्यादि

रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार का एक कार्ड-बोर्ड लीजिए और उसके ऊपर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए
2. सफ़ेद कागज़ पर बिंदु S अंकित करें (देखिए आकृति 22)
3. बिंदु S से एक रेखा खीचिए। S से जाती हुई इस रेखा पर S से बाई ओर कुछ दूरी *k* इकाई से एक लंब रेखा *l* खींचिए।



आकृति 22

4. रेखा l पर कोई बिंदु M_1 लीजिए। इस बिंदु से l पर एक लंब खींचिए।
5. M_1S को मिलाइए फिर M_1S का लंब समद्विभाजक खींचिए जो M_1 से खींची गई लंब रेखा को बिंदु P_1 पर काटें।
6. रेखा l पर एक अन्य बिंदु M_2 लीजिए और चरण 5 के प्रक्रम को दोहराइए ताकि बिंदु P_2 प्राप्त हो।
7. रेखा l पर कुछ अन्य बिंदु M_3, M_4, M_5, ... लीजिए और इस प्रक्रम को दोहराइए जिससे क्रमशः बिंदु P_3, P_4, P_5, ... प्राप्त हों।
8. P_1, P_2, P_3, P_4, ... से होता हुआ मुक्त हस्त वक्र खींचिए (देखिए आकृति 22)।

प्रदर्शन

बिंदु P_1, P_2, P_3, ... इस प्रकार हैं कि इनमें से प्रत्येक बिंदु की स्थिर बिंदु S से दूरी तथा रेखा l से दूरी समान है। इसलिए इन बिदुओं से होता हुआ मुक्त हस्त वक्र एक परवलय है जिसकी नाभि S और नियता (directrix) l है।

प्रेक्षण

1. P_1M_1 = ________ P_1S = _________
2. P_2M_2 = ________ P_2S = _________
3. P_3M_3 = ________ P_3S = _________
4. P_4M_4 = ________ P_4S = _________
5. P_5M_5 = ________ P_5S = _________
6. बिंदु P_1 की M_1 से दूरी = P_1 की ________ से दूरी
7. बिंदु P_2 की M_2 से दूरी = P_2 की ________ से दूरी

   बिंदु ________ की M_3 से दूरी = बिंदु P_3 की _______ से दूरी
8. बिंदुओं P_1, P_2, P_3 .... की रेखा l से दूरी इन बिंदुओं की बिंदु S से दूरी के _______ है।

9. बिंदुओं $P_1, P_2, P_3, ...$ को मिलाने से प्राप्त वक्र एक ________ है जिसकी नियता________ और नाभि _________ है।

10. शीर्ष P_4 की S से दूरी = _______.

11. परवलय के शीर्ष की नियता से दूरी = _______

अनुप्रयोग

1. यह क्रियाकलाप परवलय से संबधित पदों जैसे नियता, नाभि, परवलय के बिंदुओं के गुण–धर्म को समझने में उपयोगी है।
2. परवलयों का अनुप्रयोग विज्ञान एवं अभियांत्रिकी में होता है।

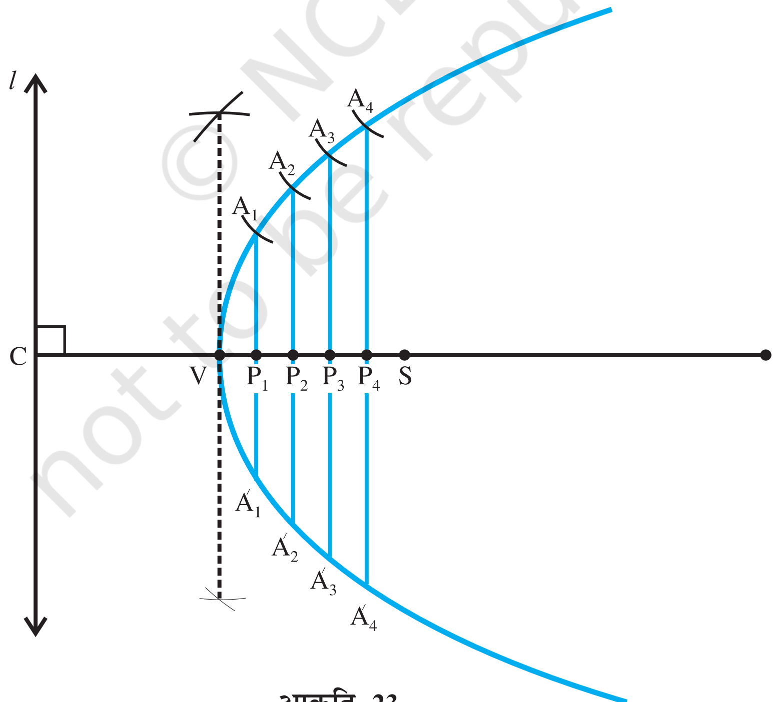
क्रियाकलाप 23

उद्देश्य
परवलय बनाने का वैकल्पिक तरीका

आवश्यक सामग्री
कार्ड–बोर्ड, सफ़ेद कागज़, स्केच पेन, पेंसिल, परकार, रूलर, कीले डोरी

रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार का एक कार्डबोर्ड लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. सफ़ेद कागज़ पर एक बिंदु S लीजिए।
3. S से जाती हुई एक रेखा खींचिए।
4. S से खींची गई रेखा पर बिंदु S के बाईं ओर k इकाई दूरी पर एक दूसरी रेखा l खींचिए जो पहली रेखा पर लंब हो। माना दोनों रेखाएँ बिंदु C पर मिलती है।



आकृति 23

5. CS को बिंदु V पर समद्विभाजित कीजिए।

6. VS पर बिंदु P_1, P_2, P_3, ... अंकित कीजिए और इन बिंदुओं से लंब रेखाएँ खींचिए जैसा आकृति 23 में दिखाया गया है।

7. S को केंद्र मानकर तथा CP_1 के बराबर त्रिज्या लेकर चाप खीचिए जो P_1 पर लंब रेखा को A_1 और A_1' पर काटे। इसी प्रकार S को केंद्र मानकर और CP_2 के बराबर त्रिज्या लेकर बिंदुओं A_2 और A_2' प्राप्त कीजिए। इस प्रक्रिया को कुछ और बिंदुओं P_3, P_4, ... के लिए दोहराइए और संगत बिंदु A_3 और A_3', A_4 और A_4' ;...,प्राप्त कीजिए।

8. बिंदुओं $A_1, A_2, \ldots A_1', A_2', \ldots$ पर कीले गाड़िए और कीलों के आधार को डोरी से जोड़िए जिससे एक वक्र प्राप्त होगा जैसा कि आकृति 23 में दिखाया गया है।

प्रदर्शन

बिंदु A_1 की l से दूरी $= CP_1 = SA_1$

इसी प्रकार, बिंदु A_2 की l से दूरी $= CP_2 = SA_2$

बिंदु A_3 की l से दूरी $= CP_3 = SA_3$ और इसी प्रकार

इस प्रकार, वक्र का प्रत्येक बिंदु रेखा l तथा बिंदु S से समान दूरी पर है। इसलिए, वक्र एक परवलय है जिसकी नाभि S और नियता l है।

बिंदु A_1' की भी l से दूरी $= CP_1 = SA_1'$

बिंदु A_2' की l से दूरी $= CP_2 = SA_2'$ इत्यादि।

प्रेक्षण

वस्तुतः मापने पर–

1. A_1 की l से दूरी = ___________, A_1S = __________.
2. A_2 की l से दूरी = ___________, A_2S = __________.
3. A_3 की l से दूरी = ___________, A_3S = __________.
4. A_4 की l से दूरी = ___________, A_4S = __________.

