2 ضمیمہ

ریاضیاتی ماڈلنگ
(MATHEMATICAL MODELLING)

A.2.1 تعارف

گیارہویں جماعت میں ہم نے ریاضیاتی ماڈلنگ کے بارے میں پڑھا ہے، جو کہ حقیقی زندگی کے کچھ مسئلوں (یا شکلوں) کا مطالعہ کرنے کی ایک کوشش تھی ریاضیاتی ارکان میں، یعنی، ایک طبعی حالات کو ریاضی میں بدلنے کی کچھ مناسب شرطوں کا استعمال کر کے۔ موٹے طور پر ریاضیاتی ماڈلنگ ایک طریقہ ہے جس میں ہم ماڈل بناتے ہیں جس میں ہم اپنی پسند کے غیر معمولی کاموں کو مختلف طریقوں سے الفاظ کا استعمال کر کے جیسے ڈرائنگ یا تصویر بنانا، کمپیوٹر پروگرام ریاضیاتی فارمولوں وغیرہ۔

پچھلی جماعتوں میں ہم نے، یہ مشاہدہ کیا ہے کہ بہت سے مسئلوں کے حل، جن میں بہت سے ریاضیاتی تصوروں کا استعمال شامل ہے میں ریاضیاتی ماڈلنگ ایک یا دوسرے طریقے ملوث ہے۔

اس سبق میں ہم، ماترس احفاء خطی پروگرامنگ کے طریقوں کے نتائج کا استعمال کر کے ریاضیاتی ماڈلنگ کا مطالعہ آگے کی کچھ حقیقی زندگی کے مسئلوں کے بارے میں کریں گے۔

A.2.2 ریاضیاتی ماڈلنگ کیوں؟

طلباء حساب، الجبرا، ٹرگنومیٹری اور خطی پروگرامنگ وغیرہ کے عبارتی مسئلوں کے حل سے بخوبی واقف ہیں۔ کئی بار ہم حالاتی مسئلوں کا حل بغیر طبعی گہرائی میں جائے بغیر مسئلوں کو حل کرتے ہیں۔ وضعی مسئلوں کو طبعی گہرائی کی ضرورت ہوتی ہے جو کہ طبعی خانوں اور کچھ علامتوں کے متعارف کرانے اور ریاضیاتی نتائج کو عملی قدروں کے ساتھ موازنہ کرانے سے حاصل ہوتا ہے۔ بہت سے مسئلے جو ہمیں درپیش حل کرنے کے لیے ہمیں ایک طریقہ کی ضرورت ہے جسے ہم ریاضیاتی ماڈلنگ کہتے ہیں۔ ہم ذیل مسئلوں پر غور کرتے ہیں۔

(i) ایک دریا کی چوڑائی معلوم کرنے کے لیے (خاص طور پر، جب دریا کو پار کرنا مشکل ہو)۔

(ii) شاٹ پٹ یا گولا پھینکنے کے کیس میں زیادہ سے زیادہ (optimal) زاویہ معلوم کرنا: پھینکنے والے کی اونچائی، ہوا کی وجہ سے لگائی گئی طاقت، زمین کی قوت کشش سے پیدا ہوا اسراع وغیرہ وغیرہ۔

(iii) ایک مینار کی اونچائی معلوم کرنا (خاص طور پر، جب مینار کی چھت پر پہنچنا ناممکن ہو۔

(iv) سورج کی سطح پر درجۂ حرارت معلوم کرنا۔

(v) دل کے مریضوں کے لیے لفٹ کا استعمال کرنا کیوں ممنوع ہے۔

(vi) زمین کا وزن معلوم کرنا۔

(vii) ہندوستان میں کھڑی فصلوں سے دالوں کی پیداوار کا تخمینہ لگانا۔

(viii) ایک انسان کے جسم کے اندر خون کا حجم معلوم کرنا (ایک انسان کا مکمل خون نکالنے کی اجازت نہیں ہے)۔

(ix) سال 2020 میں ہندوستان کی آمدنی کا تخمینہ لگانا (ایک انسان کو اس وقت تک انتظار کرنے کی ضرورت نہیں ہے)

یہ تمام مسئلہ حل کیے جاسکتے ہیں اور حقیقت میں ریاضی کی مدد سے ریاضیاتی ماڈلنگ کا استعمال کر کے حل کیے جا چکے ہیں۔ حقیقت میں آپ نے موجودہ کتاب میں خود ان میں سے کچھ مسئلوں کو حل کرنے کے بارے میں پڑھا ہوگا حالانکہ، یہ کیا اچھا ہوگا کہ آپ ریاضی کی طاقت سے لطف اندوز ہوں گے اور ریاضیاتی ماڈلنگ کی ضرورت کو محسوس کریں گے۔

