باب **9**

5260CH09

تفرقی مساواتیں
(DIFFERENTIAL EQUATIONS)

ایک انسان جو اپنے دماغ میں بغیر معین مسئلہ کے جانے ہوئے اسے حل کرنے کے طریقے کی تلاش کرتا ہے وہ زیادہ تر پریشانی کی تلاش میں رہتا ہے۔ ڈی. ہلبرٹ

تعارف (Introduction)

گیارھویں جماعت اور اس کتاب کے پانچویں باب میں، ہم نے اس پر بحث کی ہے کہ کس طرح ایک تفاعل کا ایک غیر تابع متغیر کو مدنظر رکھتے ہوئے تفرق کریں گے یعنی، ایک دیے ہوئے تفاعل f کا اس کی تعریف کے علاقہ میں ہر ایک x پر کس طرح $f'(x)$ معلوم کیا جاتا ہے۔ اس کے آگے تکملہ احصا کے باب میں ہم نے یہ بحث کی ہے کہ کس طرح ایک تفاعل f کو معلوم کرنا ہے جس کا مشتق تفاعل g ہے، اور جس کا ضابطہ ذیل کی طرح بھی لکھا جا سکتا ہے:

ہنری پوائین کیر (Henri Poincare)
(1854–1912)

ایک دیے ہوئے تفاعل g کے لیے، ایک تفاعل f معلوم کیجیے تا کہ

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \text{ جہاں، } y = f(x) \qquad \text{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(1) کی طرح کی مساوات کو تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ ایک باقاعدہ تعریف بعد میں دی جائے گی۔

اس طرح استعمال کی مساواتیں کی بہت سی قسمیں ہوتی ہیں، جیسے طبیعات، علم کیمیا، حیاتیات، بشریات، عرضیات، معاشیات وغیرہ۔ اس لیے، تفرقی مساواتوں کے بے انتہا مطالعہ نے جدید سائنسی معلومات میں اس کی اہمیت کو چار چاند لگا

دیے ہے۔

اس باب میں، ہم تفرقی مساواتوں سے ملتے جلتے کچھ بنیادی تصوروں کا مطالع کریں گے، تفرقی مساوات کے عام اور خاص حل، تفرقی مساوات کا بننا، پہلی ترتیب اور پہلے درجہ کی تفرقی مساوات کو حل کرنے کے کچھ طریقے اور تفرقی مساواتوں کے مختلف خطوں میں کچھ استعمال۔

9.2 بنیادی تصورات (Basic Concepts)

ہم پہلے ہی ذیل قسم کی مساواتوں سے واقف ہیں:

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \qquad \text{(1)}\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin x + \cos x = 0 \qquad \text{(2)}\cdots\cdots\cdots$$

$$x + y = 7 \qquad \text{(3)}\cdots\cdots\cdots$$

ہم ذیل مساوات پر غور کرتے ہیں:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{(4)}\cdots\cdots\cdots$$

ہم دیکھتے ہیں کہ (1)، (2) اور (3) مساواتوں میں غیر تابع / یا صرف تابع متغیر (متغیروں) موجود ہیں لیکن مساوات (4) میں متغیر اور ساتھ ہی قابل اعتماد متغیر y کا غیر تابع متغیر x کے ساتھ مشتق موجود ہے۔ اس طرح کی مساوات کو تفرقی مساوات کہتے ہیں۔

عام طور پر ایک مساوات جس میں تابع متغیر کا مشتق ملوث ہے، غیر تابع متغیر کو مدنظر رکھتے ہوئے ایک تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔

ایک تفرقی مساوات جس میں تابع متغیر کا مشتق صرف ایک غیر تابع متغیر کو مدنظر رکھتے ہوئے ملوث ہو ایک عام تفرقی مساوات کہلاتی ہے، مثال کے طور پر،

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \quad \text{یہ ایک عام تفرقی مساوات ہے} \qquad \text{(5)}\cdots\cdots\cdots$$

حالانکہ، اس طرح کی بھی تفرقی مساواتیں ہیں جن میں ایک سے زیادہ غیر تابع متغیروں کے مشتق ملوث ہیں۔ انہیں

جزوی تفرقی مساواتیں کہتے ہیں لیکن اس مقام پر ہمیں اپنے آپ کو عام تفرقی مساواتوں کے مطالع تک ہی محدود رکھنا ہوگا۔ اب اس کے آگے، ہم عام تفرقی مساواتوں کے لیے 'تفرقی مساوات' کا ہی استعمال کریں گے۔

نوٹ

1۔ ہم مشتق کے لیے درج ذیل علامتوں کو ترجیح دیں گے

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

2۔ اعلیٰ ترتیب کے مشتق کے لیے، بہت سے ڈیشوں کا استعمال کرنا پریشانی کا باعث ہوگا، اس لیے ہم n ترتیب مشتق کے لیے $\frac{d^ny}{dx^n}$ علامت y_n کا استعمال کریں گے۔

9.2.1 ایک تفرقی مساوات کی ترتیب (Order of a differential equation)

ایک تفرقی مساوات کی ترتیب کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے کہ یہ تابع متغیر کی وہ عظیم ترتیب ہے جو کہ دی ہوئی مساوات میں ملوث غیر تابع متغیر مدنظر رکھتے ہوئے ہے۔

درج ذیل تفرقی مساوات پر غور کیجیے

$$\frac{dy}{dx} = e^x \quad \text{(6)}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad \text{(7)}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 0 \quad \text{(8)}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

مساوات (6)؟ (7) اور (8) میں بالترتیب، پہلے، دوسرے اور تیسرے درجہ کے عظیم مشتق شامل ہیں۔ اس لیے، مساواتوں کی ترتیب، بالترتیب 1، 2 اور 3 ہیں۔

9.2.2 ایک تفرقی مساوات کا درجہ (Degree of a differential equation)

ایک تفرقی مساوات کے درجہ کا مطالعہ کرنے کے لیے، اہم نقطہ یہ ہے کہ تفرقی مساوات مشتق میں ایک کثیر رکنی ہونی چاہیے، یعنی، y''' ، y'' ، y' وغیرہ وغیرہ۔ ذیل تفرقی مساواتوں پر غور کیجیے۔

$$\frac{d^3y}{dx^3}+2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\frac{dy}{dx}+y=0 \quad \text{(9)}\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)-\sin^2 y=0 \quad \text{(10)}\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy}{dx}+\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)=0 \quad \text{(11)}\ldots\ldots\ldots$$

ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ مساوات(9)، y''' ، y'' اور y' میں ایک کثیر رکنی ہے، مساوات (10) y' میں ایک کثیر رکنی ہے (تا کہ y میں ایک کثیر رکنی)۔ اس طرح کی مساواتوں کے درجہ بیان کیے جا سکتے ہیں۔ لیکن مساوات (11)، y' میں ایک کثیر رکنی مساوات نہیں ہے اور اس طرح کی تفرقی مساواتوں کی ڈگری کو بیان نہیں کیا جا سکتا۔

ایک تفرقی مساوات کی ڈگری سے، جب کہ یہ مشتق میں کثیر رکنی ہے، ہمارا مطلب ہے عظیم طاقت (مثبت تکملہ طاقت) دی ہوئی تفرقی مساوات میں مشتق کی عظیم ترتیب۔

مندرجہ بالا تعریف کے حوالے سے، یہ مشاہدہ کیا جا سکتا ہے کہ تفرقی مساواتیں(6)، (7)، (8) اور (9) ہر ایک کا درجہ ایک ہے، مساوات(10) دو درجہ کی ہے جب کہ مساوات (11) کا درجہ بیان نہیں کیا گیا ہے۔

نوٹ: ایک تفرقی مساوات کی ترتیب درجہ ہمیشہ مثبت صحیح عدد ہوتا ہے (اگر بیان کیا گیا ہو)۔

مثال 1: ہر ایک ذیل تفرقی مساوات کی ترتیب اور درجہ اگر معرف ہو تو معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{dy}{dx}-\cos x=0$ (ii) $xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0$

(iii) $y'''+y^2+e^{y'}=0$

حل:

(i) موجودہ تفرقی مساوات میں عظیم ترتیب والا مشتق $\frac{dy}{dx}$ ہے، اس لیے اس کی ترتیب ایک ہے۔ یہ y' میں ایک کثیر رکنی مساوات ہے اور عظیم طاقت $\frac{dy}{dx}$ تک پہنچنے کے لیے ایک ہے، اس لیے اس کا درجہ ایک ہے۔

(ii) دی ہوئی تفرقی مساوات میں عظیم ترتیب والا مشتق $\frac{d^2y}{dx^2}$ ہے، اس لیے اس کی ترتیب 'دو' ہے۔ یہ $\frac{d^2y}{dx^2}$ اور $\frac{dy}{dx}$ میں

ایک کثیر رکنی مساوات ہے اور عظیم طاقت جو $\frac{d^2y}{dx^2}$ تک پہنچتی ہے ایک ہے، اس لیے اس کا درجہ ایک ہے۔

(iii) تفرقی مساوات میں عظیم ترتیب مشتق y''' موجود ہے، اس لیے اس کی ترتیب تین ہے۔ اپنے مشتق میں دی ہوئی تفرقی مساوات ایک کثیر رکنی مساوات نہیں ہے اور اس لیے اس کا درجہ بیان نہیں کیا گیا ہے۔

مشق 9.1

مشتق 1 تا 10 میں دی ہوئی تفرقی مساواتوں کی ترتیب اور درجہ (اگر معرف ہے) معلوم کیجیے۔

1. $\frac{d^4y}{dx^4} + \sin(y''') = 0$
2. $y' + 5y = 0$
3. $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\frac{d^2s}{dt^2} = 0$
4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos 3x + \sin 3x$
6. $(y''')^2 + (y'')^3 + (y')^4 + y^5 = 0$
7. $y''' + 2y'' + y' = 0$
8. $y' + y = e^x$
9. $y'' + (y')^2 + 2y = 0$
10. $y'' + 2y' + \sin y = 0$

11۔ تفرقی مساوات $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$ کا درجہ ہے

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) معرف نہیں ہے

12۔ تفرقی مساوات $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ کی ترتیب ہے

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) معرف نہیں ہے

9.3 ایک تفرقی مساوات کے عام اور خصوصی حل
(General and Particular Solutions of a Differential Equation)

پچھلی جماعتوں میں، ہم نے ذیل قسم کی مساواتوں کو حل کیا ہے

$x^2 + 1 = 0$ ....(1)

$\sin^2 x - \cos x = 0$ ....(2)

(1) اور (2) مساواتوں کے حل حقیقی یا ملتف اعداد ہیں، جو دی ہوئی مساواتوں کو مطمئن کر دیں گے، یعنی، جب اس عدد کو نامعلوم x کی جگہ بدل دیا جائے تو L.H.S، R.H.S کے برابر ہو جائے گی۔

اب تفرقی مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ پر غور کیجیے ....(3)

پہلی دو مساوات کے مقابلے میں، اس مساوات کا حل تفاعل ϕ ہے جو کہ اسے مطمئن کر دے گا، یعنی؛ جب کہ فنکشن ϕ کی نامعلوم y کے لیے (قابل متغیر) دی ہوئی مساوات میں قائم مقامی کی جائے گی تو، L.H.S، R.H.S کے برابر ہو جائے گی۔ منحنی $y = \phi(x)$ کو دی ہوئی مساوات کا منحنی حل (تکملہ منحنی) کہا جاتا ہے۔ تفاعل پر غور کیجیے جو کہ اس سے دیا گیا ہے

$$y = \phi(x) = a \sin(x + b) \quad ....(4)$$

جہاں $a, b \in R$ ۔ جب یہ تفاعل اور اس کے مشتق کی مساوات کی (3) میں قائم مقامی کی گئی ہے، تو L.H.S = R.H.S ہے۔ اس طرح یہ تفرقی مساوات (3) کا حل ہے

