باب **10**

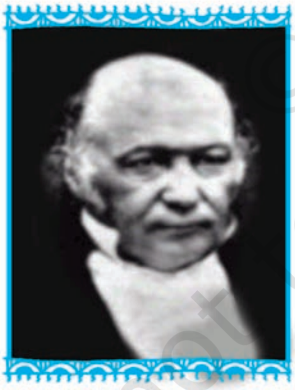
5260CH10

سمتیہ الجبرا
(VECTOR ALGEBRA)

❖زیادہ تر سائنس میں ایک پیڑھی برباد کرتی ہے جسے دوسری پیڑھی نے بنایا ہے، اور ایک نے جو قائم کیا ہے دوسری نے برباد کیا ہے- صرف ریاضی میں ہی ہر پیڑھی پرانے ڈھانچے پر ایک نیا مکان تعمیر کرتی ہے- ہرمین ہینکل

❖ (Herman Hankel)

10.1 تعارف (Introduction)



ڈبلو۔آر۔ہیملٹن
W.R. Hamilton
(1805-1865)

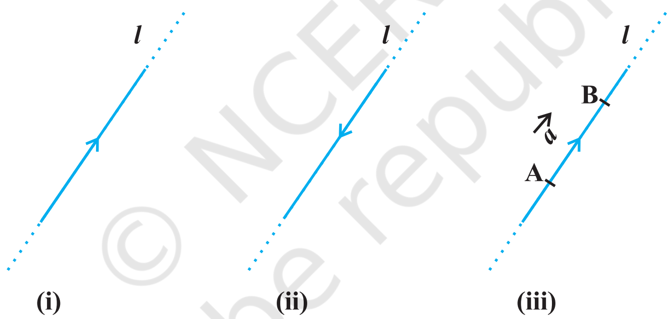
ہم اپنی روزمرہ زندگی میں بہت سے سوالوں کا سامنا ہیں جیسے، آپ کی کیا لمبائی ہے؟ ایک فٹ بال کھیلنے والا اپنی ٹیم کے دوسرے کھلاڑی کو پاس دینے کے لیے بال پر کس طرح ہٹ لگاتا ہے؟ مشاہدہ کیجیے کہ پہلے سوال کا ممکن جواب 1.6 میٹر ہوسکتا ہے، ایک مقدار جس میں صرف ایک قدر (magnitude) ملوث ہے جو کہ ایک حقیقی عدد ہے۔ اس طرح کی مقداروں کو عددیہ کہا جاتا ہے۔ حالانکہ، دوسرے سوال کا جواب ایک مقدار ہے (جو قوت کہلاتی ہے) جس میں پٹھوں کی طاقت (قدر) اور سمت شامل ہے (جس میں دوسرا کھلاڑی ایک جگہ پر موجود ہے)۔ اس طرح کی مقداروں کو سمتیہ کہا جاتا ہے۔ ریاضی، طبعیات اور انجینئرنگ میں ہم اکثر دونوں طرح کی مقداروں سے وابستہ ہوتے ہیں جن کے نام میں عددیہ مقداریں، مثال کے طور پر لمبائی، وزن، وقت، فاصلہ، رفتار (Speed)، رقبہ، جحم، درجۂ حرارت، کام، وولٹیج، کثافت (density)، مزاحمت (resistance) وغیرہ وغیرہ اور سمتیہ

مقداریں جیسے نقل مکاں (displacement)، رفتار (Velocity)، اسراع (acceleration)، قوت، کلوگرام وزن، تحرک (momentum)، برقی فیلڈ کی شدت وغیرہ

اس باب میں ہم سمتیوں پر مختلف عمل اور ان کی الجبری اور جیومیٹریائی خصوصیات کے بارے میں کچھ بنیادی تصورات کا مطالعہ کریں گے۔ ان دو طرح کی خصوصیات کو، جب کہ دونوں کا ایک ساتھ تصور کیا گیا ہے، سمتیوں کے تصور کی پوری حقیقت دیتی ہیں اور ان کا اہم استعمال مختلف شعبوں کی طرف لے جاتا ہے جیسا کہ اوپر ظاہر کیا گیا ہے۔

10.2 کچھ بنیادی تصورات (Some Basic Concepts)

مان لیجیے مستوی یا تین ابعادی خلا میں 'l' کوئی بھی سیدھا خط ہے۔ اس خط کو تیر کی مدد سے دو سمتیں دی جا سکتی ہیں۔ اس طرح کی بتائی گئی سمتوں میں ایک خط کو سمت دار خط (directed line) کہا جاتا ہے۔ (شکل 10.1 (i), (ii))



شکل 10.1

اب مشاہدہ کیجیے کہ اگر ہم خط l کو قطع خط AB تک محدود رکھیں، تب خط l پر دونوں میں سے ایک سمت کے ساتھ ایک قدر بیان کی گئی ہے، تاکہ ہمیں ایک سمت دار قطع خط حاصل ہوتا ہے۔ (شکل (10.1(iii))۔ اس طرح، ایک سمت دار قطع خط کی قدر اور ساتھ ہی سمت ہوتی ہے۔