5. A_1' की l से दूरी = __________, $A_1'S$ = __________.

6. A_2' की l से दूरी = __________, $A_2'S$ = __________.

7. A_3' की l से दूरी = __________, $A_3'S$ = __________.

8. A_4' की l से दूरी = __________, $A_4'S$ = __________.

9. वक्र के किसी बिंदु की l से दूरी = उस बिंदु की________ से दूरी।

10. इसलिए, वक्र एक ________ है जिसकी नियता _________ है और__________नाभि _______ है।

अनुप्रयोग

1. यह क्रियाकलाप परवलय से संबंधित पदों जैसे नियता, नाभि को समझने मे सहायक है।

क्रियाकलाप 24

उद्देश्य

आयत का प्रयोग करके दीर्घवृत्त बनाना।

आवश्यक सामग्री

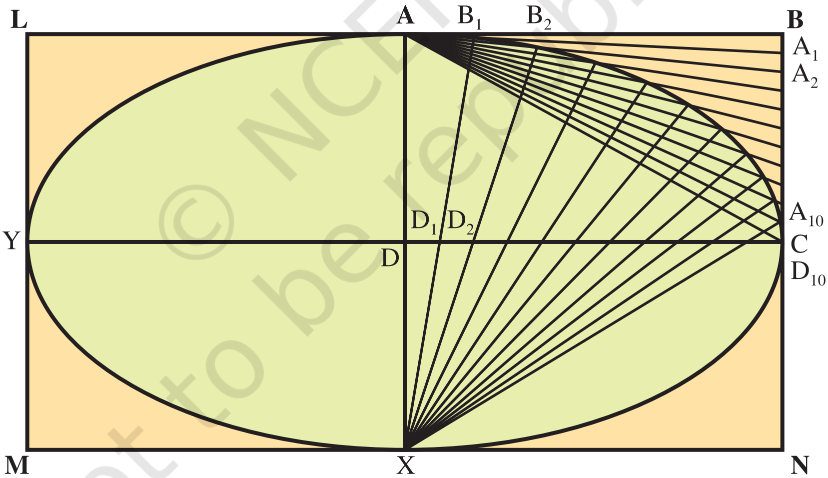
एक हार्डबोर्ड, सफ़ेद कागज़, रंगीन कागज़, कीलें, नाइलोन की डोरी, रूलर, गोंद

रचना की विधि

1. एक उपयुक्त आकार का आयताकार हार्ड-बोर्ड लीजिए और उसके ऊपर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।

2. रंगीन कागज़ से एक उपयुक्त विभाओं का आयत MNBL काटिए और से हार्डबोर्ड पर चिपकाइए।

3. इस आयत को चार सर्वांगसम आयतों में विभक्त कीजिए जैसा आकृति 24 में दिखाया गया है।



आकृति 24

4. आयत ADCB की भुजाओं BC और DC को कुछ समान भागों (माना 11)में विभक्त कीजिए।

5. BC के विभक्त बिदुओं को A_1, A_2, ... और DC के विभक्त बिंदुओ को D_1, D_2 से अंकित कीजिए (देखिए आकृति 24)।

26/04/18

6. बिंदु A को A_1, A_2, ... से मिलाइए और बिंदु X को D_1, D_2, ... से मिलाने वाली रेखाएँ खींचिए (देखिए आकृति 24.1)

7. AA_1 और XD_1 के प्रतिच्छेद बिंदु को B_1 से अंकित कीजिए, AA_2 और XD_2 के प्रतिच्छेद बिंदु को B_2 से अंकित कीजिए और इसी प्रकार आगे बढिए।

8. $B_1, B_2, \ldots B_{10}$ पर कीलें स्थिर कीजिए।

9. कीलों के पादों को नाइलोन की डोरी से जोड़िए जैसा आकृति में दिखाया गया है।

10. शेष तीन सर्वांगसम आयतों के लिए भी इसी क्रियाकलाप को दोहराइए और आकृति 24 में दिखाए गए भाँति से वक्र प्राप्त कीजिए।

प्रदर्शन

प्राप्त किए वक्र दीर्घ वृत्त की तरह दिखते है। इस दीर्घवत्त का दीर्घअक्ष, आयत MNBL की लंबाई के बराबर है और लघु अक्ष आयत की चौड़ाई के बराबर है।

प्रेक्षण

1. आयत MNBL की लंबाई = ____________________.
2. आयत MNBL की चौड़ाई = ____________________.
3. दीर्घ वृत्त का दीर्घ अक्ष ______________है।
4. दीर्घ वृत्त का लघु अक्ष ____________________है।

अनुप्रयोग

यह कार्य कलाप दीर्घ वृत्त की कुछ संकल्पनाओं जैसे दीर्घ और लघु अक्ष समझने में सहायक हो सकता है यह दीर्घ वृत्तीय डिज़ाइनों जैसे तैरने का तालाब (स्वीमिग पूल), मेज़ इत्यादि बनाने में भी सहायक होता है।

क्रियाकलाप 25

उद्देश्य

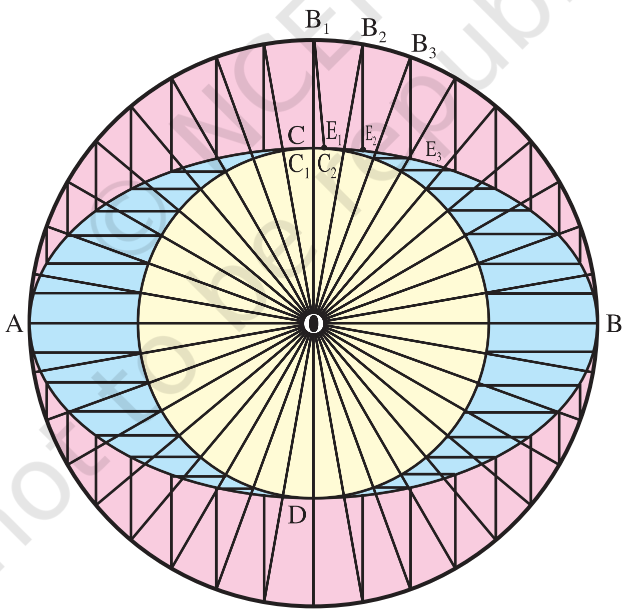
दीर्घ वृत्त की रचना करना जबकि दीर्घ और लघु अक्ष दिए हों।