A.2.3 ریاضی ماڈلنگ کے اصول

ریاضیاتی ماڈلنگ ایک اصولی کام ہے اور اس لیے اس کے پیچھے کچھ اصول ہیں۔ یہ اصول زیادہ تر حقیقت سے قریب ہیں۔ ریاضیاتی ماڈلنگ کے کچھ بنیادی اصولوں کی فہرست کے طور پر نیچے دی گئی ہے۔

(i) ماڈل کو پہچاننے کی ضرورت (جس کے لیے ہم دیکھ رہے ہیں)

(ii) ماڈل میں جن پیرامیٹرس/متغیروں کی ضرورت ہے ان کی فہرست بنانا۔

(iii) موجود ملتے جلتے اعداد و شمار کی پہچان کرنا (کیا دیا ہوا ہے؟)

(iv) ان حالات کی پہچان کرنا جو عمل میں لائے جاسکیں (تصورات) اثر کرنے والے طبعی اصولوں کی پہچان کرنا۔

(v) اثر انداز ہونے والے طبعی اصولوں کی پہچان کرنا۔

(vi) پہچان کرنا۔

(a) اس مساوات کی جو استعمال ہونی ہے۔

(b) وہ تحسیب جو کی جائیگی۔

(c) حل جن کو ماننا ہوگا۔

(vii) ان ٹیسٹ کی پہچان کرنا جو یہ جانچ کریں

(a) ماڈل کی ہم آہنگی

(b) ماڈل کی افادیت

(viii) ان پیرامیٹر قدروں کی پہچان کرنا جو ماڈل کو بہتر بنا سکیں۔

ریاضیاتی ماڈلنگ کے اوپر دیئے ہوئے اصول ذیل کی طرف لے جاتے ہیں: ریاضیاتی ماڈلنگ کے اقدامات۔

قدم 1: طبعی صورت کی پہچان کرنا۔

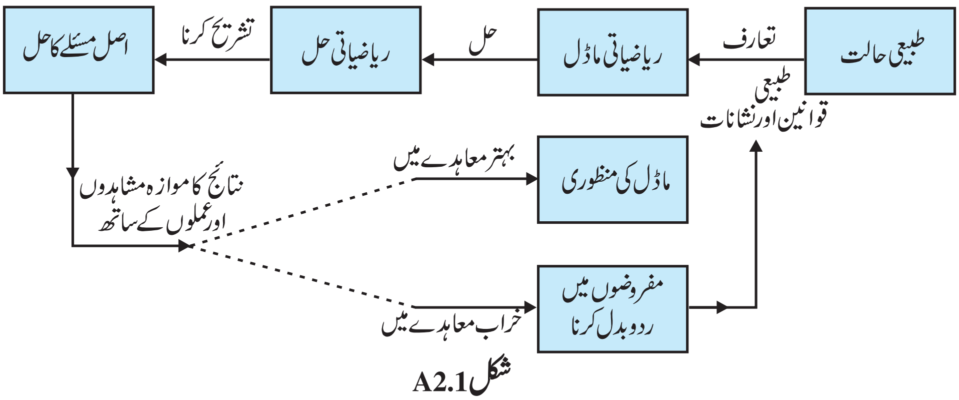
قدم 2: طبعی حالات کو پیرامیٹرس / متغیروں سے متعارف کرا کے ریاضیاتی ماڈل میں بدلنا اور بہت سے جانے پہچانے قوانین اور علامتوں کا استعمال کرنا۔

قدم 3: ریاضیاتی مسئلوں کا حل معلوم کرنا۔

قدم 4: اصل مسئلوں کے نتائج کی ترجمانی کرنا اور نتائج کا موازنہ مشاہدوں اور عملوں کے ساتھ کرنا۔

قدم 5: اگر نتیجہ اچھی مطابقت میں ہے، تب ماڈل کو منظور کرنا۔ ورنہ مفروضہ / مانے ہوئے کو طبعی حالت کے حساب سے ردو بدل کرنا اور پھر قدم 2 کے حساب سے آگے بڑھنا۔

