ریاضی

حصہ اول

بارھویں جماعت کی نصابی کتاب

5259

جامعہ ملیہ اسلامیہ
نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ

Riyazi (Mathematics) Part-I
Textbook for Class XII

ISBN 81-7450-738-8

پہلا اردو ایڈیشن

اپریل 2007 بیساکھ 1928

دیگر طباعت

اکتوبر 2019 کارتک 1941

فروری 2019 ماگھ 1941

PD 8H SPA

© نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ، 2007

جُملہ حقوق محفوظ

- ناشر کی پہلے سے اجازت حاصل کیے بغیر، اس کتاب کے کسی بھی حصے کو دوبارہ پیش کرنا، یادداشت کے ذریعے بازیافت کے سسٹم میں اس کو محفوظ کرنا یا برقیاتی، میکانیکی، فوٹو کاپینگ، ریکارڈنگ کے کسی بھی وسیلے سے اس کی ترسیل کرنا منع ہے۔
- اس کتاب کو اس شرط کے ساتھ فروخت کیا جارہا ہے کہ اسے ناشر کی اجازت کے بغیر، اس شکل کے علاوہ جس میں کہ یہ چھاپی گئی ہے یعنی، اس کی موجودہ جلد بندی اور سرورق میں تبدیلی کرکے، تجارت کے طور پر نہ تو مستعار دیا جاسکتا ہے، نہ دوبارہ فروخت کیا جاسکتا ہے، نہ کرایہ پر دیا جاسکتا ہے اور نہ ہی تلف کیا جاسکتا ہے۔
- کتاب کے صفحہ پر جو قیمت درج ہے وہ اس کتاب کی صحیح قیمت ہے۔ کوئی بھی نظر ثانی شدہ قیمت چاہے وہ ربر کی مہر کے ذریعے یا چپٹی یا کسی اور ذریعے ظاہر کی جائے تو وہ غلط متصور ہوگی اور ناقابل قبول ہوگی۔

این سی ای آر ٹی کے پبلی کیشن ڈپارٹمنٹ کے دفاتر

این سی ای آر ٹی کیمپس
سری اروندو مارگ
نئی دہلی - 110016 **فون** 011-26562708

108,100 فٹ روڈ ہوسڈے کیرے ہیلی
ایکسٹینشن بناشنکری III اسٹیج
بینگلورو - 560085 **فون** 080-26725740

نوجیون ٹرسٹ بھون
ڈاک گھر، نوجیون
احمد آباد - 380014 **فون** 079-27541446

سی ڈبلیو سی کیمپس
بمقابل ڈھانکل بس اسٹاپ، پانی ہاٹی
کولکاتا - 700114 **فون** 033-25530454

سی ڈبلیو سی کامپلیکس
مالی گاؤں
گواہاٹی - 781021 **فون** 0361-2674869

₹ 000.00

اشاعتی ٹیم

ہیڈ پبلی کیشن ڈویژن : انوپ کمار راجپوت
چیف ایڈیٹر : شویتا اُپل
چیف پروڈکشن آفیسر : ارون چتکارا
چیف بزنس منیجر : بباش کمار داس
ایڈیٹر : سید پرویز احمد
پروڈکشن اسسٹنٹ : مکیش گوڑ

سرورق اور آرٹ
اروند رچاولہ

این سی ای آر ٹی واٹر مارک 80 جی ایس ایم کاغذ پر شائع شدہ

سکریٹری، نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ، شری اروندو مارگ، نئی دہلی نے 201102 میں چھپوا کر پبلی کیشن ڈویژن سے شائع کیا۔