आवश्यक सामग्री

एक हार्डबोर्ड, सफ़ेद कागज़ नाइलोन की डोरी, गोंद, चार्ट पेपर

रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार के हार्ड-बोर्ड की आयताकार शीट लीजिए और उसके ऊपर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. इस पर एक बिंदु O अंकित कीजिए और अर्द्ध-दीर्घ अक्ष एवं अर्द्ध लघु अक्ष के बराबर त्रिज्याएँ लेकर बिंदु O को केंद्र मानते हुए दो संकेंद्री वृत्त खींचिए। बड़े वृत्त के एक व्यास को AOB से अंकित कीजिए और इसे क्षैतिज रेखा कहिए (देखिए आकृति 25)।



आकृति 25

3. वृत्तों की त्रिज्याएँ इस प्रकार खींचिए कि किसी भी दो क्रमागत त्रिज्याओं के बीच का कोण बराबर हों, माना 10°

4. बड़े वृत्त की कोई त्रिज्या OB_1 लीजिए जो छोटे वृत्त को C_1 पर काटती है। C_1 से एक क्षैतिज रेखा खींचिए और B_1 से इस क्षैतिज रेखा के लंबवत् (ऊर्ध्वाधर रेखा) रेखा खीचिए जिससे बिंदु E_1 प्राप्त हो (देखिए आकृति 25)।
5. इस प्रक्रिया को बड़े वृत्त की सभी त्रिज्याओं OB_2, OB_3..., इत्यादि के लिए दोहराइए और बिंदु E_2, E_3, ...इत्यादि प्राप्त कीजिए।
6. बिंदुओं E_1, E_2, E_3, ...पर कीलें स्थिर कीजिए और उनके पादों को नाइलोन की डोरी से मिलाइए और वक्र प्राप्त कीजिए (देखिए आकृति 25)।

प्रदर्शन

1. प्राप्त वक्र एक दीर्घ वृत्त जैसा दिखता है।
2. दीर्घ वृत्त का दीर्घ अक्ष AOB है और लघु अक्ष COD है जहाँ COD छोटे वृत्त का व्यास है जो व्यास AOB से लंबवत है।

प्रेक्षण

मापने पर

1. OA = _______, OB = _________.
2. OC = _______, OD = _________.
3. दीर्घ वृत्त का दीर्घ अक्ष _________ है और दीर्घ वृत्त का लघु अक्ष = ________है।
4. बिंदु E_1, E_2, ... _______ पर स्थित है।

अनुप्रयोग

प्रस्तुत क्रियाकलाप का प्रयोग डोरी द्वारा दीर्घ वृत्तीय रूपरेखा बनाने में काम आ सकता है और दीर्घ वृत्त के दीर्घ तथा लघु अक्षों की संकल्पनाओं को भी इससे समझाया जा सकता है।

क्रियाकलाप 26

उद्देश्य

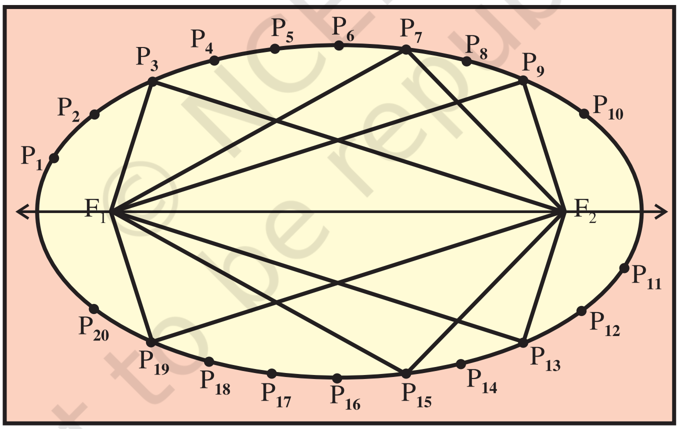
दो दिए हुए नियत बिंदुओं से दीर्घवृत्त की रचना करना।

आवश्यक सामग्री

आयताकार कार्डबोर्ड, रंगीन चार्ट पेपर, कीलें, सुतली (डोरी), पेन, पेंसिल

रचना की विधि

1. एक आयताकार कार्डबोर्ड लीजिए और उस पर चार्ट पेपर चिपकाइए।
2. चार्ट पेपर में एक क्षैतिज रेखा खींचिए और उस पर दो नियत बिंदु F_1 और F_2 इस प्रकार लीजिए कि उनके बीच की दूरी (मान लीजिए) 6 cm है। F_1 और F_2 पर दो कीले गाड़िए (स्थिर कीजिए)।
3. एक डोरी लीजिए जिसकी लंबाई दो नियत बिंदुओं के बीच की दूरी से अधिक है मान लीजए 9cm



आकृति 26

प्रदर्शन

1. डोरी के दोनों सिरों को कीलों F_1 और F_2 पर स्थिर कीजिए।
2. एक पेंसिल की सहायता से डोरी को बिना ढीला किए एक लूप में खींचिए और कम से कम 10 बिंदु P_1, P_2, P_3 .... इत्यादि रेखाखंड F_1, F_2 के दोनों ओर लीजिए।
3. सभी बिंदुओं P_i, $i = 1, 2, ...20$ को मुक्त हस्त वक्र से मिलाइए जिससे एक दीर्घ वृत्त बने।

अनुप्रयोग

1. $P_1F_1 + P_1F_2 =$ ____ ,
2. $P_2F_1 + P_2F_2 =$ ____ ,
3. $P_3F_1 + P_3F_2 =$ ___ , $P_4F_1 + P_4F_2 =$ ___, $P_6F_1 + P_6F_2 =$ ___, $P_9F_1 + P_9F_2 =$ ___.
4. $P_3F_1 + P_3F_2 =$ ____ $+ P_4F_2 = P_{19}F_1 +$ ____.
5. प्रत्येक बिंदु P_1, P_2, P_3,... की बिंदुओ F_1 और F_2 से दूरी का योग _______ है।

   इसलिए प्राप्त वक्र एक________है।

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का उपयोग एक दीर्घ वृत्त के गुण धर्मो की व्याख्या करने में किया जा सकता है। जैसे, दीर्घ वृत्त के किसी भी बिंदु से इसकी दोनो नाभियो की दूरियों का योग अचर रहता है। और यह दीर्घ अक्ष की लंबाई के बराबर होता है।