اوپر دیئے اقدامات ذیل میں دی گئی تصویر کے حساب سے دیکھے جا سکتے ہیں۔

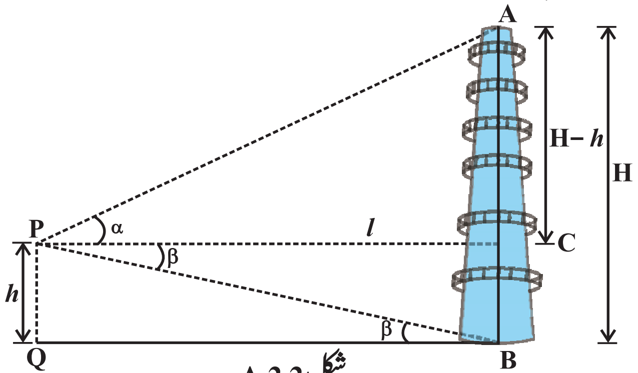


شکل A2.1

مثال 1 ریاضیاتی ماڈلنگ کا استعمال کر کے ایک دی ہوئی مینار کی اونچائی معلوم کیجیے۔

حل قدم 1 دی ہوئی طبعی حالت ہے ''دی ہوئی مینار کی اونچائی معلوم کرنا۔''

قدم 2 مان لیجیے AB ایک دی ہوئی مینار ہے (شکل A.2.2) مان لیجیے PQ ایک دیکھنے والا ہے جو مینار کی اونچائی معلوم کر رہا ہے جس کی آنکھ P پر ہے۔ مان لیجیے $PQ=h$ اور مینار کی اونچائی H ہے۔ مان لیجیے α ایک زاویہ جو کہ دیکھنے والے کی آنکھ مینار کی کسی چھت کے ساتھ بنا رہی ہے۔



شکل A.2.2

مان لیجیے $l = PC = QB$

اب $\tan\alpha = \dfrac{AC}{PC} = \dfrac{H-h}{l}$

$$H = h + l\tan\alpha \quad ...(1)$$

قدم 3: نوٹ کر لیجیے کہ پیرامیٹرس l, h اور a کی قدریں (sextant کا استعمال کرنے پر) دیکھنے والے کو معلوم ہیں اس طرح (1) مسئلہ کا حل دیتی ہے۔

قدم 4: اس حال میں جب کہ اگر مینار کے پایہ تک پہنچنا ممکن نہیں ہے، یعنی، جب کہ دیکھنے والے کو l نہیں معلوم مان لیجیے، جھکاؤ کا زاویہ β ہے نقطہ P سے مینار کے پایہ B تک۔ اس طرح DPQB سے ہمارے پاس ہے۔

قدم 5: کی اس صورت حال میں ضرورت نہیں ہے کیونکہ پیرامیٹرس a, l, h اور B کی ایک دم صحیح قدریں معلوم ہیں۔

مثال 2 مان لیجیے ایک کاروباری فرم تین طرح کی اشیاء P_1, P_2 اور P_3 تیار کرتی ہے جو تین طرح کے خام مال R_1 ، R_2

اور R_3 کا استعمال کرتی ہے۔ مان لیجیے فرم کے پاس دو گراہکوں F_1 اور F_2 سے خریداری کے آرڈر ہیں۔ ان حالات کو مدنظر رکھتے ہوئے کہ فرم کے پاس بالترتیب اشیاء R_1، R_2 اور R_3 کی انتہائی مقدار موجود ہے، ایک ماڈل تیار کیجیے جو یہ معلوم کر سکے کہ خام مال R_1، R_2 اور R_3 کی مقدار معلوم کر سکے جو خریدار کے آرڈر کے مطابق ہو۔

حل قدم 1 مسئلہ میں طبعی صورتِ حال کو بخوبی پہچانا گیا ہے۔

قدم 2 مان لیجیے خریداری کے آرڈر کو دو گراہک F_1 اور F_2 کو ماترس A سے ظاہر کیا گیا ہے۔ تب A اس شکل کا ہے۔

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

مان لیجیے B ایک ماترس ہے جو خام مال کی مقدار R_1، R_2 اور R_3 سے ظاہر کرتی ہے، جو اشیاء کے ہر اکائی P_1، P_2 اور P_3 کو بنانے میں درکار ہے۔ تب، B اس شکل کی ہے۔

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

قدم 3 نوٹ کر لیجیے ماترس A اور B کا حاصل ضرب (جو کہ اس کیس میں بخوبی بیان کیا گیا ہے) ذیل ماترس سے دیا گیا ہے۔

$$AB = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

جو کہ حقیقت میں خام مال کی مطلوبہ مقدار R_1، R_2 اور R_3 کو دیتا ہے جو کہ خریدار F_1 اور F_2 خریداری آرڈر پورے کرنے کے لیے ہے۔

مثال 3 مثال 2 میں جو ماڈل دیا گیا ہے اس کی ترجمانی کیجیے۔ جب کہ

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

اورموجودخام مال کے 330 یونٹ ہیں، R_1 کے، 445 یونٹ میں R_2 کےاور 140 یونٹ ہیں R_3 کے