مان لیجیے a اور b کو کچھ خصوصی قدر، $a = 2$ اور $b = \frac{\pi}{4}$ دی گئی ہیں، تب ہمیں ایک تفاعل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = \phi_1(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad ....(5)$$

جب اس تفاعل اور اس کے مشتق کو مساوات (3) میں رکھا جاتا ہے تو پھر دوبارہ L.H.S=R.H.S ہے۔ اس لیے ϕ_1 بھی مساوات (3) کا حل ہے۔

فنکشن ϕ دو اختیاری مستقلوں (پیرامیٹرز) a، b پر مبنی ہے اور یہ دی ہوئی تفرقی مساوات کا عام حل کہلاتا ہے۔ جب کہ فنکشن ϕ_1 میں کوئی اختیاری مستقلہ موجود نہیں ہے لیکن صرف پیرامیٹرز a اور b کی خاص قدریں ہیں اور اس لیے یہ دی ہوئی مساوات کا خاص حل کہلاتا ہے۔

وہ حل جس میں اختیاری مستقلے موجود ہیں تفرقی مساوات کا عام حل (ابتدائی حل) کہلاتا ہے۔

اختیاری مستقلوں سے آزاد حل، یعنی، اختیاری مستقلوں کو خاص قدریں دینے سے جو حل حاصل ہوتا ہے، دی ہوئی مساوات کا خاص حل کہلاتا ہے۔

مثال 2: تصدیق کیجیے کہ فنکشن $y = e^{-3x}$ تفرقی مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ کا حل ہے۔

حل: $y = e^{-3x}$ دیا ہوا فنکشن ہے۔ x کی مناسبت سے مساوات کا دونوں طرف تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = -3e^{-3x} \qquad \text{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

اب (1) کا تفرق x کی مناسبت سے کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{-3x}$$

دی ہوئی مساوات میں $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{dy}{dx}$ اور y کی قدریں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{L.H.S.} = 9e^{-3x} + (-3e^{-3x}) - 6.e^{-3x} = 9e^{-3x} - 9e^{-3x} = 0 = \text{R.H.S.}$$

اس لیے دیا ہوا تفاعل، دی ہوئی مساوات کا حل ہے

مثال 3: تصدیق کیجیے کہ تفاعل $y = a\cos x + b\sin x$ ، جہاں $a,\ b \in \mathbf{R}$ ، دی ہوئی مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ کا حل ہے۔

حل: دیا ہوا تفاعل ہے

$$y = a\cos x + b\sin x \qquad \text{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

مساوات (1) کا x کی مناسبت سے کامیابی کے ساتھ دونوں طرف تفرق کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin x + b\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos x - b\sin x$$

دی ہوئی تفرقی مساوات میں $\frac{d^2y}{dx^2}$ اور y کی قدریں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{L.H.S.} = (-a\cos x - b\sin x) + (a\cos x + b\sin x) = 0 = \text{R.H.S.}$$

اس لیے دیا ہوا تفاعل دی ہوئی مساوات کا حل ہے۔

مشق 9.2

ہرایک سوال 1 تا 10 میں تصدیق کیجیے کہ دیا ہوا تفاعل (صریح یا مضمر explicit or implicit) ان کے مطابق تفرقی مساوات کا حل ہے۔

1. $y = e^x + 1$: $y'' - y' = 0$

2. $y = x^2 + 2x + C$: $y' - 2x - 2 = 0$

3. $y = \cos x + C$: $y' + \sin x = 0$

4. $y = \sqrt{1 + x^2}$: $y' = \frac{xy}{1 + x^2}$

5. $y = Ax$: $xy' = y \ (x \neq 0)$

6. $y = x\sin x$: $xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$ $(x \neq 0$ اور $x > y$ یا $x < -y)$

7. $xy = \log y + C$: $y' = \frac{y^2}{1 - xy} (xy \neq 1)$

8. $y - \cos y = x$: $(y\sin y + \cos y + x)\, y' = y$

9. $x + y = \tan^{-1} y$: $y^2 y' + y^2 + 1 = 0$

10. $y \sqrt{a^2 - x^2}\ x \in (-a, a)$: $x + y\frac{dy}{dx} = 0 \ (y \neq 0)$

11۔ چوتھی ترتیب کی ایک تفرقی مساوات کے عام حل میں اختیاری مستقلوں کی تعداد ہے

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12۔ تیسری ترتیب کی ایک تفرقی مساوات کے خاص حل میں اختیاری مستقلوں کی تعداد ہے

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

9.4 ایک تفرقی مساوات کی تشکیل جس کا عام حل دیا ہوا ہے

(Formation of a Differential Equation whose General Solution is given)

ہم جانتے ہیں کہ مساوات

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ایک دائرہ کو ظاہر کرتی ہے جس کا مرکز $(-1,2)$ اور نصف قطر '1' اکائی ہے

x کی مناسبت سے مساوات(1) کا تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

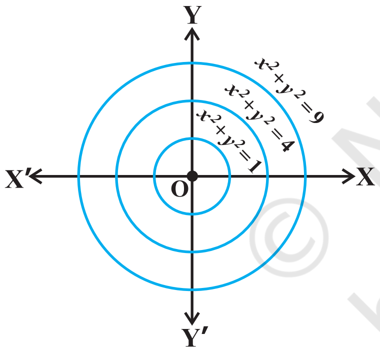
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y} (y \neq 2) \qquad \text{(2)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

جو کہ ایک تفرقی مساوات ہے۔ آپ بعد میں دیکھیں گے کہ [دیکھیے (مثال 9 سیکشن 9.5.1)] یہ مساوات دائروں کے خاندان کو ظاہر کرتی ہیں اور اس خاندان کا ایک ممبر دائرہ ہے جو کہ مساوات (1) میں دیا گیا ہے

ہمیں اس مساوات پر غور کرنا چاہیے

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{(3)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

'r' کو مختلف قدریں دینے پر، ہمیں فیملی کے مختلف ممبر حاصل ہوتے ہیں، مثال کے طور پر $x^2 + y^2 = 1$ ، $x^2 + y^2 = 4$ ، $x^2 + y^2 = 9$ وغیرہ (شکل 9.1 دیکھیے) اس طرح، مساوات (3) مبدا پر مرکز والے، ہم مرکز خاندان کو ظاہر کرتی ہے اور جس کے مختلف نصف قطر ہیں۔



شکل 9.1

ہماری دلچسپی اس طرح کی تفرقی مساوات معلوم کرنے میں ہے جو کہ ہر فیملی کے ممبر سے مطمئن ہو۔ تفرقی مساوات 'r' سے مبرہ ہونی چاہیے کیونکہ 'r' فیملی کے ہر مختلف ممبر کے لیے مختلف ہے۔ یہ مساوات x کی مناسبت سے مساوات (3) کا تفرق کرنے پر حاصل ہوتی ہے، یعنی،

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{یا} \quad x + y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{(4)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

جو کہ مساوات (3) کے ذریعے دیے ہوئے ہم مرکز کے خاندان کو ظاہر کرتی ہے۔

دوبارہ ہم ذیل مساوات پر غور کرتے ہیں

$$y = mx + c \qquad \text{(5)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

پیرامیٹرز m اور c کو مختلف قدریں دینے پر ہمیں خاندان کے مختلف ممبر حاصل ہوتے ہیں، یعنی،

$$y = x \qquad (m = 1, \ c = 0)$$

$$y = \sqrt{3}\,x \qquad (m = \sqrt{3}, \ c = 0)$$

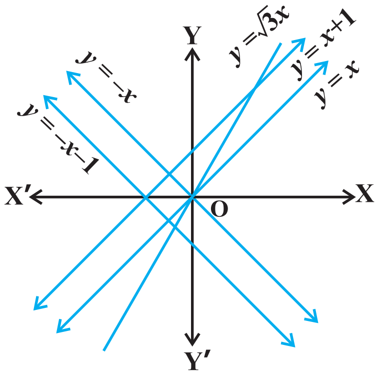
$$y = x + 1 \qquad (m = 1,\ c = 1)$$

$$y = -x \qquad (m = -1,\ c = 0)$$

$$y = -x - 1 \qquad (m = -1,\ c = -1)$$ وغیرہ (شکل 9.2 دیکھیے)

اس طرح، مساوات (5) سیدھے خطوط کے خاندان کو ظاہر کرتی ہے، جہاں m، c پیرامیٹرز ہیں۔

اب ہماری دلچسپی ایک تفرقی مساوات معلوم کرنے میں ہے جو کہ خاندان کے ہر ممبر سے مطمئن ہے۔ اس کے آگے، مساوات m اور c سے مبرّہ ہونی چاہیے کیونکہ m اور c خاندان کے مختلف افراد کے لیے مختلف ہے۔ یہ مساوات (5) کو x کی مناسبت سے دو بار تفرق کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔



شکل 9.2

$$\frac{dy}{dx} = m \quad \text{اور} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \text{(6)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

مساوات (6) مساوات (5) کے ذریعے دیے گئے سیدھے خطوط کے خاندان کو ظاہر کرتی ہے۔

یہ بات ذہن نشین کر لیجیے کہ مساوات (3) اور (5) بالترتیب مساوات (4) اور (6) کے عام حل ہیں۔

9.4.1 ایک تفرقی مساوات کو بنانے کا طریقہ جو کہ منحنیوں کے خاندان کو ظاہر کرتی ہے (Procedure to from a differential equation that will represent a given family of curves)

(a) اگر دی ہوئی منحنیوں کا خاندان F_1 ایک پیرامیٹر پر مبنی ہے تب یہ اس شکل کی مساوات سے ظاہر کی جاتی ہے۔

$$F_1(x, y, a) = 0 \qquad \text{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

مثال کے طور پر مکافیوں $y^2 = ax$ کا خاندان ایک مساوات سے جو کہ $f(x, y, a) : y^2 = ax$ کی شکل کی ہے سے ظاہر کی جاسکتی ہے

مساوات (1) کا 'x' کی مناسبت سے تفرق کرنے پر ہمیں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جس میں y'، y، x اور a ملوث ہے، یعنی،

$$g(x, y, y', a) = 0 \qquad \text{(2)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

تب مطلوبہ تفرقی مساوات، (1) اور (2) مساواتوں میں سے 'a' کو خارج کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad \text{.........(3)}$$

(b) اگر دی ہوئی منحنیوں F_2 کا خاندان پیرامیٹرز a, b (مان لیجیے) پر مبنی ہیں تب یہ اس طرح کی ایک مساوات سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$F_2(x, y, a, b) = 0 \quad \text{.........(4)}$$

x، کو مدنظر رکھتے ہوئے مساوات (4) کا تفرق کرنے پر، ہمیں ایک مساوات جس میں y' ، x ، y ، a ، b ملوث ہیں حاصل ہوتی ہے، یعنی.،

$$g(x, y, y', a, b) = 0 \quad \text{.........(5)}$$

لیکن دو مساواتوں سے پیرامیٹرز a اور b کو خارج کرنا ممکن نہیں ہے اور اس لیے، ہمیں ایک تیسری مساوات کی ضرورت ہوتی ہے۔ x کی مناسبت سے اس طرح کا رشتہ حاصل کرنے کے لیے مساوات (5) کا تفرق کرنے پر یہ مساوات حاصل ہوئی ہے،

$$h(x, y, y', y'', a, b) = 0 \quad \text{.........(6)}$$

مساوات (4)، (5) اور (6) سے a اور b کو خارج کرنے سے مطلوب تفرقی مساوات حاصل ہو جاتی ہے، اس طرح

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad \text{.........(7)}$$

نوٹ منحنیوں کے ایک خاندان کی تفرقی مساوات کی ترتیب بالکل ایسی ہی ہے جیسے کہ منحنیوں کے خاندان کے مطابق مساوات میں اختیاری مستقلوں کی تعداد