टिप्पणी

भिन्न लंबाई की डोरी लेकर और F_1 तथा F_2 के बीच की दूरी परिवर्तित करके दूसरा दीर्घ वृत्त बनाइए।

क्रियाकलाप 27

उद्देश्य

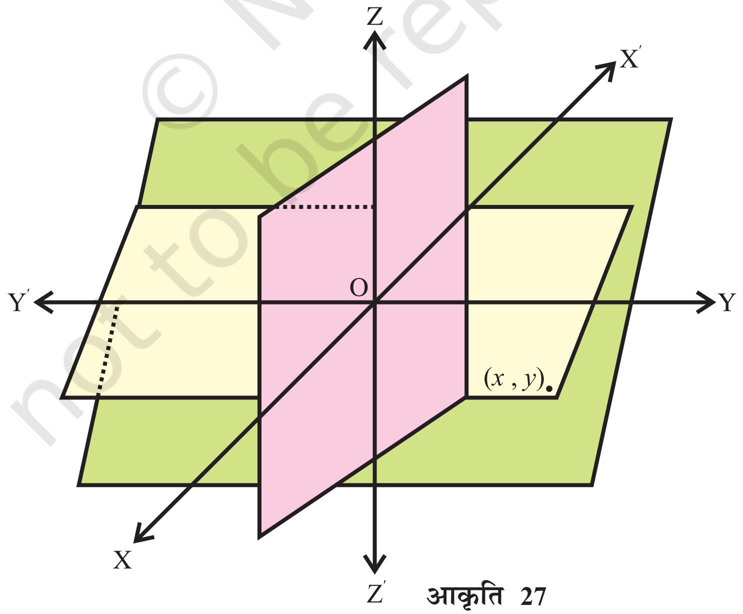
तीन परस्पर लंबवत् तलों से बने अष्टांशको की संकल्पना को समझाना।

आवश्यक सामग्री

प्लाईवुड का एक टुकड़ा, आरी, तार, रूलर, रंगीन चार्ट पेपर, कैंची, कटर, लकड़ी की पतली शीट, लकड़ी का बोर्ड

रचना की विधि

1. प्लाईवुड के टुकड़े से तीन वर्गाकार 30 cm × 30 cm आकार के टुकड़े काटिए और इनके दोनों ओर अलग-अलग रंगों के चार्ट पेपर चिपकाइए
2. दो टुकडों को इस तरह से जोड़िए कि वे एक-दूसरे के मध्य में लंबवत् काटे (देखिए आकृति 27)।
3. तीसरे टुकड़े को दो बराबर आयतों में काटिए।



आकृति 27

26/04/18

4. एक आयत को एक ओर से बीच में इस तरह से घुसाइए कि वह पहले दो टुकड़ो को लंबवत् काटे तथा दूसरे आयत को इसी प्रकार दूसरी ओर से घुसाइए (देखिए आकृति 27)। इन तीन टुकडों से अंतरिक्ष आठ भागों में विभक्त हो जाता है। प्रत्येक भाग को एक अष्टांशक कहते है।
5. इस मॉडल को एक लकड़ी के बोर्ड में स्थिर कीजिए।
6. किसी एक अष्टांशक में x–अक्ष, y–अक्ष और z–अक्ष को निरूपित करने के लिए रूलर स्थिर कीजिए। प्रत्येक अक्ष को दूसरी ओर छेदित करती हुई खींचिए जो XX′, YY′ और ZZ′ निरुपित करे। XX′, YY′ और ZZ′ के प्रतिच्छेद बिंदु को मूलबिंदु O अंकित कीजिए।

प्रदर्शन

1. xy-तल के बिंदु P (x, y) पर लंबवत् एक छड़, z-अक्ष के समांतर खीचिए।
2. एक तार को मूल बिंदु से छड़ के ऊपरी सिरे P′ (x, y, z) से जोड़िए।
3. xy-तल में बिंदु P जिसके निर्देशांक (x, y)है, की मूल बिंदु से दूरी $\sqrt{x^2+y^2}$ है।
4. अंतरिक्ष में बिंदु P′ जिसके निर्देशांक (x, y, z) हैं, की मूल बिंदु से दूरी

$$\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$ है।

प्रेक्षण

1. तीन तल एक बिंदु पर परस्पर लंबवत् प्रतिच्छेद करतें हैं और अंतरिक्ष को ____________ भागों में विभक्त करते हैं। प्रत्येक भाग को एक ___________हैं।
2. xy तल में बिंदु (5, 4) की मुल बिंदु से दूरी ________ है।
3. बिंदु (3, 2, 1) की मूल बिंदु से दूरी ________है।
4. यदि हम किसी भी एक तल के लंबवत् एक तार स्थिर करें तो यह तल पर एक _____________ निरूपित करेगा।
5. यदि दो समान्तर तलों में दो अभिलंब खीचें तो ये अभिलंब परस्पर ________ होंगें।

अनुप्रयोग

1. इस मॉडल का उपयोग अंतरिक्ष में एक बिंदु की स्थिति और इसके निर्देशाकों को स्पष्ट करने में सहायक है।
2. मॉडल के उपयोग किसी तल या अंतरिक्ष मे किसी बिंदु की मूल बिंदु से दूरी की व्याख्या करने में सहायक हैं।
3. मॉडल का एक तल पर अभिलंब की संकल्पना को समझने में किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 28

उद्देश्य

विश्लेषण द्वारा $\lim_{x \to c} f(x) = \frac{x^2 - c^2}{x - c}$ ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

पेंसिल, सफ़ेद कागज़, कैलकुलेटर (Calculator)

रचना की विधि

1. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ द्वारा दिए हुए फलन f पर विचार कीजिए।
2. इस स्थिति में $c = 3$, $x = 3$ पर फलन परिभाषित नहीं है।

प्रदर्शन

1. x के कुछ मान $c = 3$ से कम और कुछ मान $c = 3$ से अधिक लीजिए।
2. दोनों ही स्थितियों में x के मान $c = 3$ से काफी निकट होने चाहिए।
3. x के सभी $c = 3$ के निकट मानों के लिए f के संगत मान परिकलित कीजिए।

प्रदर्शन : सारणी 1

1. x के ऐसे मान जो 3 के निकट हैं, के लिए $f(x)$ के मान निम्न सारणीयों में दिए हैं।

प्रेक्षण

सारणी 1

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	2.99999	2.999999
$f(x)$	5.9	5.99	5.999	5.9999	5.99999	5.999999

सारणी 2

x	3.1	3.01	3.001	3.0001	3.00001	3.000001
$f(x)$	6.1	6.01	6.001	6.0001	6.00001	6.000001

2. सारणी 1 से यह विदित होता है कि जैसे जैसे बाईं ओर से $x \to 3$, $f(x)$, के मान ______ के सन्निकट आते जाते हैं।

3. सारणी 2 से यह विदित होता है कि जैसे दाईं ओर से $x \to 3$, $f(x)$ के मान ______ सन्निकट आते जाते हैं। सारणी (2) और (3) से $\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} =$ ______.