حل نوٹ کر لیجیے کہ

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 165 & 247 & 87 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix} \end{array}$$

F_1 اور F_2 کے خریداری کے آرڈر مکمل کرنے کے لیے یہ صاف طور پر دکھاتا ہے کہ، R_1 کے لیے مطلوبہ خام مال کی مقدار 335 یونٹ ہے، R_2 کے لیے 467 یونٹ ہے اور R_3 کے لیے 147 یونٹ ہے جو کہ موجود خام مال سے کہیں زیادہ ہے۔ کیونکہ تینوں اشیاء کے ہر یونٹ کو بنانے کے لیے خام مال کی مقدار مستقل ہے، موجود خام مال کی مقدار بڑھانے کا مطالبہ کر سکتے ہیں۔ یا ہم خریدار سے آرڈر کی تعداد کم کرنے کی سفارش کر سکتے ہیں۔

ریمارک اگر ہم مثال 3 میں A کو A_1 سے بدل دیں جو کہ دیا گیا ہے۔

اگر $$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

یعنی اگر خریدار اپنا خریداری کا آرڈر کم کرنے کے لیے تیار ہو گیا ہے، تب

$$A_1\ B = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141 & 216 & 78 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix}$$

اس میں R_1 کے 311 یونٹ، R_2 کے 436 یونٹ R_3 یونٹ درکار ہیں جو کہ موجود خام مال کی مقدار، یعنی، R_1 کے 330 یونٹ، R_2 کے 445 یونٹ اور R_3 کے 140 یونٹ سے کہیں کم ہے۔ اس طرح، خریدار کے بدلے ہوئے خریداری کے آرڈر A_1 سے دیئے گئے ہیں، تب فرم آسانی سے دو خریداروں کے لیے خریداری کے آرڈر آرام سے دے سکتی ہے۔

نوٹ کوئی بھی A میں مزید ترمیم کر سکتا ہے تا کہ موجود خام مال کا پورا استعمال ہو سکے

سوالیہ نشان کیا دیئے ہوئے B سے ایک ماڈل بنا سکتے ہیں، جس میں موجود خام مال کی مقدار مستقل ہے جو کہ فرم کے مالک

کی مدد کر سکے تا کہ وہ خریدار سے کہہ سکے کہ وہ اپنے آرڈر میں اس طرح ترمیم کریں کہ فرم اپنے موجودہ خام مال کا بھرپور استعمال کر سکے۔

اس سوال کا جواب دینے کے لیے ذیل مثال دی گئی ہے۔

مثال 4 مان لیجیے P_1 ، P_2 ، P_3 اور R_1 ، R_2 ، R_3 ایسے ہی ہیں جیسا کہ مثال 2 میں۔ مان لیجیے فرم میں R_1 کے 330 یونٹ ہیں، R_2 کے 445 یونٹ ہیں اور R_3 کے 140 یونٹ موجود ہیں اور مان لیجیے خام مال کی مقدار R_1 ، R_2 اور ہے جو کہ تینوں اشیاء بنانے میں درکار ہیں، اس طرح دیئے گئے ہیں۔

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

ہر ایک شئے کے کتنے یونٹ بنیں گے تا کہ دستیاب پورے خام مال کا استعمال بخوبی ہو سکے۔

حل قدم 1 صورتِ حال آسانی سے پہچانا جا سکتا ہے۔

قدم 2 مان لیجیے کہ فرم P_1 کے x یونٹ، P_2 کے y یونٹ اور P_3 کے z یونٹ تیار کر رہی ہے۔ کیونکہ اشیاء کو R_1 کے 3 یونٹ درکار ہیں، P_2 کو P_2 کے 7 یونٹ درکار ہیں اور P_3 کو R_3 کے 5 یونٹ درکار ہیں (ماترس B کا مشاہدہ کیجیے) اور R_1 کے کل دستیاب یونٹ 330 ہیں، ہمارے پاس ہے۔

(خام مال R_1 کے لیے) $3x+7y+5z=330$

اسی طرح، ہمارے پاس ہے

(خام مال R_2 کے لیے) $4x+9y+12z=455$

(خام مال R_3 کے لیے) $3y+7z=140$

یہ مساوات کا نظام ماترس شکل میں اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے۔

قدم 3 ابتدائی قطار عمل کا استعمال کر کے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \\ 5 \end{bmatrix}$$

یہ $x=20$، $y=35$ اور $z=5$ دیتا ہے۔ اس طرح فرم P_1 کے 20 یونٹ، P_2 کے 5 یونٹ بنا سکتی ہے تا کہ اس کے پاس دستیاب خام مال کا پورا استعمال ہو سکے۔