مثال 4: ایک تفرقی مساوات بنائیے جو کہ منحنیوں $y = mx$ کے خاندان کو ظاہر کرتی ہے، جہاں m ایک اختیاری مستقلہ ہے۔

حل: ہمارے پاس ہے

$$y = mx \quad \text{.........(1)}$$

x کی مناسبت سے مساوات (1) کا دونوں طرف تفرق کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = m$$

مساوات (1) میں m کی قدر رکھنے پر ہمیں حاصل $y = \frac{dy}{dx} \cdot x$ ہوتا ہے

یا $$x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

جوکہ پیرامیٹر m سے مبرّ ہ ہے اور اس لیے یہ مطلوبہ تفرقی مساوات ہے

مثال 5: ایک تفرقی مساوات بنایئے جو کہ منحنی $y = a\sin(x+b)$ کے خاندان کو ظاہر کرتی ہے، جہاں a، b اختیاری مستقلہ ہیں۔

حل: ہمارے پاس ہے

$$y = a\sin(x+b) \quad \text{.........(1)}$$

x کی مناسبت سے مساوات (1) کا دونوں طرف کامیابی سے تفرق کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

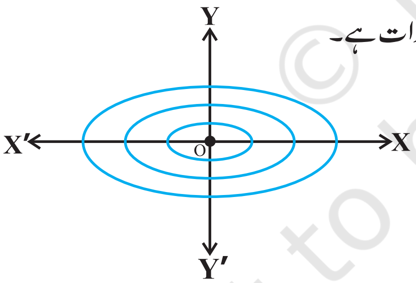
$$\frac{dy}{dx} = a\cos(x+b) \quad \text{.........(2)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\sin(x+b) \quad \text{.........(3)}$$

(1)، (2) اور (3) سے a اور b کو خارج کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad \text{.........(4)}$$

جو کہ اختیاری مستقلوں a اور b سے آزاد ہیں اور اس طرح یہ مطلوبہ تفرقی مساوات ہے۔



شکل 9.3

مثال 6: ایک تفرقی مساوات بنایئے جو کہ ناقصوں کے خاندان کو ظاہر کررہی ہے اور جس کا ماسکہ (foci) x– محور پر اور مرکز مبدہ پر ہے

حل: ہم بتائی گئی ناقص کے خاندان کی مساوات کو جانتے ہیں (دیکھیے شکل 9.3) جو کہ ہے

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{.........(1)}$$

x کی مناسبت سے مساوات (1) کا تفرق کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$

یا $$\frac{y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-b^2}{a^2} \quad \text{.........(2)}$$

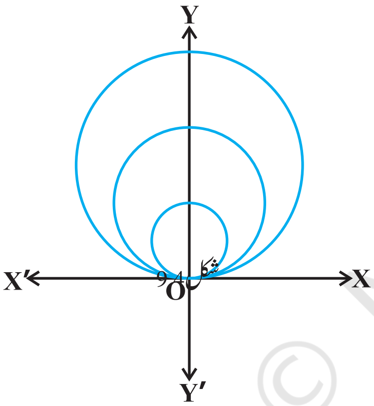
x کی مناسبت سے مساوات (2) کا دونوں طرف تفرق کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\left(\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}\right)\frac{dy}{dx}=0$$

یا
$$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{(3)}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

جو کہ مطلوبہ متفرق مساوات ہے۔

مثال 7: دائروں کے خاندان کی تفرقی مساوات بنائیے جو کہ x-محور کو مبدہ پر چھورہی ہے۔



شکل 9.4

حل: مان لیجیے دائروں کے خاندان کو C سے ظاہر کیا جاتا ہے جو کہ x-محور کو مبدہ پر چھورہی ہے۔ مان لیجیے کسی بھی خاندان کے افراد کے مختص مرکز پر (o,a) ہیں۔ (شکل 9.4 دیکھیے) اس لیے خاندان C کی مساوات ہے

$$x^2+(y-a)^2=a^2 \qquad \text{(1)}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

یا
$$x^2+y^2=2ay$$

جہاں a ایک اختیاری مستقلہ ہے۔ x کی مناسبت سے مساوات (1) کا دونوں طرف تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=2a\frac{dy}{dx}$$

یا
$$x+y\frac{dy}{dx}=a\frac{dy}{dx} \quad \text{یا} \quad a=\frac{x+y\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx}} \qquad \text{(2)}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

a کی قدر (2) سے (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x^2+y^2=2y\frac{\left[x+y\frac{dy}{dx}\right]}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2+y^2)=2xy+2y^2\frac{dy}{dx}$$ یا

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$ یا

یہ دائروں کی دیے ہوئے خاندان کی مطلوبہ تفرقی مساوات ہے

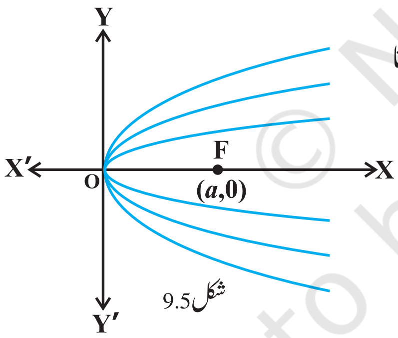
مثال 8: ایک تفرقی مساوات بنائیے جو کہ مکافیوں کے خاندان کو ظاہر کر رہی ہے اور جس کا داس مبدا پر ہے اور محور، x-محور کی مثبت سمت کے ساتھ ہے۔

حل: مان لیجیے P اوپر دیے ہوئے مکافیوں کے خاندان کو ظاہر کرتا ہے (شکل 9.5 دیکھئے) اور مان لیجیے (a,o) دیے ہوئے خاندان کے ایک فرد کا ماسکہ ہے، جہاں a ایک اختیاری مستقلہ ہے۔اس لیے خاندان P کی مساوات ہے

$$y^2=4ax \qquad \text{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

x کی مناسبت سے مساوات (1) کا دونوں طرف تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2y\frac{dy}{dx}=4a \qquad \text{(2)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$



شکل 9.5

(4a) کی قدر مساوات (2) سے مساوات (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y^2=\left(2y\frac{dy}{dx}\right)(x)$$

$$y^2-2xy\frac{dy}{dx}=0$$ یا

جو کہ دی ہوئی مکافیوں کے خاندان کی مطلوبہ تفرقی مساوات ہے۔

مشق 9.3

مشق 1 تا 5 میں دی ہوئی منحنیوں کے خاندان کو ظاہر کرتی ہوئی، a اور b اختیاری مستقلوں کو خارج کر کے ایک تفرقی مساوات بنائیے۔

1. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 2. $y^2=a(b^2-x^2)$ 3. $y=a\,e^{3x}+b\,e^{-2x}$

4. $y = e^{2x}(a + bx)$ 5. $y = e^{x}(a \cos x + b \sin x)$

6۔ دائروں کے خاندان کی ایک مساوات بنائیے جو y-محور کو مبدہ پر چھورہی ہے۔

7۔ مکافیوں کے خاندان کی ایک مساوات بنائیے جس کا راس مبدہ پر ہے اور محور مثبت y-محور کے ہمراہ ہے۔

8۔ ناقصوں کے خاندان کی ایک مساوات بنائیے جس کا مساسکہ y-محور پر اور مرکز مبدہ پر ہے۔

9۔ زائدوں کے خاندان کی ایک مساوات بنائیے جس کا ماسکہ x-محور پر اور مرکز مبدہ پر ہے۔

10۔ دائروں کے خاندان کی ایک مساوات بنائیے جس کا مرکز y-محور پر اور نصف قطر 3 اکائیاں ہے۔

11۔ درج ذیل میں کن تفرقی مساواتوں کا عام حل $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ ہے؟

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ (C) $\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$ (D)

12۔ ذیل میں سے کن تفرقی مساواتوں کا خصوصی حل $y = x$ ہے؟

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = x$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + xy = x$

(C) $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = 0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + xy = 0$

9.5 پہلی ترتیب، پہلے درجہ کی تفرقی مساواتیں حل کرنے کے طریقے
(Methods of Solving First order, First Degree Differential Equations)

اس سیکشن میں ہم پہلی ترتیب، پہلے درجہ کی تفرقی مساواتوں کے حل کرنے کے تین طریقوں پر بحث کریں گے۔

9.5.1 الگ ہونے والے متغیروں کے ساتھ تفرقی مساواتیں
(Differential equations with variables separable)

ایک پہلی ترتیب۔ پہلے درجہ کی تفرق مساوات اس طرح کی ہوتی ہے

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \qquad \text{(1)}$$

اگر $F(x, y)$ کو $h(y)$ $g(x)$ حاصل ضرب کے طور پر دکھایا جاسکتا ہے، جہاں $g(x)$، x کا تفاعل ہے اور $h(y)$ y کا تفاعل ہے۔ تب تفرقی مساوات (1) کو الگ ہونے والے متغیر کی شکل کا کہا جاتا ہے۔ تب تفرقی مساوات (1) کی شکل اس طرح ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = h(y) \,.\, g(x) \qquad \text{...........(2)}$$

اگر $h(y) \neq 0$ ہے، تو متغیروں کو الگ کرتے ہوئے، (2) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x)\, dx \qquad \text{...........(3)}$$

(3) کا دونوں طرف تکمل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx \qquad \text{...........(4)}$$

اس طرح، (4) دی ہوئی تفرقی مساوات کا حل اس شکل میں مہیا کراتی ہے۔

$$\mathrm{H}(y) = \mathrm{G}(x) + \mathrm{C}$$

یہاں، $\mathrm{H}(y)$ اور $\mathrm{G}(x)$، بالترتیب $\frac{1}{h(y)}$ اور $g(x)$ کے ضد مشتق ہیں اور C اختیاری مستقلہ ہے۔

مثال 9: تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y}$، $(y \neq 2)$ کا عام حل معلوم کیجیے۔

حل: ہمارے پاس ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y} \qquad \text{...........(1)}$$

مساوات (1) میں متغیروں کو الگ کر کے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(2-y)dy = (x+1)dx \qquad \text{...........(2)}$$

مساوات (2) کا دونوں طرف تکمل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int (2-y)\, dy = \int (x+1)\, dx$$

یا $$2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + \mathrm{C}_1$$

یا $$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2\,C_1 = 0$$

یا $x^2 + y^2 + 2x - 4y + C = 0$، جہاں $\mathrm{C} = 2\mathrm{C}_1$

جو کہ مساوات (1) کا عام حل ہے

مثال 10: تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ کا عام حل معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ $1+y^2 \neq 0$ ہے، اس لیے متغیروں کو الگ کرنے پر، دی ہوئی تفرقی مساوات کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{1+x^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

مساوات (1) کا دونوں طرف تکمل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int\frac{dy}{1+y^2}=\int\frac{dx}{1+x^2}$$

یا
$$\tan^{-1}=\tan^{-1}x+C$$

جو کہ مساوات (1) کا عام حل ہے۔

مثال 11: تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}=-4xy^2$ کا خاص حل معلوم کیجیے، $y=1$ دیا گیا ہے، جب کہ $x=0$ ہے۔

حل: اگر $y\neq 0$ ہے، دی ہوئی تفرقی مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{dy}{y^2}=-4x\,dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

مساوات کا دونوں طرف تکمل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int\frac{dy}{y^2}=-4\int x\,dx$$

یا
$$-\frac{1}{y}=-2x^2+C$$

یا
$$y=\frac{1}{2x^2-C} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

مساوات (2) میں $y=1$ اور $x=0$ رکھنے پر ہمیں، $C=-1$ حاصل ہوتا ہے

اب C کی قدر مساوات (2) میں رکھنے پر، ہمیں دی ہوئی تفرقی مساوات کا خاص حل $y=\frac{1}{2x^2+1}$ کی طرح حاصل ہوتا ہے۔