پیش لفظ

'قومی درسیات کا خاکہ — 2005' میں سفارش کی گئی ہے کہ بچّوں کی اسکول کی زندگی، ان کی باہر کی زندگی سے ہم آہنگ ہونی چاہیے۔ یہ زاویۂ نظر، کتابی علم کی اس روایت کی نفی کرتا ہے جس کے باعث آج تک ہمارے نظام میں گھر اور سماج کے درمیان فاصلے حائل ہیں۔ نئے قومی درسیات کے خاکے پر مبنی نصاب اور درسی کتابیں اسی بنیادی خیال پر عمل آوری کی ایک کوشش ہے۔ اس کوشش میں مختلف مضامین کو ایک دوسرے سے الگ رکھنے اور رٹ کر پڑھنے کے طریقۂ کار کی حوصلہ شکنی بھی شامل ہے۔ ہمیں امید ہے کہ ان اقدامات سے قومی تعلیمی پالیسی 1986 میں مذکور 'تعلیم کے طفل مرکوز نظام' کی طرف مزید پیش رفت ہوگی۔

اس کوشش کی کامیابی کا انحصار اس پر ہے کہ سب ہی اسکولوں کے پرنسپل اور اساتذہ بچّوں میں اپنے تاثرات خود ظاہر کرنے اور ذہنی سرگرمیوں اور سوالوں کے ذریعے سیکھنے کی ہمّت افزائی کریں۔ ہمیں یہ ضرور تسلیم کرنا چاہیے کہ بچوں کو اگر موقع، وقت اور آزادی دی جائے تو وہ بڑوں سے حاصل شدہ معلومات سے وابستہ ہو کر، نئی معلومات مرتّب کرتے ہیں۔ آموزش کے دوسرے ذرائع اور محل وقوع کو نظر انداز کرنے کے بنیادی اسباب میں سے ایک اہم سبب مجوّزہ درسی کتاب کو امتحان کے لیے واحد ذریعہ بنانا ہے۔ بچّوں کے اندر تخلیقی صلاحیت اور پیش قدمی کے رجحان کو فروغ دینا اسی وقت ممکن ہے جب ہم آموزشی عمل میں بچّوں کو بحیثیت شریک کار قبول کریں اور اُن سے اسی طرح پیش آئیں۔ انھیں محض مقررہ معلومات کا پابند نہ سمجھیں۔ یہ مقاصد اسکول کے معمولات اور طریقۂ کار میں معقول تبدیلی کا مطالبہ کرتے ہیں۔ روزمرہ نظام الاوقات (Time-Table) میں لچیلا پن اُسی قدر ضروری ہے جتنی کہ سالانہ کیلنڈر کے نفاذ میں سخت محنت کی تاکہ مطلوبہ ایّام کو حقیقتاً تدریس کے لیے وقف کیا جا سکے۔ تدریس اور اندازۂ قدر کے طریقوں سے بھی اس امر کا تعین ہوگا کہ یہ درسی کتاب، بچوں میں ذہنی تناؤ اور اکتاہٹ کا ذریعہ بننے کے بجائے ان کی اسکولی زندگی کو خوش گوار بنانے میں کس حد تک مؤثر ثابت ہوتی ہے۔ نصابی بوجھ کے مسئلے کو حل کرنے کے لیے نصاب سازوں نے مختلف سطحوں پر معلومات کی تشکیلِ نو اور اسے نیا رخ دینے کی غرض سے بچوں کی نفسیات اور تدریس کے لیے دستیاب وقت پر زیادہ سنجیدگی کے ساتھ توجہ دی ہے۔ اس مخلصانہ

کوشش کومزید بہتر بنانے کے لیے یہ درسی کتاب سوچنے اورمحسوس کرنے کی تربیت، چھوٹے گروپوں میں بحث ومباحثہ کرنے اورعملاً انجام دی جانے والی سرگرمیوں کوزیادہ اوّلیت دیتی ہے۔