تعریف 1: ایک مقدار جس میں قدر اور سمت دونوں موجود ہوتی ہیں سمتیہ کہلاتی ہے۔

یہ بات ذہن نشین کر لیجیے کہ ایک سمت دار قطع خط ایک سمتیہ ہے (شکل 10.1(iii)) $\overrightarrow{AB}$ سے ظاہر کیا گیا ہے یا سادہ طور پر $\vec{a}$ اور اسے 'سمتیہ $\overrightarrow{AB}$' یا 'سمتیہ $\vec{a}$' پڑھا جاتا ہے۔

نقطہ A جہاں سے سمتیہ $\overrightarrow{AB}$ شروع ہوتا ہے اس کا ابتدائی نقطہ کہلاتا ہے اور نقطہ B جہاں اس کا آخیر ہوتا ہے اس کا آخری نقطہ کہلاتا ہے۔ سمتیہ کے ابتدائی نقطہ اور آخری نقطہ کے درمیان کا فاصلہ سمتیہ کی قدر (یا لمبائی) کہلاتی ہے، جسے $|\overrightarrow{AB}|$، یا $|\vec{a}|$ یا a سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ تیر سمتیہ کی سمت کو ظاہر کرتا ہے۔

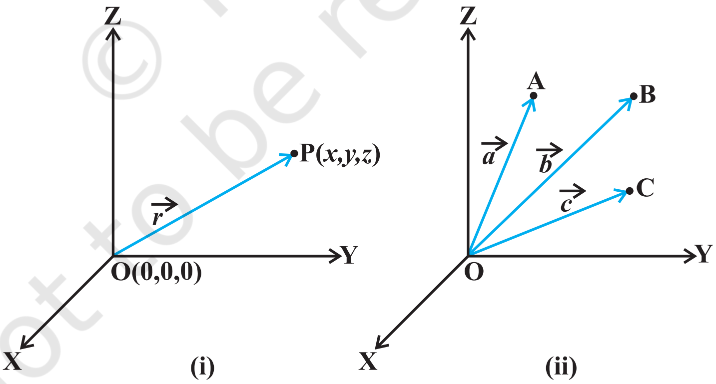
نوٹ کیونکہ لمبائی کبھی بھی منفی نہیں ہوتی، اس لیے علامت $|\vec{a}| < 0$ کا کوئی مطلب نہیں ہے۔

مقامی سمتیہ (Position Vector)

گیارھویں جماعت میں پڑھے ہوئے سہ ابعادی سیدھے ہاتھ کے مستطیلی مختص نظام کو یاد کیجیے (شکل 10.2(i))۔ خلا میں ایک نقطے P پر غور کیجیے جس کے مختص، مبدء O (0,0,0) کی مناسبت سے (x, y, z) ہیں۔ تب، سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ جس کے ابتدائی اور آخری نقاط بالترتیب O اور P ہیں، نقطہ P کا O کی مناسبت سے مقامی سمتیہ ہے۔ فاصلہ کا ضابطہ (گیارھویں جماعت سے) استعمال کر کے $\overrightarrow{OP}$ (یا $\vec{r}$) کی قدر اس طرح دی گئی ہے

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

عمل میں، A، B، C وغیرہ نقاط کے مقامی سمتیہ مبدء O کو مد نظر رکھتے ہوئے بالترتیب $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ وغیرہ سے ظاہر کیے گئے ہیں۔ (شکل 10.2(ii))

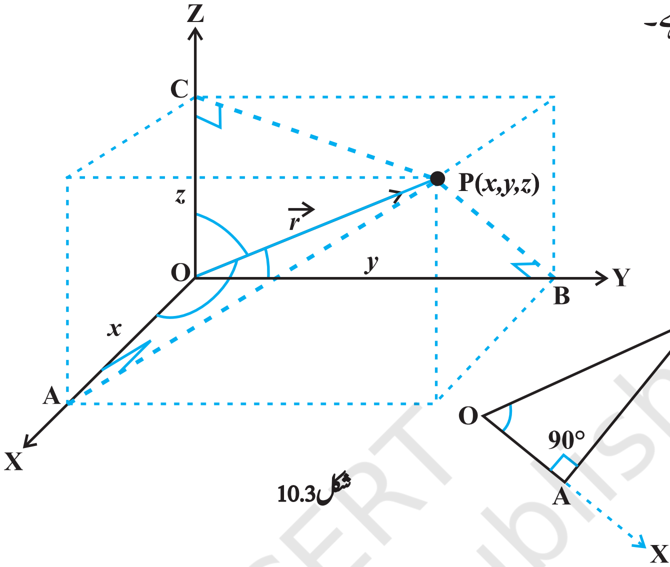


شکل 10.2

سمت کوسائن (Direction Cosines)

شکل 10.3 میں نقطہ $P(x, y, z)$ کے مقامی سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ (یا $\vec{r}$) پر غور کیجیے۔ سمتی $\vec{r}$ کے ذریعہ بنائے گئے زاویہ α، β، γ بالترتیب x، y اور z - محوروں کی مثبت سمت کے ساتھ بنائے ہوئے سمت زاویے کہلاتے ہیں۔ ان زاویوں کی کوسائن