مثال 12: منحنی کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ نقطہ (1 , 1) سے ہوکر گزر رہی ہے اور جس کی تفرقی مساوات $x\,dy=(2x^2+1)\,dx\ (x\neq 0)$، ہے

حل: دی ہوئی تفرقی مساوات کو اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے

$$dy^* = \left(\frac{2x^2+1}{x}\right) dx^*$$

یا
$$dy = \left(2x + \frac{1}{x}\right) dx \qquad \text{(1)}\cdots\cdots\cdots$$

مساوات (1) کا دونوں طرف تکمل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int dy = \int\left(2x + \frac{1}{x}\right) dx$$

یا
$$y = x^2 + \log|x| + C \qquad \text{(2)}\cdots\cdots\cdots$$

مساوات (2) دی ہوئی تفرقی مساوات کے منحنیوں کے خاندان کے حل کو ظاہر کرتی ہے لیکن ہماری دلچسپی خاندان کے خاص فرد کی مساوات معلوم کرنے کا ہے جو کہ نقطہ (1,1) سے ہوکر گزر رہی ہے۔ اس لیے مساوات (2) میں $x = 1$ ، $y = 1$ رکھنے پر، ہمیں $C = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

اب مساوات (2) میں C کی قدر رکھنے پر ہمیں مطلوبہ منحنی کی مساوات $y = x^2 + \log|x|$ کی طرح کی حاصل ہوتی ہے۔

مثال 13: ایک منحنی کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ نقطہ (2,3–) سے ہوکر گزر رہی ہے، منحنی پر مماس کا سلوپ $\frac{2x}{y^2}$ کسی بھی نقطہ (x, y) پر دیا گیا ہے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ منحنی پر مماس کا سلوپ $\frac{dy}{dx}$ سے دیا گیا ہے

اس لیے،
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2} \qquad \text{(1)}\cdots\cdots\cdots$$

متغیروں کو الگ کرنے پر، مساوات (1) اس طرح لکھی جاسکتی ہے

---

* علامت $\frac{dy}{dx}$ لیبنٹر یز کی وجہ سے بہت زیادہ لچک دار اور استعمال کے قابل ہے بہت سے حساب لگانے اور ردوبدل میں، جہاں، ہم بالکل علامتوں dy اور dx سے تعلق قائم رکھتے ہیں جیسے وہ عام اعداد تھے۔ dx اور dy کو الگ اندراج کی طرح برتاؤ کرنے پر، ہم بہت سے حل کرنے میں اور زیادہ صاف عبارت دے سکتے ہیں۔

حوالہ: تحلیل اور کیلکولس کا تعارف، حصہ 1 صفحہ 172، ریچارڈ کورنیٹ، فرس جون اینچر-ورکوں نیویارک۔

$$y^2 dy = 2x\ dx \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

مساوات (2) کا دونوں طرف تکمل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int y^2 dy = \int 2x\ dx$$

یا
$$\frac{y^3}{3} = x^2 + C \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

مساوات (3) میں $x = -2$ ، $y = 3$ رکھنے پر، ہمیں $C = 5$ حاصل ہوا ہے

C کی قدر مساوات (3) میں رکھنے پر، ہمیں مطلوبہ منحنی کی مساوات اس طرح حاصل ہوتی ہے۔

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + 5 \text{ یا } y = (3x^2 + 15)^{\frac{1}{3}}$$

مثال 14: ایک بینک میں اصل زر فی صدی شرح سالانہ سے لگاتار بڑھتی ہے۔ کتنے وقت میں 1000 روپے دوگنے ہو جائیں گے۔

حل: مان لیجیے کسی بھی وقفہ t پر اصل زر p ہے۔ دیے ہوئے مسئلہ کے مطابق

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{5}{100}\right) \times P$$

یا
$$\frac{dp}{dt} = \frac{P}{20} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

مساوات (1) میں متغیروں کو الگ کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dp}{P} = \frac{dt}{20} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

مساوات (2) کا دونوں طرف تکمل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log P = \frac{t}{20} + C_1$$

یا
$$P = e^{\frac{t}{20}} \cdot e^{C_1}$$

یا
$$P = C\ e^{\frac{t}{20}} \quad (\text{جہاں } e^{C_1} = C) \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

اب $P=1000$ ہے، جب کہ $t=0$

p اور t کی قدریں مساوات (3) میں رکھنے پر، ہمیں C=1000 حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے، مساوات (3) دیتی ہے

$$P = 1000\, e^{\frac{t}{20}}$$

مان لیجیے اصل زر کو دوگنا کرنے کے لیے t سال درکار ہیں۔ تب

$$2000 = 1000 e^{\frac{t}{20}} \Rightarrow t = 20 \log_e 2$$

مشق 9.4

سوال 1 تا 10 میں ہر ایک تفرقی مساوات کے لیے، عام حل معلوم کیجیے:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{4-y^2}\ (-2 < y < 2)$

3. $\dfrac{dy}{dx} + y = 1\ (y \neq 1)$

4. $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$

5. $(e^x + e^{-x})dy - (e^x - e^{-x})dx = 0$

6. $\dfrac{dy}{dx} = (1+x^2)(1+y^2)$

7. $y \log y\, dx - x\, dy = 0$

8. $x^5 \dfrac{dy}{dx} = -y^5$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \sin^{-1} x$

10. $e^x \tan y\, dx + (1-e^x)\sec^2 y\, dy = 0$

11 تا 14 سوالوں میں ہر ایک تفرقی مساوات کے لیے، ایک خاص حل معلوم کیجیے جو کہ دی ہوئی حالت کو مطمئن کرتا ہے:

11۔ $(x^3 + x^2 + x + 1)\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + x;\ y = 1$ ، جب کہ $x = 0$

12۔ $x(x^2-1)\dfrac{dy}{dx} = 1;\ y = 0$ ، جب کہ $x = 2$

13۔ $\cos\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = a\ (a \in \mathbf{R});\ y = 1$ ، جب کہ $x = 0$

14۔ $\dfrac{dy}{dx} = y \tan x;\ y = 1$ ، جب کہ $x = 0$

15۔ ایک منحنی کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ نقطہ (0,0) سے ہو کر گزر رہی ہے اور جس کی تفرقی مساوات

$y' = e^x \sin x$ ہے۔

16۔ تفرقی مساوات $(x+2)(y+2)\dfrac{dy}{dx} = xy$ کے لیے منحنی حل معلوم کیجیے جو کہ نقطہ $(1,-1)$ سے ہو کر گزر رہی ہے۔

17۔ منحنی کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ نقطہ $(0,-2)$ سے ہو کر گزر رہی ہے، یہ دیا ہوا ہے کہ منحنی کے کسی بھی نقطہ (x,y) پر، اس کے مماس کے سلوپ اور y۔ مختص کے نقطے کا حاصل ضرب نقطہ کے x۔ مختص کے برابر ہے۔

18۔ منحنی کے کسی بھی نقطہ (x,y) پر مماس کا سلوپ قطعہ خط کے سلوپ کا دوگنا ہے جو کہ نقطہ $(-4,-3)$ سے نقطہ اتّصال (Contal point) کو جوڑتا ہے۔ منحنی کی مساوات معلوم کیجیے جب کہ یہ دیا ہوا ہے کہ یہ $(-2,1)$ سے ہو کر گزرتی ہے۔

19۔ ایک کرہ نما غبارے کا حجم جس میں ہوا بھری جا رہی ہے ایک مستقل شرح سے بدل رہا ہے۔ اگر شروع میں اس کا نصف قطر '3' اکائیاں ہے اور '3' سیکنڈ کے بعد 6 اکائی ہے۔ غبارہ کا نصف قطر 't' سیکنڈ کے بعد معلوم کیجیے۔

20۔ ایک بینک میں، اصل زر، r فی صدی شرح سالانہ سے بڑھ رہا ہے۔ 'r' کی قدر معلوم کیجیے اگر 100 روپے 10 سال میں دوگنے ہو جاتے ہیں $(\log_e 2 = 0.6931)$

21۔ ایک بینک میں، اصل زر، 5 فی صدی شرح سالانہ سے بڑھ رہا ہے۔ اس بینک میں 1000 روپے کی رقم جمع کی گئی ہے، یہ 10 سال میں کتنی ہو جائے گی $(e^{0.5} = 1.648)$

22۔ ایک کاشتکاری میں بیکٹیریا کی گنتی 1,00,000 ہے۔ 2 گھنٹے میں ان کی تعداد 10 فی صد بڑھ گئی ہے۔ کتنے گھنٹوں میں ان کی گنتی 2,00,000 ہو جائے گی، اگر بیکٹیریا کی پیداوار کی شرح موجودہ تعداد کی مناسبت میں ہے۔

23۔ تفرقی مساوات $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$ کا عام حل ہے

(A) $e^x + e^{-y} = C$ (B) $e^x + e^y = C$

(C) $e^{-x} + e^y = C$ (D) $e^{-x} + e^{-y} = C$

9.5.2 متجانس تفرقی مساواتیں (Homogeneous differential equations)

x اور y کے مندرجہ ذیل تفاعلات پر غور کیجیے

$$F_1(x, y) = y^2 + 2xy, \quad F_2(x, y) = 2x - 3y$$

$$F_3(x, y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right) \qquad ، F_4(x, y) = \sin x + \cos y$$

اگر ہم کسی بھی غیر صفر مستقلہ **λ** کے لیے، x اور y کی بالترتیب λx اور λy سے مندرجہ بالا تفاعل میں جگہ تبدیل کریں، کسی بھی غیر صفر مستقلہ λ کے لیے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$F_1(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 (y^2 + 2xy) = \lambda^2 F_1(x, y)$$

$$F_2(\lambda x, \lambda y) = \lambda (2x - 3y) = \lambda F_2(x, y)$$

$$F_3(\lambda x, \lambda y) = \cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \lambda^0 F_3(x, y)$$

$F_4(\lambda x, \lambda y) = \sin \lambda x + \cos \lambda y \neq \lambda^n F_4(x, y)$، کسی بھی $n \in \mathbf{N}$ کے لیے

یہاں ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ فنکشن F_1 ، F_2 ، F_3 کو $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں لیکن F_4 کو اس شکل میں نہیں لکھا جا سکتا۔ یہ ذیل تعریف کی طرف لے جاتا ہے:

ایک فنکشن $F(x, y)$ کو اس وقت ایک n ڈگری کا متجانس فنکشن کہا جا سکتا ہے اگر کسی بھی غیر صفر مستقل λ کے لیے $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ ہے۔

اوپر کی مثالوں میں ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ F_1 ، F_2 ، F_3 بالترتیب درجہ 2، 1، 0 کے متجانس تفاعل ہیں لیکن F_4 ایک غیر متجانس تفاعل ہے۔

ہم یہ بھی مشاہدہ کرتے ہیں کہ

$$F_1(x, y) = x^2\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x}\right) = x^2 h_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

یا
$$F_1(x, y) = y^2\left(1 + \frac{2x}{y}\right) = y^2 h_2\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$F_2(x, y) = x^1\left(2 - \frac{3y}{x}\right) = x^1 h_3\left(\frac{y}{x}\right)$$

یا
$$F_2(x, y) = y^1\left(2\frac{x}{y} - 3\right) = y^1 h_4\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$F_3(x, y) = x^0 \cos\left(\frac{y}{x}\right) = x^0 h_5\left(\frac{y}{x}\right)$$

$F_4(x, y) \neq x^n h_6\left(\frac{y}{x}\right)$ ، کسی بھی $n \in \mathbf{N}$ کے لیے

یا $F_4(x, y) \neq y^n h_7\left(\frac{x}{y}\right)$ ، کسی بھی $n \in \mathbf{N}$ کے لیے