این سی ای آر ٹی اس کتاب کے لیےتشکیل دی جانے والی ''کمیٹی برائے درسی کتاب'' کی مخلصانہ کوششوں کو شکر گزار ہے۔کونسل اس کتاب کے مشاورتی گروپ کے چیئر مین پروفیسر جے۔وی۔نارلیکراور اس کتاب کے خصوصی صلاح کار پروفیسر پون کمار جین کی ممنون ہے۔اس درسی کتاب کی تیاری میں جن اساتذہ نے حصّہ لیا،ہم ان کے متعلقہ اداروں کے بھی شکر گزار ہیں۔ہم ان سب ہی اداروں اور تنظیموں کا بھی شکریہ ادا کرتے ہیں جنھوں نے اپنے وسائل، مآخذ اور عملے کی فراہمی میں فراخ دلی کا ثبوت دیا۔ہم وزارت برائے فروغ انسانی وسائل کے شعبے برائے ثانوی اور اعلیٰ ثانوی تعلیم کی جانب سے پروفیسر مرنال مری اور پروفیسر جی۔پی۔دیش پانڈے کی سربراہی میں تشکیل شدہ نگراں کمیٹی (مانیٹرنگ کمیٹی) کے اراکین کا بھی خصوصی شکریہ ادا کرتے ہیں جنھوں نے اپنا قیمتی وقت اور تعاون ہمیں دیا۔ہم اس نصابی کتاب کے اردو ترجمے کی ذمے داری بخوبی انجام دینے کے لیے جامعہ ملیہ اسلامیہ نئی دہلی کے شکر گزار ہیں،خاص طور پر جامعہ ملیہ کے وائس چانسلر پروفیسر مشیر الحسن اور محترمہ رخشندہ جلیل کے ممنون اور شکر گزار ہیں جنھوں نے مرکز برائے جواہر لعل نہرو اسٹڈیز، جامعہ ملیہ اسلامیہ کے آؤٹ ایچ پروگرام کے ذریعے اس عمل میں رابطہ کار کے فرائض بخوبی انجام دیے۔کونسل اس کتاب کے اردو ترجمے کے لیے اطہر پرویز کی شکر گزار ہے۔ باضابطہ اصلاح اور اپنی اشاعت کے معیار کو مسلسل بہتر بنانے کے مقصد کی پابند ایک تنظیم کے طور پر این سی ای آر ٹی،تمام مشوروں اور آرا کا خیر مقدم کرتی ہے تا کہ کتاب کو مزید غور وفکر کے بعد اور زیادہ کار آمد اور بامعنی بنایا جا سکے۔

نئی دہلی	ڈائریکٹر
نومبر 2006	نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ

دیباچہ

این سی ای آر ٹی نے تعلیمی میدان میں نئے نئے چیلنجوں اور نئی نئی تبدیلیوں کے پیش نظر، اسکول ایجوکیشن کے مختلف مضامین کی تدریس سے متعلق 21 فوکس گروپ تشکیل دیے تھے جس کا مقصد یہ تھا کہ قومی خاکۂ درسیات برائے اسکولی تعلیم 2000 پر نظر ثانی کی جائے، ان فوکس گروپوں نے اپنے اپنے مضامین سے متعلق عمومی اور خصوصی تبصرے اور رائیں پیش کیں۔ نتیجتاً ان ہی فوکس گروپوں کی رپورٹ پر مبنی قومی خاکۂ درسیات (NCF) 2005 کا ارتقا عمل میں آیا۔

این سی ای آر ٹی نے ایک نیا نصاب ڈیزائن کیا اور گیارھویں اور بارھویں کلاسوں کے لیے حساب کی کتابیں تیار کرنے کے لیے کمیٹی برائے نصابی کتب تشکیل کی گئی۔ گیارھویں کلاس کے لیے درسی کتاب پہلے ہی منظر عام پر آچکی ہے۔

موجودہ کتاب (بارھویں کلاس) کا پہلا ڈرافٹ جس ٹیم نے تیار کیا ہے اس میں این سی ای آر ٹی کی فیکلٹی، ماہرین تعلیم اور اساتذہ شریک تھے۔ اس ڈرافٹ کا ان اساتذہ نے مطالعہ کیا جو ہائر سیکنڈری سطح پر ملک بھر میں ریاضی کی تدریس میں مشغول ہیں۔ اس ڈرافٹ کے ریویو کے لیے ورکشاپ کے انتظام کی ذمہ داری این سی ای آر ٹی نے انجام دی۔ اساتذہ نے اپنے بیش بہا مشورے اور مفید تجاویز پیش کیں جن کو اس کتاب میں شامل کیا گیا۔ اس کتاب کے ڈرافٹ کو ادارتی بورڈ نے آخری شکل دی۔ بالآخر سائنس اور ریاضی کے لیے ایڈوائزری گروپ اور وزارت فروغ وسائل انسانی (حکومت ہند) کے تحت قائم شدہ مانیٹرنگ کمیٹی نے اس ڈرافٹ کو اپنی منظوری دی۔