अनुप्रयोग

इस प्रकार के क्रियाकलाप का उपयोग संकल्पना सीमा (limit) जैसे $\lim_{x \to c} f(x)$ जब $f(x)$, $x = c$ पर परिभाषित नहीं है, के प्रदर्शन करने में किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 29

उद्देश्य

अवकलजों की सार्थकता का ज्यामितीय सत्यापन

आवश्यक सामग्री

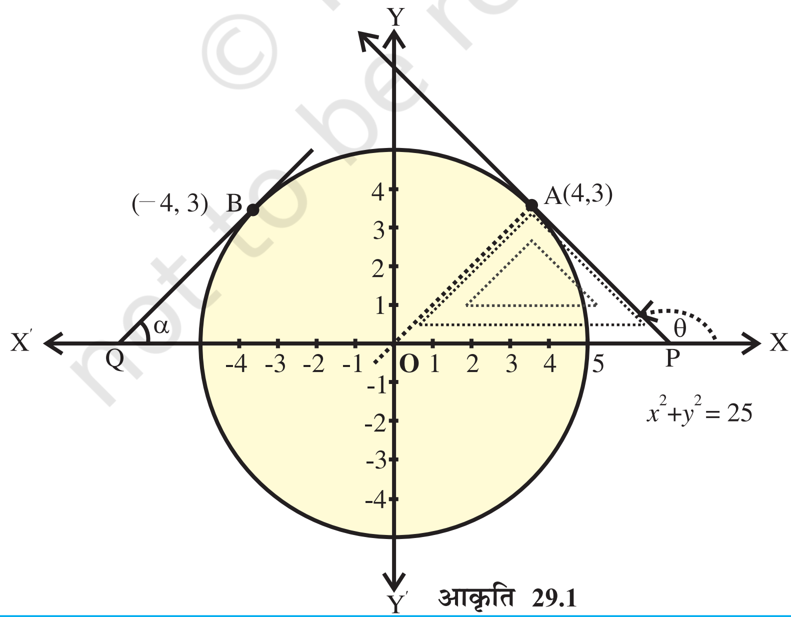
ग्राफ़ पेपर, गोंद, हार्डबोर्ड, त्रिकोंणमितीय सारणियाँ, ज्यामितीय बाक्स, तार

रचना की विधि

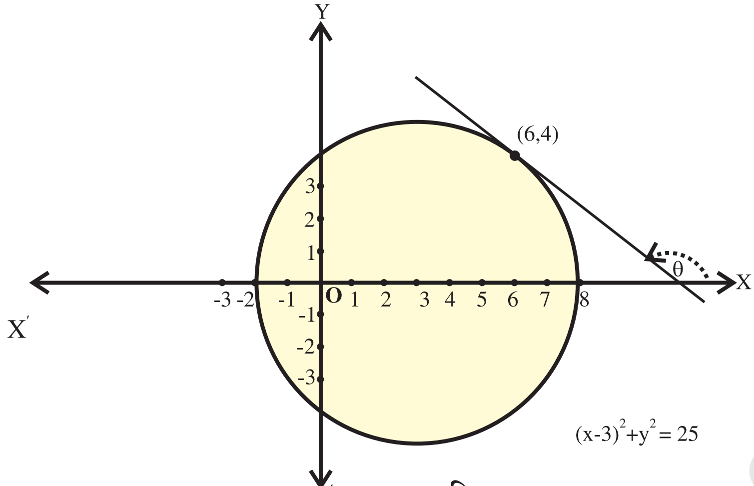
1. हार्डबोर्ड के ऊपर तीन ग्राफ़ पेपर चिपकाइए और प्रत्येक पर x-अक्ष और y-अक्ष को निरुपित करने वाली दो लंब रेखाएँ खींचिए।

2. वक्र (वृत्त) $x^2 + y^2 = 25$ का एक ग्राफ़ पेपर पर आलेख खीचिए।

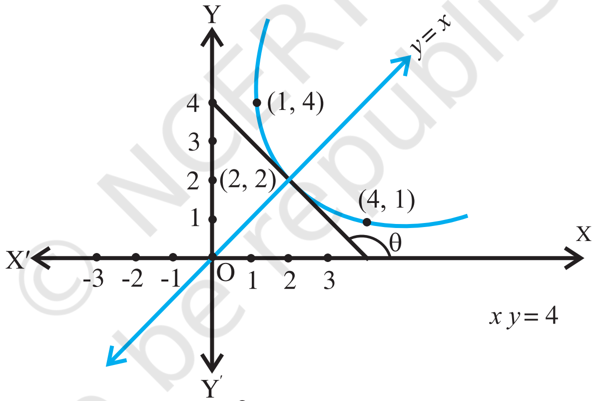
3. दो अन्य ग्राफ़ पेपरों पर $(x-3)^2 + y^2 = 25$ और वक्र (समकोणीय अतिपरवलय) $xy = 4$ का आरेख खींचिए।



आकृति 29.1



आकृति 29.2



आकृति 29.3

प्रदर्शन

1. पहला ग्राफ़ पेपर लीजिए जिस पर वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ का आरेख खींचा गया है (देखिए आकृति 29.1.)
2. वृत्त पर एक बिंदु A (4, 3) लीजिए।
3. सेट–स्क्वेयर की सहायता से, बिंदु A से एक तार OA की दिशा में तथा दूसरा OA की लंब दिशा में रखिए ताकि वह, x-अक्ष की धनात्मक दिशा में बिंदु P पर मिले।
4. बिंदु P पर, तार और x-अक्ष की धनात्मक दिशा के बीच बने कोण (मान लीजिए O) को मापिए।

5. तब त्रिकोणमितीय सारणी की सहायता से $\tan \theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

अब, $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$

बिंदु (4,3) पर $\frac{dy}{dx}$ का मान निकालिए और सत्यापित कीजिए कि (4, 3) पर $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \tan \theta$ है।

6. इसी प्रकार वृत्त पर दूसरा बिंदु (– 4, 3) लीजिए। सत्यापित कीजिए कि (–4, 3) पर $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$, जहाँ α बिंदु (– 4, 3) पर स्पर्श रेखा द्वारा x-अक्ष की धनात्मक दिशा से बना कोण है। (देखिए आकृति 29.1)

7. अब दूसरा ग्राफ़ पेपर जिस पर $(x - 3)^2 + y^2 = 25$ का आरेख बना है लीजिए और उस पर एक बिंदु (6,4) लीजिए। सेट-स्क्वेयर तथा तार की सहायता से उपर्युक्त प्रक्रम की पुनरावृत्ति कीजिए, जैसा कि आकृति 29.2 में दिखाया गया है अर्थात सत्यापित कीजिए कि (2, 2) पर $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$ है।