اس لیے، فنکشن $F(x, y)$ ایک ڈگری n کا متجانس فنکشن ہے، اگر

$$F(x, y) = x^n g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{یا}$$

$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ قسم کی ایک تفرقی مساوات متجانس کہلاتی ہے اگر $F(x, y)$ ایک صفر درجہ کا متجانس فنکشن ہے

اس قسم کی ایک متجانس مساوات حل کرنے کے لیے ہم

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{...........}(1)$$

ہم $y = vx$ رکھتے ہیں۔ ....(2)

x کی مناسبت سے مساوات (2) کا تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \text{...........}(3)$$

$\frac{dy}{dx}$ کی قدر مساوات (3) سے مساوات (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$

یا

$$x\frac{dv}{dx} = g(v) - v \quad \text{...........}(4)$$

مساوات (4) میں متغیروں کو الگ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \quad \text{...........}(5)$$

مساوات (5) کا دونوں طرف تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int \frac{dv}{g(v) - v} = \int \frac{1}{x}dx + C \quad \text{...........}(6)$$

جب ہم v کو $\frac{y}{x}$ سے بدلتے ہیں تو مساوات (6) تفرقی مساوات (1) کا عام حل (ابتدائی) حل دیتی ہے۔

نوٹ اگر متجانس تفرقی مساوات $\frac{dx}{dy} = F(x, y)$ قسم کی ہے، جہاں $F(x,y)$ ایک صفر درجہ کا متجانس تفاعل ہے، تب ہم $\frac{x}{y} = v$, ie., $x = vy$ رکھتے ہیں اور پھر عام حل معلوم کرنے کے لیے اسی طرح آگے بڑھتے ہیں جیسا کہ اوپر بحث و مباحثہ کیا گیا ہے۔ $\frac{dx}{dy} = F(x, y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$ لکھ کر۔

مثال 15 دکھایئے کہ تفرقی مساوات $(x - y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ ایک متجانس ہے اور اسے حل کیجیے۔

حل: دی ہوئی مساوات کو اس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x-y} \qquad \text{(1)}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

مان لیجیے

$$F(x, y) = \frac{x+2y}{x-y}$$

اب

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda(x+2y)}{\lambda(x-y)} = \lambda^0 \cdot f(x, y)$$

اس لیے، $F(x, y)$ صفر درجہ کا ایک متجانس فنکشن ہے۔ اس لیے دی ہوئی مساوات ایک مساوات ہے

متبادل کے طور پر،

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1+\frac{2y}{x}}{1-\frac{y}{x}}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{(2)}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

تفرقی مساوات (2) کی R.H.S، $g\left(\frac{y}{x}\right)$ قسم کی ہے اور اس لیے یہ صفر درجہ کا متجانس تفاعل ہے۔ اس لیے مساوات (1) ایک ہم قسم تفرقی مساوات ہے۔ اسے حل کرنے کے لیے ہم

$y = vx$ رکھتے ہیں۔ $\qquad$ (3)............

x کی مناسبت سے مساوات (3) کا تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \text{(4)}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y اور $\dfrac{dy}{dx}$ کی قدریں مساوات (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v}$$

یا
$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v} - v$$

یا
$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+v+1}{1-v}$$

یا
$$\frac{v-1}{v^2+v+1}dv = \frac{-dx}{x} \qquad \text{...........(5)}$$

مساوات (5) کا دونوں طرف تکمل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int \frac{v-1}{v^2+v+1}dv = -\int \frac{dx}{x}$$

یا
$$\frac{1}{2}\int \frac{2v+1-3}{v^2+v+1}dv = -\log|x| + C_1$$

یا
$$\frac{1}{2}\int \frac{2v+1}{v^2+v+1}dv - \frac{3}{2}\int \frac{1}{v^2+v+1}dv = -\log|x| + C_1$$

$$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dv = -\log|x| + C_1$$

یا
$$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1| - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) = -\log|x| + C_1$$

یا
$$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1| + \frac{1}{2}\log x^2 = \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) + C_1 \qquad \text{(کیوں؟)}$$

v کو $\dfrac{y}{x}$ سے بدل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1\right| + \frac{1}{2}\log x^2 = \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right) + C_1$$

یا
$$\frac{1}{2}\log\left|\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1\right)x^2\right| = \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right) + C_1$$

یا $$\log\left|(y^2+xy+x^2)\right| = 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+2C_1$$

یا $$\log\left|(x^2+xy+y^2)\right| = 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2y}{\sqrt{3}x}\right)+C$$

جو کہ تفرقی مساوات (1) کا عام حل ہے

مثال 16: واضح کیجیے کہ تفرقی مساوات $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x$ ایک متجانس ہے اور اسے حل کیجیے۔

حل: دی گئی تفرقی مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \text{(1)}\cdots\cdots\cdots$$

یہ $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ قسم کی تفرقی مساوات ہے

یہاں $$F(x,y) = \frac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

x کو λx اور y کو λy سے منتقل پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda\left[y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x\right]}{\lambda\left(x\cos\frac{y}{x}\right)} = \lambda^0\left[F(x,y)\right]$$

اس طرح $F(x, y)$ ایک صفر درجہ کا متجانس تفاعل ہے

اس لیے، دی ہوئی تفرقی مساوات ایک ہم قسم مساوات ہے۔

اسے حل کرنے کے لیے ہم ذیل میں

$y = vx$ رکھتے ہیں۔ $\qquad$ (2)$\cdots\cdots\cdots$

x کی مناسبت سے مساوات (2) کا تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \text{(3)}............$$

y اور $\frac{dy}{dx}$ کی قدریں مساوات (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + 1}{\cos v}$$

یا $$x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + 1}{\cos v} - v$$

یا $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos v}$$

یا $$\cos v \; dv = \frac{dx}{x}$$

اس لیے $$\int \cos v \; dv = \int \frac{1}{x} dx$$

یا $$\sin v = \log|x| + \log|C|$$

یا $$\sin v = \log|Cx|$$

v کو $\frac{y}{x}$ سے بدلنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log|Cx|$$

جو کہ تفرقی مساوات (1) کا عام حل ہے

مثال 17: دکھایئے کہ تفرقی مساوات $2y\, e^{\frac{x}{y}} dx + \left(y - 2x\, e^{\frac{x}{y}}\right) dy = 0$ متجانس ہے اور اس کا خاص حل معلوم کیجیے، دیا گیا ہے کہ $x = 0$ ہے جب کہ $y = 1$ ہے

حل: دی ہوئی تفرقی مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x\, e^{\frac{x}{y}} - y}{2y\, e^{\frac{x}{y}}} \qquad \text{(1)}............$$

مان لیجیے $\quad F(x,y) = \dfrac{2xe^{\frac{x}{y}} - y}{2ye^{\frac{x}{y}}}$

تب $\quad F(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{\lambda\left(2xe^{\frac{x}{y}} - y\right)}{\lambda\left(2ye^{\frac{x}{y}}\right)} = \lambda^0 [F(x,y)]$

اس طرح، $F(x,y)$ صفر درجہ کا متجانس تفاعل ہے۔ اس لیے دی ہوئی تفرقی مساوات ایک متجانس تفرقی مساوات ہے۔ اسے حل کرنے کے لیے ہم ذیل میں

$x = vy$ رکھتے ہیں۔

(2)............

x کی مناسبت سے مساوات (2) کا تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$

x اور $\dfrac{dx}{dy}$ کی قدریں مساوات (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\,e^v - 1}{2e^v}$$

یا $\quad y\dfrac{dv}{dy} = \dfrac{2v\,e^v - 1}{2e^v} - v$

یا $\quad y\dfrac{dv}{dy} = -\dfrac{1}{2e^v}$

یا $\quad 2e^v\,dv = \dfrac{-dy}{y}$

یا $\quad \int 2e^v \cdot dv = -\int \dfrac{dy}{y}$

یا $\quad 2e^v = -\log|y| + C$

v کو $\dfrac{x}{y}$ سے بدلنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2e^{\frac{x}{y}} + \log|y| = C \qquad \text{(3)} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

مساوات(3) میں $x = 0$ اور $y = 1$ رکھنے پر،ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2e^0 + \log|1| = C \Rightarrow C = 2$$

C کی قدر مساوات(3) میں رکھنے پر،ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2e^{\frac{x}{y}} + \log|y| = 2$$

جوکہ دی ہوئی تفرقی مساوات کا خاص حل ہے

مثال 18: دکھایئے کہ منحنیوں کی فیملی جس کے لیے مماس کا سلوپ کسی بھی نقطہ (x, y) پر $\frac{x^2 + y^2}{2xy}$ ہے، $x^2 - y^2 = cx$ ہے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ منحنی کے کسی بھی نقطہ پر مماس کا سلوپ $\frac{dy}{dx}$ ہے

اس لیے
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

یا
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{2y}{x}} \qquad \text{(1)} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

صاف طور پر(1) ایک متجانس تفرقی مساوات ہے۔اسے حل کرنے کے لیے،ہم ذیل میں $y = vx$ رکھتے ہیں۔

x کی مناسبت سے $y = vx$ کا تفرق کرنے پر،ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

یا
$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2v}$$

یا
$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{2v}$$

یا $$\frac{2v}{1-v^2}dv = \frac{dx}{x}$$

یا $$\frac{2v}{v^2-1}dv = -\frac{dx}{x}$$

اس لیے $$\int\frac{2v}{v^2-1}dv = -\int\frac{1}{x}dx$$

یا $$\log|v^2-1| = -\log|x| + \log|C_1|$$

یا $$\log|(v^2-1)(x)| = \log|C_1|$$

یا $$(v^2-1)\,x = \pm C_1$$

v کو $\frac{y}{x}$ سے منتقل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)x = \pm C_1$$

یا $$(y^2-x^2) = \pm C_1\,x$$

یا $(y^2-x^2) = \pm C_1\,x$ یا $x^2-y^2 = Cx$

مشق 9.5

1 تا 10 ہر ایک سوال میں دکھایئے کہ دی ہوئی تفرقی مساوات ہم قسم ہے اور ہر ایک کو حل کیجیے

1. $(x^2+xy)\,dy = (x^2+y^2)\,dx$
2. $y' = \dfrac{x+y}{x}$
3. $(x-y)\,dy - (x+y)\,dx = 0$
4. $(x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$
5. $x^2\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 2y^2 + xy$
6. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$
7. $\left\{x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) + y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\right\}y\,dx = \left\{y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) - x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right\}x\,dy$
8. $x\dfrac{dy}{dx} - y + x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$
9. $y\,dx + x\log\left(\dfrac{y}{x}\right)dy - 2x\,dy = 0$
10. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy = 0$

11 تا 15 سوال میں ہر ایک تفرقی مساوات کے لیے، مخصوص حل معلوم کیجیے جو کہ دی ہوئی حالت کو مطمئن کرتا ہے

11۔ $y=1$ جب کہ $x=1$؛ $(x+y)dy+(x-y)dx=0$

12۔ $y=1$ جب کہ $x=1$؛ $x^2dy+(xy+y^2)dx=0$

13۔ $y=\frac{\pi}{4}$ جب کہ $x=1$؛ $\left[x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)-y\right]dx+x\,dy=0$

14۔ $y=0$ جب کہ $x=1$؛ $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}+\operatorname{cosec}\left(\frac{y}{x}\right)=0$

15۔ $y=2$ جب کہ $x=1$؛ $2xy+y^2-2x^2\frac{dy}{dx}=0$

16۔ ایک متجانس تفرقی مساوات $\frac{dx}{dy}=h\left(\frac{x}{y}\right)$ ذیل میں دیے گیے بدل کو رکھ کر حل کی جا سکتی ہے۔