یہاں اس درسی کتاب کی کچھ اہم خصوصیات کی طرف اشارہ کرنا بھی بے موقع ہوگا۔ کتاب کی یہ خصوصیات سب ہی ابواب میں آپ کو نظر آئیں گی۔ موجودہ کتاب میں 13 ابواب اور دو ضمیمے شامل ہیں۔ ہر باب درج ذیل پر مشتمل ہے۔

- مقدمہ : مقدمہ میں موضوع کی اہمیت کو واضح کیا گیا ہے۔ پچھلے پڑھے ہوئے موضوعات سے رابطہ اور موجودہ باب میں پیش کیے گیے نئے تصورات پر مختصر گفتگو کی گئی ہے۔
- باب کو ذیل سیکشنوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور ہر ایک سیکشن میں ایک نیا تصور یا ذیلی تصور پیش کیا گیا ہے۔
- نئے تصورات یا ذیلی تصورات کو جہاں تک ممکن ہوسکا مثالوں سے واضح کیا گیا ہے۔
- ریاضیاتی تصورات کے اطلاق کو سائنس اور سوشل سائنس وغیرہ مضامین سے مربوط اور وابستہ کیا گیا ہے۔

- ہر سیکشن میں مختلف قسم کی مثالیں اور مشقیں فراہم کی گئی ہیں۔
- آخر میں فارمولوں، نتیجوں اور خاص تصورات کے براہ راست اعادے کے لیے باب کا خلاصہ دے دیا گیا ہے۔

میں پروفیسر کرشن کمار ڈائریکٹر این سی ای آر ٹی کا انتہائی شکر گزار ہوں جنھوں نے ٹیم کی تشکیل کی اور مجھے ریاضی کی تعلیم جیسی قومی خدمت کے لیے مدعو کیا۔ موصوف کی کاوشوں سے کتاب کی تیاری بہت خوشگوار اور قابل افتخار ہوگئی۔ میں پروفیسر جے وی نارلیکر کا بھی ممنون واحسان مند ہوں۔ موصوف سائنس اور ریاضی میں ایڈوائزری گروپ کے چیرمین ہیں اور انھوں نے وقتاً فوقتاً کتاب کو خوب سے خوب تر بنانے کے لیے خصوصی مشوروں سے نوازا اور اپنی بیش قیمت آرا بھی پیش کیں۔ میں پروفیسر جی رَوندرا، جوائنٹ ڈائریکٹر این سی ای آر ٹی کا بھی ان کے تعاون کے بے حد مشکور ہوں، میں خاص طور پر پروفیسر حکم سنگھ، چیف کوارڈینیٹر اور ہیڈ DESM ڈاکٹر وی پی سنگھ اور ر پروفیسر ایس کے سنگھ گوتم کا بھی بے حد سپاس گزار ہوں جنھوں نے اس پروجیکٹ کی کامیابی کے لیے تعاون دینے سے کبھی دریغ نہیں کیا۔ اس کے علاوہ میں ٹیم کے تمام ممبران اور اساتذہ کا بھی رہین منت ہوں جنھوں نے اس قومی افادیت کے کام کے لیے اپنا تعاون پیش کیا۔

پون کے جین

خصوصی صلاح کار

کمیٹی برائے درسی کتب

کمیٹی برائے درسی کتاب

چیئرمین مشاورتی کمیٹی برائے ریاضی اور سائنس

جے۔وی۔نارلیکر، پروفیسر ایمرٹس وصدر، یونیورسٹی سینٹر فار ایسٹرونومی اینڈ ایسٹروفیزیکس (آئی یوسی اے)، پونے یونیورسٹی، پونہ