8. अब तीसरा ग्राफ़ पेपर लीजिए, जिस पर वक्र $xy = 4$ का ग्राफ़ दिखाया गया हो। उस पर बिंदु (2, 2) लीजिए। सैट-स्क्वेयर का एक लंबवत् किनारा रेखा $y = x$ के अनुदिश रखिए और एक तार को उसके दूसरे किनारे के अनुदिश रखिए जो वक्र को बिंदु (2,2) पर स्पर्श करता हो तथा तार द्वारा x-अक्ष की धनात्मक दिशा, जैसा आकृति 29.3 में दिखाया गया है, के साथ बनाया गया कोण ज्ञात कीजिए। मान लीजिए कि यह कोण θ है। सत्यापित कीजिए कि बिंदु (2,2) पर $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$ होगा।

प्रेक्षण

1. वक्र $x^2 + y^2 = 25$ के लिए, बिंदु (3, 4) पर $\frac{dy}{dx}$ = ________होगा, θ = _____ होगा,

   और (3, 4) पर $\frac{dy}{dx}$ = _________होगा।

2. वक्र $x^2 + y^2 + 25$के लिए, (–4, 3) पर $\frac{dy}{dx}$ = ________ α = ________

   और $\frac{dy}{dx}$ = ________होगा।

3. वक्र $(x-3)^2 + y^2 = 25$के लिए, (6, 4) पर $\frac{dy}{dx}$ = _____ , θ का मान = _______

   और $\tan \alpha$ = ______ होगा। और (6, 4) पर $\frac{dy}{dx}$ = ________है।

4. वक्र $xy = 4$ के लिए (2, 2) पर $\left(\frac{dy}{dx}\right)$=______ , θ का मान = ____ और $\tan \theta$ = __________होगा।

अनुप्रयोग

दूसरे वक्रों के लिए भी इस क्रियाकलाप का उपयोग यह सत्यापित करने के लिए किया जा सकता है कि किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रणवता उस बिंदु पर उसके अवकलज के मान के बराबर होती है।

टिप्पणी

इस क्रियाकलाप की पुनरावृत्ति पहले ग्राफ़ पेपर पर बिंदु (4, 3), दूसरे ग्राफ़ पेपर पर (0, 4) और तीसरे ग्राफ़ पेपर पर (1, 4) लेकर की जा सकती है।

क्रियाकलाप 30

उद्देश्य

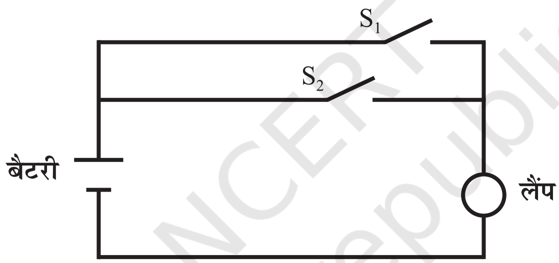
समांतर स्विच संबंधन के प्रयोग से $p \vee q$ प्रकार के मिश्र कथनो के सत्य मान प्राप्त करना।

आवश्यक सामग्री

स्विच, बिज़ली का तार, बैटरी और बल्ब।

रचना की विधि

1. स्विचों S_1 और S_2 को समांतर श्रेढ़ी में जोड़िए। (देखिए आकृति 30)
2. बैटरी और बल्ब को जोड़ कर परिपथ को पूरा कीजिए, जैसा आकृति में दिखाया गया है।



आकृति 30

प्रदर्शन

1. बल्ब तभी उद्दीप्त (glow) होगा जब S_1 और S_2 में, कम से कम एक स्विच ऑन होगा। इससे निम्न परिणाम प्राप्त होता है

स्विच S_1	स्विच S_2	बल्ब की स्थिति
खुला (on)	बंद (off)	उद्दीप्त होगा (glow)
बंद (off)	खुला (on)	उद्दीप्त होगा (glow)
बंद (off)	बंद (off)	उद्दीप्त नहीं होगा (not glow)
खुला (on)	खुला (on)	उद्दीप्त होगा (glow)

माना p और q निम्न कथनों को निरुपित करते हैं

p : S_1 ऑन है, p का सत्य मान T है।

$\sim p$: S_1 बंद है, p का सत्य मान F है।

q : S_2 खुला है, q का सत्य मान T है।

$\sim q$: S_2 बंद है, q का सत्य मान F है।

जब बल्ब उद्दीप्त होता है, $p \vee q$ का सत्य मान T है, जब बल्ब उद्दीप्त नहीं होता है तब $p \vee q$ का सत्य मान F है। इस प्रकार परिपथ से $p \vee q$ के सत्य मान की सारणी है–

p	q	$p \vee q$
T	F	T
F	T	T
F	F	F
T	T	T

प्रेक्षण

1. यदि S_1 खुला है, p का सत्य मान ________________है।

   यदि S_1 बंद है, p का सत्य मान ________________है।

   यदि S_2 खुला है, q का सत्य मान ________________है।

   यदि S_2 बंद है, q का सत्य मान ________________है।

2. यदि S_1 खुला है, S_2 बंद है, तब $p \vee q$ का सत्य मान ________________है।

   यदि S_1 खुला है, S_2 खुला है, तब $p \vee q$ का सत्य मान ________________है।

   यदि S_1 बंद है, S_2 बंद है, तब $p \vee q$ का सत्य मान ________________है।

   यदि S_1 बंद है, S_2 खुला है, तब $p \vee q$ का सत्य मान ________________है।

   यदि S_1 ______है, S_2 _____है, तब $p \vee q$ का सत्य मान F है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप विद्यार्थियों को कथनों p और q के विभिन्न प्रकरणों के लिए कथन $p \vee q$ के सत्य मान को समझने में सहायक होता है।

क्रियाकलाप 31

उद्देश्य

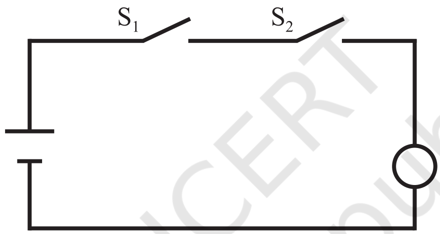
स्विच संयोजन के प्रयोग से $p \wedge q$ प्रकार वाले मिश्र कथनों के सत्य मान प्राप्त करना।

आवश्यक सामग्री

स्विच, बिजली के तार, बैटरी और लैंप/बल्ब

रचना की विधि

1. स्विचों S_1 और S_2 को श्रेणी में जोड़िए (देखिए आकृति 31)
2. बैटरी और लैंप को जोड़ कर परिपथ पूरा कीजिए जैसा आकृति 31 में दिखाया गया है।