ریمارک: اس کا مشاہدہ کیا جا سکتا ہے کہ اگر فرم، اس بات کا فیصلہ کر لے کہ وہ صرف دستیاب خام مال کا استعمال کر کے ہی اشیاء بنائے گی تا کہ دوگرا ہک F_1 اور F_2 کے خریداری کے آرڈر کے حساب سے (جیسا کہ مثال میں دیا گیا ہے) وہ مرد /عورت خریدار کے آرڈر کے حساب سے مال تیار کرنے میں نا کام ہے کیونکہ F_1 کی ضرورت P_3 کے 6 یونٹ کی ہی جب کہ صنعت کار P_3 کے صرف 5 یونٹ ہی بنا سکتا ہے۔

مثال 5 ایک دوائیوں کا بنانے والا صنعت کار دوائیوں M_1 اور M_2 کو تیار کرنے کا پلان بنا رہا ہے۔ M_1 کی 20000 بوتلیں اور M_2 کی 40000 بوتلیں تیار کرنے کے لیے کافی مقدار میں خام مال موجود ہے، لیکن اس کے پاس صرف 45000 بوتلیں موجود ہیں جن میں کوئی بھی دوائی رکھی جا سکتی ہے۔ اس کے آگے M_1 کی 1000 بوتلیں بھرنے کے لیے ہال میں 3 گھنٹے لگتے ہیں۔ اور M_2 کی 1000 بوتلیں بھرنے کے لیے مال تیار کرنے میں 1 گھنٹہ لگتا اور اس عمل کو پورا کرنے میں کل 66 گھنٹے دستیاب ہیں جب کہ M_1 کی بوتل پر منافع 8 روپے اور M_2 کی بوتل پر منافع 7 روپے ہے۔ صنعت کار کس طرح اپنا دوا بنانے کے لیے مرد اور عورت کا استعمال کرے تا کہ زیادہ سے زیادہ منافع حاصل ہو۔

حل قدم M_1 اور M_2 بوتلوں کی تعداد معلوم کرنا تا کہ دیئے ہوئے مفروضہ کے تحت منافع کو زیادہ سے زیادہ کیا جا سکے۔

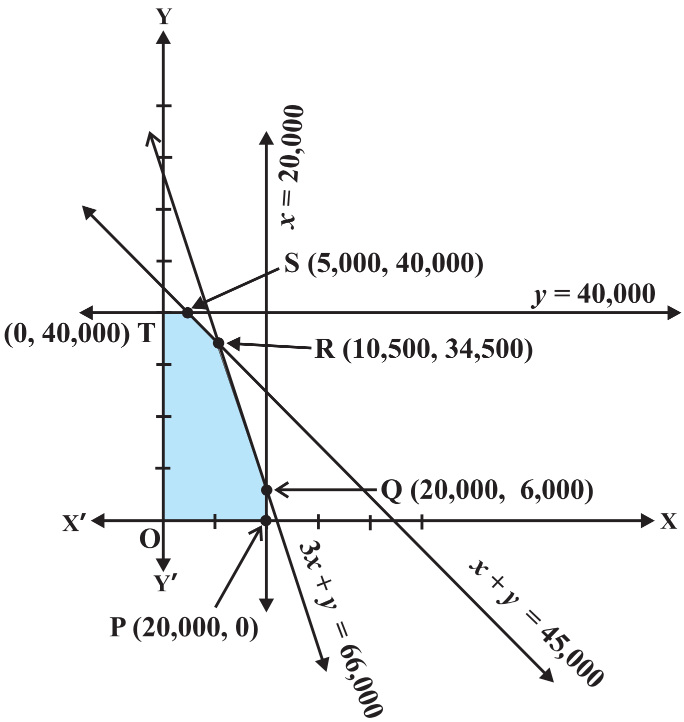
قدم 2 مان لیجیے M_1 کی طرح کی دوائی والی بوتولوں کی تعداد x ہے اور M_2 کی طرح کی دوائی والی بوتلوں کی تعداد y ہے۔ کیونکہ M_1 کی بوتل پر منافع 8 روپے ہے اور M_2 کی بوتل پر منافع 7 روپے ہے، اس لیے معروضی فنکشن (جو کہ زیادہ سے زیادہ ہونا چاہئے) اس طرح دیا گیا ہے۔

$$Z \equiv Z(x, y) = 8x + 7y$$

معروضی فنکشن زیادہ سے زیادہ ہونے والا شعور پابندی کے ساتھ ہے (خطی پروگرامنگ پر مبنی باب 12 کے حوالے سے)

$$\left.\begin{array}{l} x \le 20000 \\ y \le 40000 \\ x + y \le 45000 \\ 3x + y \le 66000 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\} \quad \ldots(1)$$