(A) $y=vx$ (B) $v=yx$ (C) $x=vy$ (D) $x=v$

17۔ ذیل میں سے کون سی ایک متجانس تفرقی مساوات ہے؟

(A) $(4x+6y+5)\,dy-(3y+2x+4)\,dx=0$

(B) $(xy)\,dx-(x^3+y^3)dy=0$

(C) $(x^3+2y^2)\,dx+2xy\,dy=0$

(D) $y^2dx+(x^2-xy-y^2)dy=0$

9.5.3 خطی تفرقی مساواتیں (Linear differential equations)

ایک تفرقی مساوات

$$\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}y=Q$$

کی شکل کی جہاں P اور Q مستقلہ ہیں یا صرف x کے تفاعل ہیں، ایک پہلی ترتیب خطی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔ پہلی ترتیب خطی تفرقی مساوات کی کچھ مثالیں یہ ہیں۔

$$\frac{dy}{dx}+y=\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{x}\right)y=e^x$$

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{y}{x\log x}\right)=\frac{1}{x}$$

ایک دوسری ترتیب والی خطی تفرقی مساوات اس شکل کی ہے

$$\frac{dx}{dy}+P_1x=Q_1$$

جہاں P_1 اور Q_1 مستقل ہیں یا صرف y کے تفاعل ہیں۔اس طرح کی تفرقی مساوات کی کچھ مثالیں یہ ہیں۔

$$\frac{dx}{dy}+x=\cos y$$

$$\frac{dx}{dy}+\frac{-2x}{y}=y^2e^{-y}$$

پہلی ترتیب والی خطی تفرقی مساوات کو حل کرنے کے لیے جو کہ اس شکل کی ہے

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \qquad \text{(1)}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

مساوات (1) کو دونوں طرف ایک x کے تفاعل سے ضرب کیجیے، مان لیجیے وہ $g(x)$ ہے، یہ حاصل کرنے کے لیے

$$g(x)\frac{dy}{dx}+P.(g(x))y=Q.g(x) \qquad \text{(2)}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

کو اس طرح چنیے تا کہ R.H.S، $y.g(x)$ کا مشتق بن جائے

یعنی، $$g(x)\ \frac{dy}{dx}+P.g(x)\ y=\frac{d}{dx}\ [y.g\ (x)]$$

یا $$g(x)\frac{dy}{dx}+P.g(x)\ y=g(x)\frac{dy}{dx}+y\ g'(x)$$

$$P.g(x)=g'(x)$$

یا $$P=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

x کی مناسبت سے دونوں طرف کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int P dx=\int\frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$$

یا $\quad \int P \cdot dx = \log(g(x))$

یا $\quad g(x) = e^{\int P\, dx}$

مساوات (1) کو دونوں طرف $g(x) = e^{\int P\, dx}$ سے ضرب کرنے پر، L.H.S، x اور y کے تفاعل کا مشتق ہو جاتی ہے۔ یہ تفاعل $g(x) = e^{\int P\, dx}$ دی ہوئی تفرقی مساوات کا تکمل کرنے والا اجزائے ضربی (I.F) کہلاتا ہے۔

$g(x)$ کی قدر مساوات (2) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$e^{\int P\, dx} \frac{dy}{dx} + P e^{\int P\, dx} y = Q \cdot e^{\int P\, dx}$$

یا
$$\frac{d}{dx}\left(y\, e^{\int P dx}\right) = Q e^{\int P dx}$$

x کی مناسبت سے دونوں طرف کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y \cdot e^{\int P dx} = \int\left(Q \cdot e^{\int P dx}\right) dx$$

یا
$$y = e^{-\int P dx} \cdot \int\left(Q \cdot e^{\int P dx}\right) dx + C$$

جو کہ تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

پہلی ترتیب والی خطی تفرقی مساوات کو حل کرنے میں کیے گئے اقدامات

(Steps involved to solve first order linear differential equation)

(i) دی ہوئی تفرقی مساوات کو $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ کی شکل میں لکھیے، جہاں P، Q مستقلہ ہیں یا صرف x کے تفاعل ہیں۔

(ii) تکمل کرنے والا اجزائے ضربی (I.F) معلوم کیجیے $= \text{I.F} = e^{\int P dx}$

(iii) دی ہوئی تفرقی مساوات کا حل اس طرح لکھیے

$$y(\text{I.F}) = \int\left(Q \times \text{I.F}\right) dx + C$$

اگر چہ پہلی ترتیب خطی تفرقی مساوات $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ کی قسم کی ہے، جہاں P_1 اور Q_1 مستقلہ ہیں یا صرف y کے

فنکشن ہیں تب $\text{I.F} = e^{\int P_1 dy}$ ہے اور تفرقی مساوات کا حل اس سے دیا گیا ہے

$$x.\,(\text{I.F}) = \int (Q_1 \times \text{I.F})\, dy + C$$

مثال 19: تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ کا عام حل معلوم کیجیے

حل: دی ہوئی تفرقی مساوات اس قسم کی ہے

$\frac{dy}{dx} + Py = Q$ ؛ جہاں $P = -1$ اور $Q = \cos x$ ہے

اس لیے $\text{I.F} = e^{\int -1\, dx} = e^{-x}$

مساوات کو دونوں طرف I.F سے ضرب کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y = e^{-x}\cos x$$

یا

$$\frac{dy}{dx}\left(y e^{-x}\right) = e^{-x}\cos x$$

x کی مناسبت سے دونوں طرف کا تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$y e^{-x} = \int e^{-x}\cos x\, dx + C \quad \text{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

مان لیجیے

$$I = \int e^{-x}\cos x\, dx$$

$$= \cos x\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right) - \int (-\sin x)(-e^{-x})\, dx$$

$$= -\cos x\, e^{-x} - \int \sin x\, e^{-x}\, dx$$

$$= -\cos x\, e^{-x} - \left[\sin x(-e^{-x}) - \int \cos x\,(-e^{-x})\, dx\right]$$

$$= -\cos x\, e^{-x} + \sin x\, e^{-x} - \int \cos x\, e^{-x}\, dx$$

یا

$$I = -e^{-x}\cos x + \sin x\, e^{-x} - I$$

یا

$$2I = (\sin x - \cos x)\, e^{-x}$$

یا
$$\text{I} = \frac{(\sin x - \cos x)e^{-x}}{2}$$

I کی قدر، مساوات (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ye^{-x} = \left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right)e^{-x} + \text{C}$$

یا
$$y = \left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right) + Ce^{x}$$

جو کہ دی ہوئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے

مثال 20: تفرقی مساوات $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \;(x \neq 0)$ کا عام حل معلوم کیجیے

حل: دی ہوئی تفرقی مساوات ہے

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \qquad \text{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

مساوات (1) کو دونوں طرف x سے تقسیم کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x$$

جو کہ $\frac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q}$ کی شکل کی خطی تفرقی مساوات ہے، جہاں $\text{P} = \frac{2}{x}$ اور $\text{Q} = x$ ہے

اس لیے $\text{I.F} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\log x} = e^{\log x^2} = x^2$, [کیونکہ $e^{\log f(x)} = f(x)$]

اس لیے، دی ہوئی مساوات کا حل اس سے دیا گیا ہے

$$y.x^2 = \int (x)(x^2)\,dx + \text{C} = \int x^3 dx + \text{C}$$

یا
$$y = \frac{x^2}{4} + \text{C}x^{-2}$$

جو کہ دی ہوئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

مثال 21: تفرقی مساوات $y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$ کا عام حل معلوم کیجیے۔

حل: دی ہوئی تفرقی مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y$$

یہ $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ کی قسم کی خطی تفرقی مساوات ہے جہاں $P_1 = -\frac{1}{y}$ اور $Q_1 = 2y$ ہیں۔ اس لیے

$$\text{I.F} = e^{\int -\frac{1}{y}\, dy} = e^{-\log y} = e^{\log (y)^{-1}} = \frac{1}{y}$$

اس لیے، دی ہوئی تفرقی مساوات کا حل ہے

$$x\frac{1}{y} = \int (2y)\left(\frac{1}{y}\right) dy + \text{C}$$

یا
$$\frac{x}{y} = \int (2dy) + \text{C}$$

یا
$$\frac{x}{y} = 2y + \text{C}$$

یا
$$x = 2y^2 + \text{C}y$$

جو کہ دی ہوئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے

مثال 22: دی ہوئی تفرقی مساوات کا خاص حل معلوم کیجیے

$$\frac{dx}{dy} + y\cot x = 2x + x^2 \cot x \; (x \neq 0)$$

دیا گیا ہے جب کہ $x = \frac{\pi}{2}$ ہے

حل: دی ہوئی مساوات $\frac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q}$ شکل کی ایک خطی تفرقی مساوات ہے، جہاں $\text{P} = \cot x$ اور
ہے۔ اس لیے

$$\text{I.F} = e^{\int \cot x\, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$$

اس لیے، تفرقی مساوات کا حل اس سے دیا گیا ہے

$$y \,.\, \sin x = \int (2x + x^2 \cot x) \sin x \, dx + \text{C}$$

یا
$$y \sin x = \int 2x \sin x \, dx + \int x^2 \cos x \, dx + \text{C}$$

یا $$y \sin x = \sin x\left(\frac{2x^2}{2}\right) - \int \cos x\left(\frac{2x^2}{2}\right) dx + \int x^2 \cos x \, dx + C$$

یا $$y \sin x = x^2 \sin x - \int x^2 \cos x \, dx + \int x^2 \cos x \, dx + C$$

یا $$y \sin x = x^2 \sin x + C \quad \text{......(1)}$$

مساوات (1) میں $y = 0$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C$$

یا $$C = \frac{-\pi^2}{4}$$

C کی قدر مساوات (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y \sin x = x^2 \sin x - \frac{\pi^2}{4}$$

یا $$y = x^2 - \frac{\pi^2}{4 \sin x} \quad (\sin x \neq 0)$$

جو کہ دی ہوئی تفرقی مساوات کا خاص حل ہے۔

مثال 23: منحنی کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ نقطہ (0,1) سے ہو کر گزر رہی ہے۔ اگر کسی بھی نقطہ (x, y) پر منحنی پر مماس کا سلوپ x۔مختص (abscissa) اور اسی نقطہ پر x۔مختص اور y۔مختص (Ordinate) کے حاصل جمع کے برابر ہے

حل: ہم جانتے ہیں کہ مماس کا منحنی پر سلوپ $\frac{dy}{dx}$ ہے۔

اس لیے، $$\frac{dy}{dx} = x + xy$$

یا $$\frac{dy}{dx} - xy = x \quad \text{............(1)}$$

یہ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ قسم کی خطی تفرقی مساوات ہے، جہاں $P = -x$ اور $Q = x$ ہے

اس لیے، $$\text{I.F} = e^{\int -x\,dx} = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

اس لیے، مساوات کا حل اس سے دیا گیا ہے

$$y \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} = \int (x)\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right) dx + C \qquad \text{(2)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

مان لیجیے $\quad I = \int (x)\, e^{\frac{-x^2}{2}} dx$

مان لیجیے $\frac{-x^2}{2} = t$ ہے،تب $-x\, dx = dt$ یا $x\, dx = -dt$ ہے

اس لیے، $\quad I = -\int e^t dt = -e^t = -e^{\frac{-x^2}{2}}$

I کی قدر مساوات (2) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y\, e^{\frac{-x^2}{2}} = -e^{\frac{-x^2}{2}} + C$$

یا

$$y = -1 + C\, e^{\frac{x^2}{2}} \qquad \text{(3)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

اب (3) منحنی کے خاندان کی مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔لیکن ہماری دلچسپی خاندان کے ایک خاص ممبر کو معلوم کرنے کی ہے جو کہ (0,1) سے ہو کر گزر رہا ہے۔ $x = 0$ اور $y = 1$ مساوات (3) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$1 = -1 + C.\, e^0 \quad \text{یا} \quad C = 2$$

C کی قدر مساوات (3) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = -1 + 2\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