आकृति 31

प्रदर्शन

1. लैंप तभी उद्दीप्त होगा जब दो स्विच S_1 और S_2 एक साथ खुले (on) हों। इससे नीचे दी गई सारणी प्राप्त होती है–

स्विच S_1	स्विच S_2	बल्ब की स्थिति
खुला on	बंद off	उद्दीप्त नहीं होगा
खुला on	खुला on	उद्दीप्त होगा
बंद off	खुला on	उद्दीप्त नहीं होगा
बंद off	बंद off	उद्दीप्त नहीं होगा

मान लीजिए कि p और q निम्नलिखित कथनों को निरुपित करते हैं–

p : S_1 खुला है, p का सत्य मान T है–

$\sim p$: S_1 बंद है, p का सत्य मान F है।

q : S_2 खुला है, q का सत्य मान T है।

$\sim q$: S_2 बंद है, q का सत्य मान F है।

जब लैंप उद्दीप्त होता है $p \wedge q$ का सत्य मान T है और जब लैंप उद्दीप्त नहीं होता तब $p \wedge q$ का सत्य मान F है। इस प्रकार परिपथ से $p \wedge q$ के लिए निम्न सारणी प्राप्त होती है।

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
F	T	F
T	F	F
F	F	F

प्रेक्षण

1. यदि S_1 खुला है, p का सत्य मान _______________ है।

   यदि S_1 बंद है, p का सत्य मान _______________ है।

   यदि S_2 खुला है, q का सत्य मान _______________ है।

   यदि S_2 बंद है, q का सत्य मान _______________ है।

2. यदि S_1 खुला है, S_2 बंद है तब $p \wedge q$ का सत्य मान ________ है।

   यदि S_1 खुला है, S_2 खुला है तब $p \wedge q$ का सत्य मान ________ है।

   यदि S_1 बंद है, S_2 बंद है तब $p \wedge q$ का सत्य मान ________ है।

   यदि S_1 बंद है, S_2 खुला है तब $p \wedge q$ का सत्य मान ________ है।

   यदि S_1 _____ है, S_2 ____ है तब $p \wedge q$ का सत्य मान T है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप कथनों p और q की विभिन्न अवस्थाओं के लिए कथन $p \wedge q$ के सत्य मान को विद्यार्थियों के समझने में सहायक है।

क्रियाकलाप 32

उद्देश्य

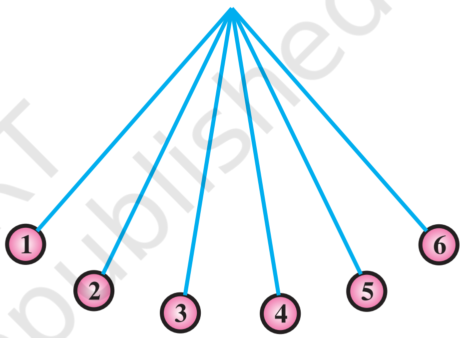
प्रतिदर्श–समष्टि (sample space) लिखना जब कोई पासा एक, दो या अधिक बार रोल किया गया हो।

आवश्यक सामग्री

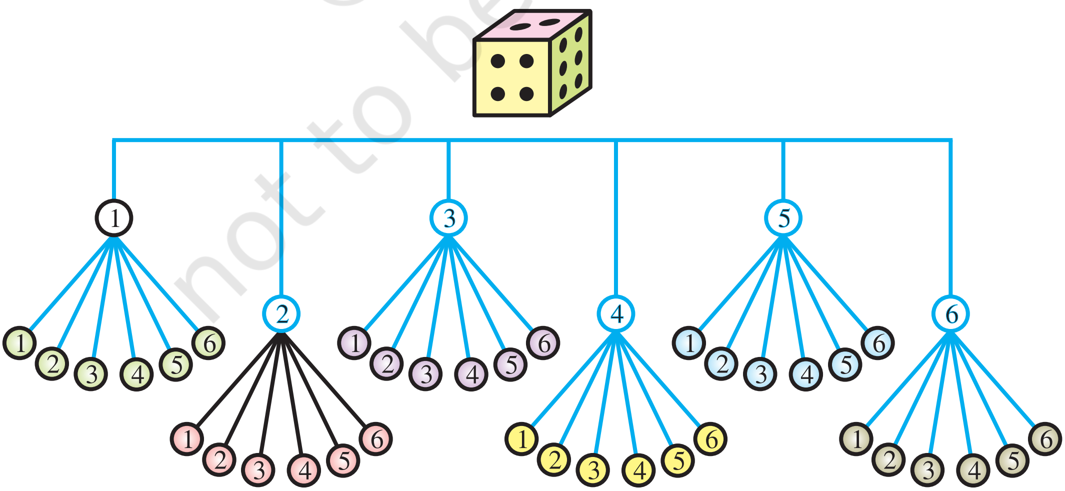
एक पासा (die), कागज़ पेंसिल या पेन, प्लास्टिक की डिस्क जिनमें 1, 2, 3, 4, 5 और 6 अंकित हो।

रचना की विधि

1. एक पासे को एक बार फेंकिए। इसके ऊपर आई संख्या 1, 2, 3, 4, 5 या 6 होगी।
2. एक वृक्षारेख बनाइए जिसमें छः शाखाएँ 1,2, 3, 4, 5 और 6 संख्याओ वाली हैं (देखिए आकृति 32.1)
3. इन परिणामों का प्रतिदर्श–समष्टि लिखिए।
4. एक पासे को दो बार फेंकिए। इसमें 36 प्रकार के परिणामों मे से कोई एक आ सकता है। जैसा आकृति 32.2 में दिखाया गया है। इन परिणामों का प्रतिदर्श–समष्टि लिखिए।



आकृति 32.1



आकृति 32.2

5. इस प्रयोग की पुनरावृत्ति पासे को 3 बार फेंक कर कीजिए और परिणामों के प्रतिदर्श–समष्टि को वृक्षारेख के रूप में लिखिए।

प्रदर्शन

1. यदि पासे को एक बार फेंका गया हो, तब प्रतिदर्श–समिष्ट S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} है। S मे अवयवों की संख्या = 6 = 6 है।

2. यदि पासे को दो बार फेंका गया हो, तब प्रतिदर्श समष्टि है:

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

S में अवयवों की संख्या = 36 = 6^2 है और आगे भी इसी प्रकार।

प्रेक्षण

पासें को फेंकने पर प्रतिदर्श–समष्टि में अवयवों की संख्या जब पासों को एक बार फेंका जाता है, = __________, तीन बार फेंका जाता है, = ________, चार बार फेंका जाता है, = __________.