قدم 3 عکس والا خط OPQRST پابندیوں (1) کے لیے معقول خط ہے (شکل A.2.3)۔ راس O, P, Q, R, S اور T کے مختص بالترتیب ہے۔ (0, 0), (20000, 0), (20000, 6000), (10500, 34500), (5000, 40000) اور (0, 40000) ہیں۔



شکل A.2.3

Z پر at P (0, 0) = 0

Z پر P (20000, 0) = 8 × 20000 = 160000

Z پر P (0, 0) = 0 + 7 × 6000 = 202000

Z پر R (10500, 34500) $= 8 \times 10500 + 7 \times 34500 = 325500$

Z پر S = (5000, 40000) $= 8 \times 5000 + 7 \times 40000 = 320000$

Z پر T = (0, 40000) $= 7 \times 40000 = 280000$

اب مشاہدہ کیجیے کہ $x=10500$ اور $y=34500$ پر منافع اعظم ترین ہے اور اعظم ترین منافع 325500 روپے ہے۔اس لیے صنعت کار دوائی M_1 کی 10500 بوتلیں تیار کرے اور دوائی M_2 کی 34500 بوتلیں تیار کرے تا کہ اعظم ترین 325500 روپیہ حاصل کرنے کے لیے۔

مثال 6 ایک مان لیجیے ایک کمپنی ایک نئی اشیاء تیار کرنے کا پلان بناتی ہے اور اس پر کچھ روپیہ صرف کرتی ہے (متعین اور تغیر پذیر) اور مان لیجیے کہ کمپنی اشیاء کو ایک متعین قیمت پر فروخت کرتی ہے۔اس کے منافع کی جانچ کرنے کے لیے ایک ریاضیاتی ماڈل تیار کیجیے۔

حل قدم 1 صورتِ حال کی صاف طور پر پہچان کی جاسکتی ہے۔

قدم 2 فارمولہ بنانا (Formulation) ہمیں یہ دیا ہوا ہے کہ قیمت دو طرح کی ہے: متعین اور متغیر مستقل قیمت بنے والے یونٹ کی اعداد (نمبر) پر منحصر نہیں ہے۔(مثال کے طور پر کرایہ اور قیمتوں کی شرح) جب کہ متغیر کی قیمت بڑھتی ہے بننے والی اشیاء کی مقدار (نمبر) کے ساتھ (مثال کے طور پر)۔ پہلے ہم مانتے ہیں کہ متغیر قیمتیں بنائے گئے یونٹ کے ساتھ سیدھے طور پر نسبت میں ہیں۔ یہ ہمارے ماڈل کو آسان کردے گا۔ کمپنی اپنی اشیاء فروخت کرنے سے کچھ روپیہ پیدا کرتی ہے اور یقین چاہتی ہے کہ یہ اعظم ترین ہو۔ اپنی آسانی کے لیے ہم یہ مانتے ہیں کہ بنائے گئے سبھی یونٹ ایک دم فروخت ہو گئے ہیں۔

ریاضیاتی ماڈل

مان لیجیے x = پیدا کیے گیے اور فروخت کیے گیے یونٹ کی تعداد

C = بننے میں لگی کل قیمت (روپیوں میں)

I = بکری سے آمدنی (روپیوں میں)

P = منافع (روپیوں میں)

جو اوپر ہم نے مانا ہے وہ بیان کرتی ہے کہ C میں دو حصہ موجود ہیں:

(i) **متعین قیمت** = a (روپیوں میں)

(ii) **متغیر قیمت** = b (روپیہ پیدا کیے گیے یونٹ)

تب $C = a + bx$... (i)

ساتھ ہی آمدنی I، قیمت فروخت پر مبنی ہے (روپیہ/یونٹ)

اس طرح

$$I = sx \qquad \ldots (2)$$

تب منافع P آمدنی اور لاگت کا فرق ہے۔ اس لیے

$$P = I - C$$

$$= sx - (a + bx)$$

$$= (s - b)x - a \qquad \ldots (3)$$

اب ہمارے پاس متغیر x, C, I, P, a, b, s کے درمیان رشتوں (1) تا (3) تک کے لیے ایک ماڈل موجود ہے۔ ان متغیروں کی اس طرح ترتیب بندی کی جاسکتی ہے۔