جو کہ منحنی کی مطلوبہ مساوات ہے۔

مشق 9.6

دیے ہوئے سوال 1 تا 12 میں ہر ایک تفرقی مساوات کے لیے عام حل معلوم کیجیے۔

1. $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

2. $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$

3. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$

4. $\frac{dy}{dx} + \sec x\, y = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$

5. $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$

6. $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$

7. $x \log x \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x}\log x$

8. $(1+x^2)\, dy + 2xy\, dx = \cot\, x\, dx\ (x \neq 0)$

9. $x\dfrac{dy}{dx} + y - x + xy\cot x = 0\ \ (x \neq 0)$ 10. $(x+y)\dfrac{dy}{dx} = 1$

11. $y\, dx + (x - y^2)\, dy = 0$ 12. $(x+3y^2)\dfrac{dy}{dx} = y\ \ (y > 0)$

سوال 13 تا 15 میں ہر ایک تفرقی مساوات کے لیے ایک خاص حل معلوم کیجیے جو کہ دی ہوئی شرط کو مطمئن کرے:

13۔ ؛ $\dfrac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$ ؛ $y = 0$ جب کہ $x = \dfrac{\pi}{3}$

14۔ ؛ $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = \dfrac{1}{1+x^2}$ ؛ $y = 0$ جب کہ $x = 1$

15۔ ؛ $\dfrac{dy}{dx} - 3y\cot x = \sin 2x$ ؛ $y = 2$ جب کہ $x = \dfrac{\pi}{2}$

16۔ ایک منحنی کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ مبدء سے ہو کر گزر رہا ہے، دیا ہوا ہے کہ منحنی پر مماس کا سلوپ کسی بھی نقطہ (x, y) پر نقطہ کے مختصات کے حاصل جمع کے برابر ہے۔

17۔ ایک منحنی کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ نقطہ (o,2) سے ہو کر گزر رہی ہے، یہ دیا ہوا ہے کہ منحنی کے کسی بھی نقطہ پر مختصات کا حاصل جمع اس منحنی کے نقطہ پر مماس کے سلوپ کی قدر (Magnitude) سے 5 زیادہ ہے۔

18۔ تفرقی مساوات $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2$ کا تکمل کرنے والا اجزائے ضربی ہے

(A) e^{-x} (B) e^{-y} (C) $\dfrac{1}{x}$ (D) x

19۔ تفرقی مساوات $(1-y^2)\dfrac{dx}{dy} + yx = ay\ (-1 < y < 1)$ کا تکمل کرنے والا اجزائے ضربی ہے

(A) $\dfrac{1}{y^2-1}$ (B) $\dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ (C) $\dfrac{1}{1-y^2}$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

متفرق مثالیں

مثال 24: تصدیق کیجیے کہ تفاعل $y = c_1\, e^{ax}\cos\, bx + c_2\, e^{ax}\sin\, bx$ ، جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقلہ ہیں تفرقی مساوات $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2a\dfrac{dy}{dx} + \left(a^2 + b^2\right)y = 0$ کا حل ہے۔

حل: دیا ہوا تفاعل ہے

$$y = e^{ax}\ [c_1 \cos bx + c_2\ \sin bx] \qquad \text{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

x کی مناسبت سے مساوات (1) کا دونوں طرف تفرق کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}\left[-bc_1 \sin bx + b\,c_2 \cos bx\right] + \left[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right] e^{ax} \cdot a$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}[(b\,c_2 + a\,c_1)\cos bx + (a\,c_2 - b\,c_1)\sin bx] \qquad \text{(2)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

x کی مناسبت سے مساوات (2) کا دونوں طرف تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = e^{ax}[(b\,c_2 + a\,c_1)\,(-b\sin bx) + (a\,c_2 - b\,c_1)\,(b\cos bx)]$$

$$+[(b\,c_2 + a\,c_1)\cos bx + (a\,c_2 - b\,c_1)\sin bx]\, e^{ax}.a$$

$$= e^{ax}[(a^2\,c_2 - 2ab\,c_1 - b^2 c_2)\sin bx + (a^2\,c_1 + 2ab\,c_2 - b^2 c_1)\cos bx]$$

دی ہوئی تفرقی مساوات میں $\frac{d^2 y}{dx^2}$، $\frac{dy}{dx}$ اور y کی قدریں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{L.H.S} = e^{ax}\,[a^2 c_2 - 2abc_1 - b^2 c_2)\sin bx + (a^2 c_1 + 2abc_2 - b^2 c_1)\cos bx]$$

$$-2ae^{ax}\,[(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx]$$

$$+(a^2 + b^2)e^{ax}\,[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]$$

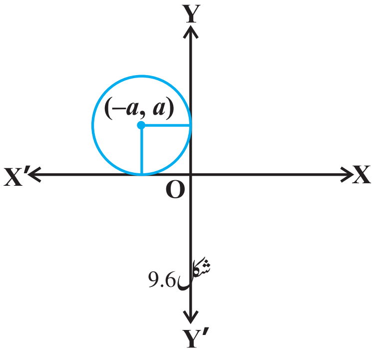
$$= e^{ax}\begin{bmatrix}\left(a^2 c_2 - 2abc_1 - b^2 c_2 - 2a^2 c_2 + 2abc_1 + a^2 c_2 + b^2 c_2\right)\sin bx \\ +(a^2 c_1 + 2abc_2 - b^2 c_1 - 2abc_2 - 2a^2 c_1 + a^2 c_1 + b^2 c_1)\cos bx\end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{ax}}[0 \times \sin \mathrm{bx} + 0 \times \cos \mathrm{bx}] = \mathrm{e}^{\mathrm{ax}} \times 0 = 0\ = \text{R.H.S}$$

اس طرح، دیا ہوا تفاعل، دی ہوئی تفرقی مساوات کا حل ہے۔

مثال 25: دوسرے ربع میں دائروں کے خاندان کی ایک تفرقی مساوات بنائیے جو کہ مختص محوروں کو چھو رہی ہو۔

حل: مان لیجیے C دوسرے ربع میں دائروں کے خاندان کو ظاہر کرتی ہے اور مختص محوروں کو چھو رہی ہے۔ مان لیجیے $(-a, a)$ اس خاندان (دیکھیے شکل 9.6) کے کسی بھی ممبر کے مرکز کے مختصات ہیں۔



شکل9.6

جو مساوات خاندان C کو ظاہر کر رہی ہے وہ یہ ہے:

$$(x+a)^2 + (y-a)^2 = a^2 \quad \text{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

یا

$$x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + a^2 = 0 \quad \text{(2)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

x کی مناسبت سے مساوات (2) کا دونوں طرف تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2a - 2a\frac{dy}{dx} = 0$$

یا

$$x + y\frac{dy}{dx} = a\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)$$

یا

$$a = \frac{x + y\,y'}{y' - 1}$$

a کی قدر مساوات (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left[x + \frac{x + y\,y'}{y'-1}\right]^2 + \left[y - \frac{x + y\,y'}{y'-1}\right]^2 = \left[\frac{x + y\,y'}{y'-1}\right]^2$$

یا

$$[xy' - x + x + y\,y']^2 + [y\,y' - y - x - y\,y']^2 = [x + y\,y']^2$$

یا

$$(x+y)^2\,y'^2 + [x+y]^2 = [x + y\,y']^2$$

یا

$$(x+y)^2[(y')^2 + 1] = [x + y\,y']^2$$

جو کہ دیے ہوئے دائروں کے خاندان کو ظاہر کرتی ہوئی تفرقی مساوات ہے

مثال 26: تفرقی مساوات $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$ کا خاص حل معلوم کیجیے، جب کہ دیا ہوا ہے کہ $y = 0$ ہے جب $x = 0$ ہے۔

حل: دی ہوئی تفرقی مساوات کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = e^{(3x+4y)}$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x}\,.\,e^{4y} \quad \text{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

متغیروں کو الگ کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{e^{4y}} = e^{3x}\ dx$$

اس لیے $$\int e^{-4y}dy = \int e^{3x}dx$$

یا $$\frac{e^{-4y}}{-4} = \frac{e^{3x}}{3} + \mathrm{C}$$

یا $$4\ e^{3x} + 3\ e^{-4y} + 12\ \mathrm{C} = 0 \qquad \text{(2)}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$x = 0$ اور $y = 0$ کو مساوات (2) میں رکھنے پر حاصل ہوتا ہے

یا $4 + 3 + 12\ \mathrm{C} = 0$

C کی قدر مساوات (2) رکھنے پر حاصل ہوتا ہے

$$4e^{3x} + 3e^{-4y} - 7 = 0$$

جو کہ دی ہوئی مساوات کا خاص حل ہے۔

مثال 27: تفرقی مساوات کو حل کیجیے

$$(x\ dy - y\ dx)\ y\ \sin\left(\frac{y}{x}\right) = (y\ dx\ +\ x\ dy)\ x\ \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

حل: دی ہوئی تفرقی مساوات کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$\left[x\,y\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]dy = \left[xy\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx$$

یا $$\frac{dy}{dx} = \frac{xy\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{xy\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

R.H.S میں شمار کنندہ اور نسب نما کو x^2 سے تقسیم کرنے، پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)-\cos\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \text{(1)}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

صاف طور پر، مساوات (1)، $\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$ کی شکل کی ہم قسم تفرقی مساوات ہے۔

اسے حل کرنے کے لیے، ہم مندرجہ ذیل میں

$y = vx$ میں رکھتے ہیں $\qquad$ (2)…………

یا $\qquad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

یا $\qquad v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v\cos v+v^2\sin v}{v\sin v-\cos v}$ $\qquad$ ((1) اور (2) کا استعمال کرنے پر)

یا $\qquad x\frac{dv}{dx}=\frac{2v\cos v}{v\sin v-\cos v}$

یا $\qquad \left(\frac{v\sin v-\cos v}{v\cos v}\right)dv=\frac{2\,dx}{x}$

اس لیے

یا $\qquad \int\tan v\,dv-\int\frac{1}{v}\,dv=2\int\frac{1}{x}\,dx$

یا $\qquad \log|\sec v|-\log|v|=2\log|x|+\log|C_1|$

یا $\qquad \log\left|\frac{\sec v}{v\,x^2}\right|=\log|C_1|$

یا $\qquad \frac{\sec v}{v\,x^2}=\pm C_1$ $\qquad$ (3)…………

مساوات (3) میں v کو $\frac{y}{x}$ سے بدلنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\sec\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)(x^2)}=C$$ ، جہاں $C=\pm C_1$ ہے

یا $\sec\left(\frac{y}{x}\right) = \text{C}\ xy$

جو کہ دی ہوئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

مثال 28: تفرقی مساوات $(\tan^{-1} y - x)dy = (1+y^2)dx$ کو حل کیجیے۔

حل: دی ہوئی تفرقی مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} \qquad \text{......(1)}$$

اب (1)، $\frac{dx}{dy} + \text{P}_1 x = \text{Q}_1$ کی قسم کی خطی تفرقی مساوات ہے

جہاں، $\text{P}_1 = \frac{1}{1+y^2}$ اور $\text{Q}_1 = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$ ہیں۔

اس لیے، $\text{I.F} = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$

اس طرح، دی ہوئی تفرقی مساوات کا حل ہے

$$x e^{\tan^{-1} y} = \int \left(\frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1} y}\, dy + \text{C} \qquad \text{............(2)}$$

مان لیجیے $\text{I} = \int \left(\frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1} y}\, dy$

$\tan^{-1} y = t$ رکھنے پر، تا کہ $\left(\frac{1}{1+y^2}\right) dy = dt$ ہو، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{I} = \int t\, e^t dt = t\, e^t - \int 1 \,.\, e^t\, dt = t\, e^t - e^t = e^t (t-1)$$