خصوصی صلاح کار

پی۔کے۔جین، پروفیسر، شعبۂ ریاضیات، دہلی یونیورسٹی، دہلی

چیف کوآرڈی نیٹر

حکم سنگھ، پروفیسر و صدر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

اراکین

ارون پال سنگھ، سینئر لیکچرر، شعبۂ ریاضیات، دیال سنگھ کالج، دہلی یونیورسٹی، دہلی

اے۔کے۔راجپوت، ریڈر، آر آئی ای، این سی ای آر ٹی، بھوپال

بی۔ایس۔پی۔راجو، پروفیسر، آر آئی ای، این سی ای آر ٹی، میسور

سی۔آر۔پردیپ، اسسٹینٹ پروفیسر، شعبۂ ریاضیات، انڈین انسٹی ٹیوٹ آف سائنس، بنگلور

آر۔ڈی۔شرما، پی جی ٹی، جواہر نوودیہ ودیالہ، منگیش پور، دہلی

رام۔اوتار، پروفیسر، (ریٹائرڈ)، صلاح کار، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

آر۔پی۔موریہ، ریڈر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

ایس۔ایس۔کھیر، پروفیسر، پرووائس چانسلر، این ای ایس یو، تورا کیمپس میگھالیہ

ایس۔کے۔ایس۔گوتم، پروفیسر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

ایس۔کے۔کوشک، (ریڈر)، کروڑی مل کالج، دہلی یونیورسٹی، دہلی

سنگیتا اروڑا، پی جی ٹی، اے پی جے اسکول سا کیت، نئی دہلی

شیلیجا تیواری، پی جی ٹی، سینٹرل اسکول، برکا کانا ہزاری باغ

ونا یک جوجاڑے، لیکچرر، ودربھ بنیادی جونیئر کالج، ناگپور

سنیل بجاج، سینیئر اسپشلیسٹ، ایس سی ای آر ٹی، گڑگاؤں

ممبر کوآرڈی نیٹر

وی۔ پی۔ سنگھ، ریڈر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

اظہار تشکر

کونسل ان سب حضرات کی صمیم قلب سے ممنون و متشکر ہے جنھوں نے اس درسی کتاب کی ریویو ورکشاپ میں شرکت فرمائی اور اپنے بیش قیمتی مشوروں سے نوازا۔

کونسل اس کتاب کی تیاری اور اس کی طباعت میں ڈی ای ایس ایم اور پبلی کیشن ڈویژن کے سبھی متعلقہ اسٹاف کے تعاون کا بھی اعتراف کرتی ہے۔

بھارت کا آئین

تمہید

ہَم بھارت کے عوام متانت وسنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بھارَت کو ایک مقتدَر، سماج وَادی، غیرَ مَذھَبی عَوامی جَمھُوریَه بنائیں اور اس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں۔

انصاف سماجی، معاشی اور سیاسی

آزادی خیال، اظہار، عقیدہ، دین اور عبادت

مساوات بہ اعتبار حیثیت اور موقع اور ان سب میں

اخوت کو ترقی دیں جس سے فرد کی عظمت اور قوم کے اتحاد اور سالمیت کا تیقن ہو۔

اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھبیس نومبر 1949ء کو یہ آئین ذریعہ ہذا اختیار کرتے ہیں، وضع کرتے ہیں اور اپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔

فہرست

پیش لفظ *iii*

دیباچہ *v*

1. رشتے اور تفاعلات **1**

1.1 تعارف 1

1.2 رشتوں کی قسمیں 2

1.3 تفاعلات کی قسمیں 9

1.4 تفاعل کی ترکیب اور قابلِ تعکیس تفاعل 15

1.5 دوعنصری عمل 25

2. معکوس ٹرگنومیٹریائی تفاعلات **42**

2.1 تعارف 42

2.2 بنیادی تصور 42

2.3 معکوس ٹرگنومیٹریائی تفاعلات کی خصوصیات 51

3. ماترس **65**

3.1 تعارف 65

3.2 ماترس 66

3.3 ماترس کی قسمیں 70

3.4 ماترس پر عمل 75

3.5 ایک ماترس کا پلٹاؤ 94

3.6 متشاکل اور عوجی متشاکل ماترس 96

3.7 ایک ماترس کے ابتدائی عمل (استحالہ) 101

3.8 قابلِ تعکیس ماترس 102

4. مقطعہ 115

4.1 تعارف 115

4.2 مقطعہ 116

4.3 مقطعہ کی خصوصیات 121

4.4 ایک مثلث کا رقبہ 134

4.5 صغیرے اور ہم ضربی 136

4.6 ایک ماترس کا شریک اور معکوس 140

4.7 مقطعہ اور ماترس کے استعمال 147

5. تسلسل اور تفرق پذیری 162

5.1 تعارف 162

5.2 تسلسل 162

5.3 تفرق پذیری 180

5.4 قوت نما اور لوگارتمی تفاعل 188

5.5 لوگارتمی تفرق 194

5.6 پیرامیٹرک شکل میں تفاعل کے مشتق 199

5.7 دوسرے درجہ کا مشتق 201

6. مشتق کا اطلاق **214**

6.1 تعارف 214

6.2 مقداروں کی شرح تبدیلی 214

6.3 بڑھتے اور گھٹتے ہوئے تفاعلات 219

6.4 مماس اور نارمل 228

6.5 تقرب 234

6.6 اعظم قدریں اور قلیل قدریں 238

ضمیمہ۔1 ریاضی میں ثبوت **274**

A.1.1 تعارف 274

A.1.2 ثبوت کیا ہے؟ 274

ضمیمہ۔2 ریاضیاتی ماڈلنگ **285**

A.2.1 تعارف 285

A.2.2 ریاضیاتی ماڈلنگ کیوں؟ 285

A.2.3 ریاضیاتی ماڈلنگ کے اصول 286

جوابات **299**

بھارت کا آئین

حصہ III (دفعہ 12 سے 35)
(بعض شرائط، چند مستثنات اور واجب پابندیوں کے ساتھ)

بنیادی حقوق

کے ذریعہ منظور شدہ

حق مساوات

- قانون کی نظر میں اور قوانین کا مساویانہ تحفظ
- مذہب، نسل، ذات، جنس یا مقام پیدائش کی بنا پر عوامی جگہوں پر مملکت کے زیر انتظام
- سرکاری ملازمت کے لیے مساوی موقع
- چھوت چھات اور خطابات کا خاتمہ

حق آزادی

- اظہار خیال، مجلس، انجمن، تحریک، بود و باش اور پیشے کا
- سزا کے جرم سے متعلق بعض تحفظات کا
- زندگی اور شخصی آزادی کے تحفظ کا
- 6 سے 14 سال کی عمر کے بچوں کے لیے مفت اور لازمی تعلیم کا
- گرفتاری اور نظر بندی سے متعلق بعض معاملات کے خلاف تحفظ کا

استحصال کے خلاف حق

- انسانوں کی تجارت اور جبری خدمت کی ممانعت کے لیے
- بچوں کو خطرناک کام پر مامور کرنے کی ممانعت کے لیے

مذہب کی آزادی کا حق

- آزادیِ ضمیر اور قبولِ مذہب اور اس کی پیروی اور تبلیغ
- مذہبی امور کے انتظام کی آزادی
- کسی خاص مذہب کے فروغ کے لیے ٹیکس ادا کرنے کی آزادی
- کلی طور سے مملکت کے زیر انتظام تعلیمی اداروں میں مذہبی تعلیم یا مذہبی عبادت کی آزادی

ثقافتی اور تعلیمی حقوق

- اقلیتوں کی اپنی زبان، رسم خط یا ثقافت کے مفادات کا تحفظ
- اقلیتوں کو اپنی پسند کے تعلیمی ادارے کے قیام اور ان کے انتظام کا حق

قانونی چارہ جوئی کا حق

- سپریم کورٹ یا کورٹ کی جانب سے ہدایات، احکام یا رٹ کے اجرا کو تبدیل کرانے کا حق