غیر منحصر x

منحصر C, I, P

پیرامیٹرس a, b, s

صنعت کار x, a, b, s کو جانتے ہوئے P معلوم کرسکتا ہے۔

قدم 3 (3) سے، ہم یہ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ توڑا گیا مثبت نقطہ (یعنی، نہ تو منافع ہوتا اور نہ ہی نقصان)، اس کے پاس $P = 0$ ہونا ہی چاہیئے، یعنی، $x = \dfrac{a}{s-b}$ یونٹ

اقدام 4 اور 5 توڑے گئے مثبت نقطہ کے حوالے سے، کوئی بھی اس نتیجہ پر پہنچ سکتا ہے کہ کمپنی کچھ یونٹ پیدا کرتی ہے، یعنی،

$x=\dfrac{a}{s-b}$ یونٹ سے زیادہ، تب یہ زیادہ منافع پیدا کرسکتی ہے۔ مزید، اگر ہم سطح (break even point) نقطہ غیر حقیقی ثابت ہو جائے، تب ایک دوسرے ماڈل کی کوشش کرنی چاہیئے یا رقم کے پھیلاؤ کے مطابق مانے گئے بہتر بنانا چاہیئے۔

ریمارک مساوات '3' سے ہمارے پاس اور بھی ہے۔

$$\frac{d\,\mathrm{P}}{d\,x}=s-b$$

اس کا مطلب ہے کہ P کی شرح تبدیلی x کے ساتھ $s-b$ کی مقدار پر منحصر ہے، جو کہ ہر اشیاء کی قیمت فروخت اور متغیر قیمت کا فرق ہے۔ اس طرح، منافع حاصل کرنے کے لیے، یہ مثبت ہونا چاہیئے اور زیادہ منافع کے لیے، ہمیں اشیاء کی زیادہ پیداوار کی ضرورت ہے اور اسی وقت متغیر کیمت کو کم کرنے کی کوشش کریں۔

مثال 7 مان لیجیے ایک ٹینک میں 1000 لیٹر نمکین پانی ہے جس میں 1 لیٹر 250 گرام نمک ہے۔ نمکین پانی جس میں 200 گرام فی لیٹر کے حساب سے نمک موجود ہے ٹینک میں 25 لیٹر فی منٹ کے حساب سے بہت ہے اور اسی رفتار سے گھول ٹینک سے باہر بہہ جاتا ہے۔ یہ مانتے ہوئے کہ گھول کو ہر وقت چلا کر یکساں رکھا گیا ہے۔ ٹینک میں ہر وقت 't' نمک کی مقدار کیا ہوگی؟

حل قدم 1 صورتِ حال کی صاف طور پر پہچان کی جاسکتی ہے۔

قدم 2 مان لیجیے $y=y(t)$ کسی بھی وقت t (منٹوں میں) پر ٹینک میں نمک کی مقدار (کلوگرام میں) ظاہر کرتی ہے جبکہ گھول کا اندر آنا اور باہر جانا شروع ہوگیا ہو۔ اس کے بعد یہ مان لیجیے کہ y ایک تفرق پذیر فنکشن ہے۔ جبکہ $t=0$ ہے، یعنی نمک کا پانی اندر آنے سے پہلے نمک کا پانی باہر جانے سے پہلے

$$y=250\text{ g}\times 1000=250\text{ kg}$$

یہ نوٹ کرلیجیے کہ y کو وجود گھول کے ٹینک میں اندر آنے اور باہر جانے کی وجہ سے ہے۔

اب نمک والے پانی کا اندر آنا نمک کو 5 کلوگرام فی منٹ کے حساب سے ٹینک میں لاتا ہے (کیونکہ 25×200 گرام $=5$ کلوگرام) اور نمک والے پانی کا باہر جانا نمک $25\left(\dfrac{y}{1000}\right)=\dfrac{y}{40}$ کلوگرام فی منٹ (کیونکہ وقت t پر، ٹینک میں موجود

(نمک $\frac{y}{1000}$ کلوگرام ہے) کے حساب سے باہر لے جاتا ہے۔

اس طرح نمک کی شرح تبدیلی وقت t کے ساتھ دی گئی ہے۔

$$\frac{dy}{dt} = 5 - \frac{y}{40} \quad \text{(کیونکہ؟)}$$

یا
$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{40} y = 5 \quad ...(1)$$

یہ دیئے ہوئے مسئلہ کے لیے ریاضی ماڈل دیتا ہے۔

قدم 3 مساوات (1) ایک خطی مساوات ہے اور بہ آسانی حل کی جاسکتی ہے۔ (1) کا حل دیا گیا ہے

$$y e^{\frac{t}{40}} = 200 e^{\frac{t}{40}} + C \text{ یا } y\,(t) = 200 + C\ e^{-\frac{t}{40}} \quad ...(2)$$