یا $\text{I} = e^{\tan^{-1} y} (\tan^{-1} y - 1)$

I کی قدر مساوات (2) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x \,.\, e^{\tan^{-1} y} = e^{\tan^{-1} y} (\tan^{-1} y - 1) + \text{C}$$

یا $x = (\tan^{-1} y - 1) + \text{C}\, e^{-\tan^{-1} y}$

جو کہ دی ہوئی تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

باب 9 پر مشتمل متفرق مشق

1۔ ذیل میں دی گئی ہر ایک تفرقی مساوات کے لیے اس کی ترتیب اور درجہ ظاہر کیجیے (اگر معرف ہوں)

(i) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 6y = \log x$ (ii) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 4\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 7y = \sin x$

(iii) $\dfrac{d^4y}{dx^4} - \sin\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$

2۔ ذیل میں دی گئی ہر ایک مشق کے لیے ثابت کیجیے کہ دیا ہوا فنکشن (مضمر یا صریح) نظیری تفرقی مساوات کا حل ہے

(i) $y = a\,e^{x} + b\,e^{-x} + x^2$: $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0$

(ii) $y = e^{x}\,(a\cos x + b\sin x)$: $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(iii) $y = x\sin 3x$: $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y - 6\cos 3x = 0$

(iv) $x^2 = 2y^2 \log y$: $(x^2 + y^2)\dfrac{dy}{dx} - xy = 0$

3۔ ایک تفرقی مساوات بنائیے جو کہ منحنیوں $(x-a)^2 + 2y^2 = a^2$ کی فیملی کو ظاہر کرتی ہے، جہاں a ایک اختیاری مستقلہ ہے۔

4۔ ثابت کیجیے کہ $x^2 - y^2 = c(x^2 + y^2)^2$ تفرقی مساوات $(x^3 - 3x\,y^2)dx = (y^3 - 3x^2y)$، کا ایک عام حل ہے، جہاں C ایک پیرامیٹر ہے۔

5۔ پہلے ربع میں دائروں کے خاندان کی ایک تفرقی مساوات بنائیے جو کہ مختص محور کو چھو رہی ہے۔

6۔ تفرقی مساوات $\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ کا عام حل معلوم کیجیے۔

7۔ دکھائیے کہ تفرقی مساوات $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y^2 + y + 1}{x^2 + x + 1} = 0$ کا عام حل $(x + y + 1) = \mathrm{A}\,(1 - x - y - 2xy)$ سے دیا گیا ہے، جہاں A ایک پیرامیٹر ہے۔

8۔ منحنی کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ نقطہ $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ سے ہو کر گزر رہی ہے اور جس کی تفرقی مساوات

$\sin x \cos y \, dx + \cos x \sin y \, dy = 0$ ہے،

9۔ تفرقی مساوات $(1+e^{2x})dy + (1+y^2)\, e^x \, dx = 0$ کا خاص حل معلوم کیجیے، دیا گیا ہے کہ $y = 1$ ہے جب کہ $x = 0$ ہے۔

10۔ تفرقی مساوات $y\, e^{\frac{x}{y}} dx = \left(x\, e^{\frac{x}{y}} + y^2\right) dy \ (y \neq 0)$ کو حل کیجیے۔

11۔ تفرقی مساوات $(x-y)\,(dx+dy) = dx - dy$ کا مخصوص حل معلوم کیجیے، دیا ہوا ہے کہ $y = -1$ ہے جب کہ $x = 0$ ہے (اشارہ: $x - y = t$ رکھیے)

12۔ تفرقی مساوات $\left[\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right]\frac{dx}{dy} = 1 \ (x \neq 0)$ کو حل کیجیے۔

13۔ تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \ \operatorname{cosec} x \ (x \neq 0)$ کا ایک مخصوص حل معلوم کیجیے، دیا گیا ہے کہ $y = 0$ ہے جب کہ $x = \frac{\pi}{2}$ ہے۔

14۔ تفرقی مساوات $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2\, e^{-y} - 1$ کا ایک مخصوص حل معلوم کیجیے، دیا گیا ہے کہ $y = 0$ جب کہ $x = 0$ ہے۔

15۔ ایک گاؤں کی آبادی اس شرح سے لگاتار بڑھ رہی ہے جس نسبت سے اس کے رہنے والوں کی تعداد بڑھ رہی ہے۔ اگر 1999 میں گاؤں کی آبادی 20,000 تھی اور سال 2004 میں 25,000 تھی، 2009 میں گاؤں کی آبادی کیا ہوگی؟

16۔ تفرقی مساوات $\frac{y\,dx - x\,dy}{y} = 0$ کا عام حل ہے

(A) $xy = C$ (B) $x = Cy^2$ (C) $y = Cx$ (D)

17۔ $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ کی قسم کی تفرقی مساوات کا عام حل ہے

(A) $y\, e^{\int P_1 \, dy} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1 \, dy}\right) dy + C$

(B) $y \,.\, e^{\int P_1 \, dx} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1 \, dx}\right) dx + C$

(C) $x\,e^{\int P_1\,dy} = \int\left(Q_1 e^{\int P_1\,dy}\right)dy + C$

(D) $x\,e^{\int P_1\,dx} = \int\left(Q_1 e^{\int P_1\,dx}\right)dx + C$

18۔ تفرقی مساوات $e^x dy + (y\,e^x + 2x)\,dx = 0$ کا عام حل ہے

(A) $x\,e^y + x^2 = C$ (B) $x\,e^y + y^2 = C$

(C) $y\,e^x + x^2 = C$ (C) $y\,e^y + x^2 = C$

خلاصہ (Summary)

- تابع متغیر کی ایک مساوات جس میں مشتق شامل ہے غیر تابع متغیر (متغیروں) کو مدِنظر رکھتے ہوئے ایک تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔
- ایک تفرقی مساوات کی ترتیب اس میں موجود عظیم مشتق ایک ترتیب ہے۔
- ایک تفرقی مساوات کا درجہ اس طرح بیان کیا گیا ہے کہ جیسے یہ اپنے مشتق میں کثیر رکنی مساوات ہے۔
- ایک تفرقی مساوات کا درجہ (اگر معرف ہے) سب سے زیادہ قوت والی ہے (صرف مثبت صحیح اعداد کے لیے) اس میں موجود سب سے زیادہ ترتیب والے مشتق کی۔
- ایک تفاعل جو دی ہوئی مساوات کو مطمئن کرتا ہے اس کا حل کہلاتا ہے۔ وہ حل جو اتنے ہی اختیاری مستقلہ رکھتا ہے، جتنی کہ تفرقی مساوات کی ترتیب، ایک عام حل کہلاتا ہے اور اختیاری مستقلہ سے مبرہ حل، خاص حل کہلاتا ہے۔
- ایک دیے ہوئے تفاعل سے ایک تفرقی مساوات کو بنانے کے لیے ہم تفاعل کا لگاتار تفرق اتنی بار کرتے ہیں جتنے دیئے ہوئے فنکشن میں اختیاری مستقلوں کی تعداد ہوتی ہے اور پھر اختیاری مستقلوں کو خارج کر دیتے ہیں۔
- متغیر کو الگ کرنے کا طریقہ اس طرح کی مساوات کو حل کرنے میں کیا جاتا ہے۔ جن میں متغیر کو مکمل طرح سے الگ کیا جا سکے یعنی، وہ ارکان جن میں y شامل ہے dy کے ساتھ رہے اور جن ارکان میں x شامل ہے dx کے ساتھ رہے۔

◆ ایک تفرقی مساوات جسے $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ یا $\frac{dx}{dy}=g(x,y)$ میں ظاہر کیا جا سکے جہاں $f(x,\ y)$ اور $g(x,y)$ صفر درجہ کے متجانس تفاعل ہیں ایک متجانس تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔

◆ $\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}y=\mathrm{Q}$ کی شکل کی ایک تفرقی مساوات، جہاں P اور Q مستقل ہیں یا صرف x کے فنکشن ہیں ایک پہلے درجہ کی خطی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔

تاریخ کے اوراق سے (History Note)

سائنس کی سر براہی زبانوں میں سے ایک تفرقی مساوات کی ہے۔ یہ بہت دلچسپ بات ہے کہ، تفرقی مساوات کی تاریخ پیدائش 11 نومبر 1675 لی گئی ہے، جب کہ گوٹ فرائیڈ وِلتھم فریحر لیبنیٹز Gottfried Wilthelm Freiherr Leibnitz (1646-1716) نے پہلے تماثلی $\int y\,dy=\frac{1}{2}y^2$ کو کالے اور سفید میں رکھا، اور جہاں سے دونوں علامتوں ∫ اور dy کا تعارف کرایا۔ حقیقت میں لیبنیز کی دلچسپی ایک مسئلہ کے منحنی کو معلوم کرنے کی تھی جس کے مماس کو بتایا گیا تھا۔ اس نے اسے 1619 میں متغیروں کو الگ کرنے کے طریقہ کو ایجاد کرنے میں رہنمائی کی۔ ایک سال بعد اس نے پہلے درجہ کی ہم قسم تفرقی مساوات حل کرنے کا طریقہ ایجاد کیا۔ اس کے آگے بہت تھوڑے وقت میں ''پہلے درجہ کی خطی تفرقی مساوات کو حل کرنے کے طریقے کو'' اس نے ایجاد کیا۔ یہ کتنے تعجب کی بات ہے کہ یہ تمام طریقہ صرف ایک ہی آدمی نے د اور وہ بھی تفرقی مساوات کی پیدائش کے اندر صرف 25 سال کے اندر۔

پرانے زمانے میں، جنھیں اب ہم ایک تفرقی مساوات کا 'حل' کہتے ہیں، اس کا ہم تفرقی مساوات کے 'تکملہ' کے طور پر تعارف کراتے تھے جو لفظ جیمس برنولی James Bernoulli (1654-1705) نے 1690 میں جوڑا تھا۔ لفظ 'حل' کا ستعمال پہلے جوزف لوئیس لیگرانجی (Joseph Louis Lagrange) (1736 - 1813) نے 1774 میں کیا تھا، جو کہ تفرقی مساوات کی پیدائش کے تقریباً سو سال بعد تھا۔ یہ جولس ہینری پوان کیر Jules Henri Poincare (1854 - 1912) تھا جس نے لفظ 'حل' کی زوردار وکالت کی اور اس طرح لفظ 'حل' کو جدید لفاظی میں اپنی قابل وقوع جگہ مل گئی۔ ''متغیر کے الگ کرنے کے طریقے، کا نام جیمس برنولی کے چھوٹے بھائی جون برنولی John Bernoulli (1667 - 1748) کے نام کے ساتھ جڑا ہے۔

جیومیٹریائی مسئلوں کے استعمال پر بھی غور کیا گیا تھا۔ یہ پھر جون برنوی تھا جس نے تفرقی مساواتوں کی پیچیدہ فطرت کو روشن کیا۔ اس نے 20 مئی 1715 میں لیبنیز کو لکھے خط میں تفرقی مساواتوں کے حل کا ذکر کیا تھا۔

$$x^2 y'' = 2y$$

جو کہ تین منحنیوں مثال کے طور پر مکانی، زائد اور منخیوں کے کعب کی ایک جماعت کی طرف لے جاتا ہے۔ یہ دکھاتا ہے کہ اس طرح کی دکھائی دینے والی معصوم تفرقی مساواتوں کے حل میں کس طرح اتار چڑھاؤ ہے۔ بیسیویں صدی کے دوسرے آدھے حصہ سے تفرقی مساواتوں کے حل کی اس پیچیدہ فطرت کی کھوج کی طرف دھیان دیا گیا ہے جس کی سربراہی ''تفرقی مساوات کی کیفیتی تحلیل'' کر رہی ہے۔ آج کل، اس نے اعلیٰ مقام حاصل کر لیا ہے کیونکہ تقریباً تمام معلومات میں اس کی بہت اہمیت ہے۔