अनुप्रयोग

उपर्युक्त प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि, प्रतिदर्श समष्टि से संबद्ध विभिन्न घटनाओं की प्रायिकताओं के निर्धारित करने में उपयोगी है।

क्रियाकलाप 33

उद्देश्य

प्रतिदर्श समष्टि लिखना जब किसी सिक्के को एक बार, दो बार, तीन बार, चार बार उछाला जाता है।

आवश्यक सामग्री

एक रुपये का सिक्का, कागज़, पेंसिल या पेन, प्लास्टिक की वृत्ताकार डिस्कें जिनमें चित [Head (H)] और पट [Tail (T)] अंकित हों।

रचना की विधि

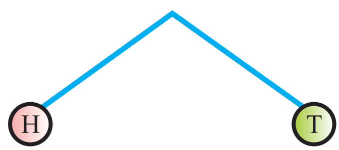
1. एक सिक्के को एक बार उछालिए। इसके दो परिणाम–चित या पट हो सकते हैं।
2. एक वृक्षारेख बनाइए जिसमें दो शाखाँए हों–जिनमें से एक में चित (H) और दूसरी मे पट (T) हो (देखिए आकृति 33.1)
3. इसका प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।
4. एक सिक्के को दो बार उछालिए। इसके चार संभव परिणाम हो सकते हैं। (देखिए आकृति 33.2)
5. इस प्रयोग को, सिक्के को 3 बार, 4 बार ... उछाल कर पुनारावृत्ति कीजिए और यदि संभव हो तो प्रतिदर्श समष्टि लिखिए। (देखिए आकृति 33.3 और 33.4)

प्रदर्शन

1. यदि सिक्का एक बार उछाला जाता है तब प्रतिदर्श समष्टि है

$$S = \{H, T\}$$

S में अवयवों की संख्या $= 2 = 2^1$

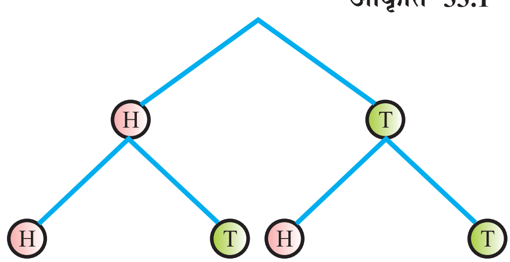


आकृति 33.1

2. जब सिक्के को दो बार उछाला जाता है तब प्रतिदर्श समष्टि है

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

S में अवयवों की संख्या $= 4 = 2^2$

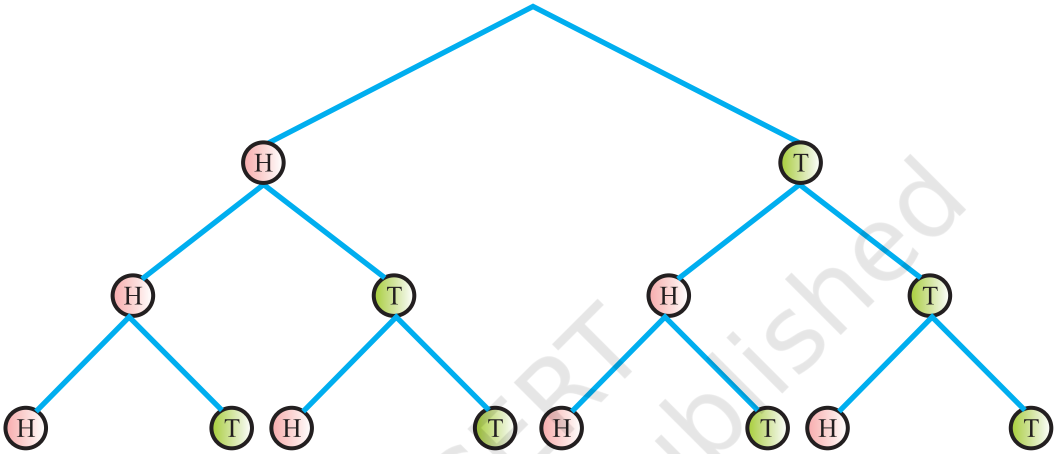


आकृति 33.2

3. जब सिक्के को तीन बार उछाला जाता है तब प्रतिदर्श समष्टि है:

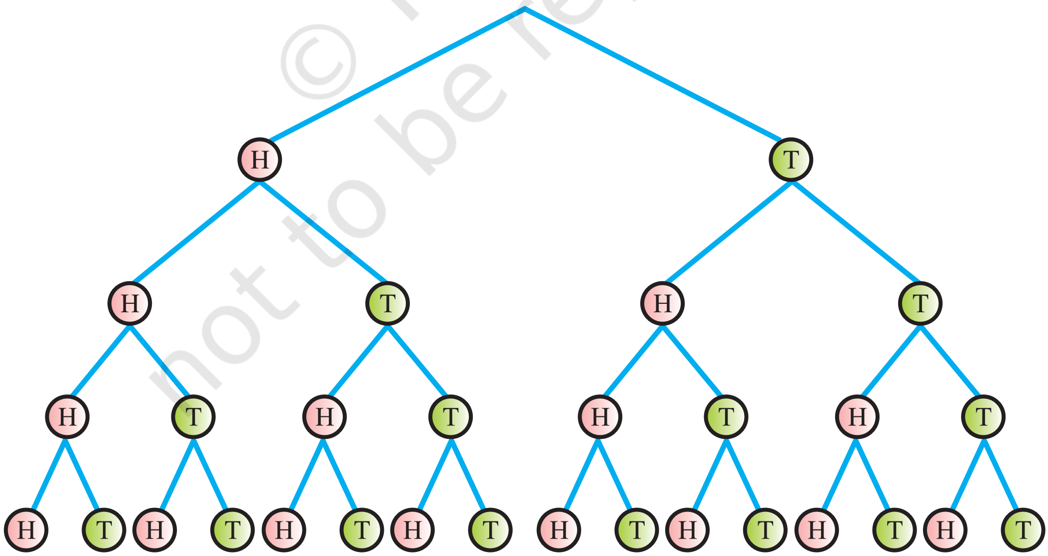
$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

S में अवयवों की संख्या $= 8 = 2^3$



आकृति 33.3

4. जब सिक्के को चार बार उछाला जाता है तब प्रतिदर्श समष्टि है



आकृति 33.4

$$S = \begin{Bmatrix} HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT, \\ THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT \end{Bmatrix}$$

S में अवयवों की संख्या $= 16 = 2^4$

और आगे भी इसी प्रकार बढ़ सकते हैं।

प्रेक्षण

प्रतिदर्श समष्टि में अवयवों की संख्या जब एक

1. सिक्के को एक बार उछाला जाता है = ___________.
2. सिक्के को दो बार उछाला जाता है= ___________.
3. सिक्के को तीन बार उछाला जाता है = ___________.
4. सिक्के को चार बार उछाला जाता है = ___________.

अनुप्रयोग

उपर्युक्त प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि, प्रतिदर्श समष्टि संबद्ध विभिन्न घटनाओं की प्रायिकताएँ निर्धारित करने में उपयोगी है।