جہاں C تکمل کا مستقل ہے

نوٹ کر لیجیے کہ جبکہ $t = 0$ ہے، $y = 250$ ہو گا۔ اس لیے $250 = 200 + C$

یا $C = 50$

تب '2' کم ہو جاتی ہے

$$y = 200 + 50\ e^{-\frac{t}{40}} \quad ...(3)$$

یا
$$\frac{y-200}{50} = e^{-\frac{t}{40}}$$

یا
$$e^{\frac{t}{40}} = \frac{50}{y-200}$$

$$t = 40 \log_e \left(\frac{50}{y-200} \right) \quad ...(4)$$

اس طرح مساوات (4) وقت t دیتی ہے جن پر ٹینک میں نمک کی تعداد y کلوگرام ہے۔

قدم 4 کیونکہ $e^{-\frac{t}{40}}$ ہمیشہ مثبت ہوتا ہے، مساوات 3 سے، ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ تمام وقت $y>200$ ہے۔ اس لیے ٹینک میں نمک کی کم سے کم مقدار 200 کلوگرام ہے۔

ساتھ ہی، (4) سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ $t>0$ ہوگا اگر اور صرف اگر $50 < 200 - y < 0$ ہے یعنی، اگر صرف اگر $250 > y > 200$ یعنی، نمک کی مقدار ٹینک میں اندر آنے والے نمک کے پانی کے بہاؤ اور باہر جانے والے بہاؤ کے شروع ہونے کے بعد 200 کلوگرام اور 250 کلوگرام ہے۔

ریاضیاتی ماڈلنگ کی حدود

آج تک بہت سے ریاضیاتی ماڈل بنائے جا چکے ہیں اور ہزاروں حالتوں میں کامیابی کے ساتھ سمجھنے میں لاگو کئے جا چکے ہیں۔ کچھ مضامین مثال کے طور پر ریاضیاتی فزکس، ریاضیاتی اکنامکس، آپریشنل ریسرچ، بائیو۔ ریاضی وغیرہ وغیرہ سب کے سب ریاضیاتی ماڈلنگ کے لیے ایک جیسے ہیں۔

لیکن ابھی بھی ایسے بہت سے حالات ہیں جہاں ابھی بھی ماڈل بننے باقی ہیں۔ اس کے پیچھے یہ وجہ ہے کہ یا تو حالات بہت پیچیدہ ہو گئے ہیں یا جو ریاضیاتی ماڈل بنائے گئے ہیں وہ بہت ہی الٹے سیدھے تھے۔

طاقتور کمپیوٹرس کا بننا اور سُپر (اعلیٰ) کمپیوٹرس کے بننے سے ہمیں اس قابل بنا دیا ہے کہ بہت زیادہ حال کے لئے ہم ریاضیاتی ماڈل تیار کر سکیں۔ (یہاں تک کے پیچیدہ سے پیچیدہ حالات کے لیے) اس طرح کی تیز اور جدید کمپیوٹرس کی وجہ سے یہ ممکن ہو سکتا ہے کہ زیادہ حقیقت پسند ماڈل تیار کئے جا سکیں جو کہ مشاہدوں کے ساتھ بہتر مطابقت دے سکیں۔

حالانکہ، ہمارے پاس بہت سے پیرامیٹر / متغیروں کے چننے کے لیے بہتر گائیڈ لائینس نہیں ہیں اور ساتھ ہی ان پیرامیٹرس / متغیروں کی قدروں کا حساب لگانے کے لیے جو کہ ریاضیاتی ماڈل میں استعمال کئے جاتے ہیں۔ حقیقت میں، ہم پانچ یا چھ پیرامیٹرس / متغیر بن کر ایک مناسب صحیح ماڈل بنا سکتے ہیں جن میں کسی بھی اعداد و شمار کو فٹ کیا جا سکے۔

بڑے اور پیچیدہ حالات میں ریاضیاتی ماڈلنگ کے کچھ خاص اپنے مسائل ہیں۔ اس طرح کے حالات عام طور پر دنیا کی آب ہوا کا مطالعہ کرنے کے ماڈل میں، سمندری معلومات کرنے کے ماڈل میں، آلودگی کنٹرول کرنے والے ماڈل میں وغیرہ وغیرہ۔ ریاضیاتی ماڈل بنانے والے تمام شعبوں، ریاضی، کمپیوٹر سائنس، فزکس انجینئرنگ، سوشل سائینس وغیرہ وغیرہ شامل ہیں۔ ہمت کے ساتھ اس طرح کی چنیوتیاں کا سامنے کرنے کے لئے۔