قدریں، یعنی $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ اور $\cos\gamma$ سمتیہ $\vec{r}$ کی سمت کوسائن کہلاتی ہیں، اورانھیں بالترتیب عام طور پر l ، m اور n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



شکل 10.3

شکل 10.3 سے ہم یہ نوٹ کر سکتے ہیں کہ مثلث OAP ایک قائم زاوی ہے، اور اس میں، ہمارے پاس $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ ہے (r ، $|\vec{r}|$ کو ظاہر کرتا ہے)۔ اسی طرح، قائم مقامی زاویہ OBP اور OCP سے ہم لکھ سکتے ہیں کہ $\cos\beta = \frac{y}{r}$ اور $\cos\gamma = \frac{z}{r}$ ۔ اس طرح، نقطہ P کے مختصوں کو (lr, mr, nr) سے بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اعداد lr ، mr اور nr سمت کوسائن کے تناسب میں سمتیہ $\vec{r}$ کی سمت نسبت کہلاتے ہیں اور بالترتیب a ، b اور c سے ظاہر کیے جاتے ہیں۔

نوٹ	یہ ذہن نشین کیا جاسکتا ہے کہ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ہے لیکن $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$ عام طور پر ہوتا ہے۔

10.3 سمتیوں کی قسمیں (Types of Vectors)

صفر سمتیہ (Zero Vector): ایک سمتیہ جس کے ابتدائی اور آخری نقاط آپس میں ملتے ہیں ایک صفر سمتیہ (یا خالی سمتیہ) کہلاتا ہے، اور $\vec{0}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ صفر سمتیہ کو ایک مستقل سمت نہیں دی جاسکتی کیوں کہ اس کی قدر صفر ہوتی ہے۔ یا، متبادل کے طور پر، اسے کوئی بھی سمت دی جاسکتی ہے۔ سمتیہ $\overrightarrow{AA}$ ، $\overrightarrow{BB}$ صفر سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

اکائی سمتی (Unit Vector): ایک سمتیہ جس کی قدر اکائی ہے (یعنی 1 اکائی) اکائی سمتیہ کہلاتا ہے۔ اکائی سمتیہ دیے

ہوئے سمتیہ $\vec{a}$ کی سمت کو $\hat{a}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہم ابتدائی سمتیہ (Coinitial Vectors): دو یا دو سے زیادہ سمتیہ جن کا ابتدائی نقطہ یکساں (ایک ہی) ہوتا ہے ہم ابتدائی سمتیہ کہلاتے ہیں۔

ہم خط سمتیے (Collinear Vectors): دو یا دو سے زیادہ سمتیہ اس وقت ہم خط سمتیہ کہلاتے ہیں اگر وہ ایک خط کے متوازی ہوں، بغیر قدر اور سمتوں کو شامل کیے ہوئے ہوں۔

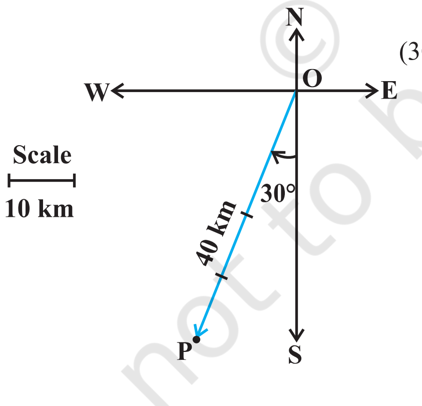
برابر سمتیے (Equal Vectors): دو سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ برابر سمتیہ کہلاتے ہیں، اگر ان کی قدر اور سمت ان کے ابتدائی نقاط کی پوزیشن کو بغیر بیچ میں لائے ہوئے یکساں ہو اور اسے $\vec{a} = \vec{b}$ لکھا جاتا ہے۔

سمتیہ کا منفی (Negative of a Vector): اگر ایک سمتیہ کی قدر دیے ہوئے سمتیہ کی قدر کے برابر ہے (مان لیجیے، $\overrightarrow{AB}$)، لیکن اس کی سمت اس کے مخالف ہے، تو یہ دیے ہوئے سمتیہ کا منفی کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر سمتیہ $\overrightarrow{BA}$، سمتیہ $\overrightarrow{AB}$ کا منفی ہے اور اسے $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ لکھا جاتا ہے۔

ریمارک (Remark): اوپر بیان کیے گئے سمتیہ اس طرح ہیں کہ ان میں سے ہر ایک متوازی ہٹاؤ کی بنا پر بغیر قدر اور سمت بدلے ہوئے ہے۔ اس طرح کے سمتیوں کو آزاد سمتیہ (free vectors) کہتے ہیں۔ اس پورے باب میں ہم آزاد سمتیوں کے ساتھ ہی تعلق رکھیں گے۔

مثال 1: 40 کلومیٹر نقل مکاں کو 30° جنوب مغرب (30° west of south) گراف کی مدد سے ظاہر کیجیے۔

حل: سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ درکار نقل مکاں کو ظاہر کرتا ہے (شکل 10.4)



شکل 10.4

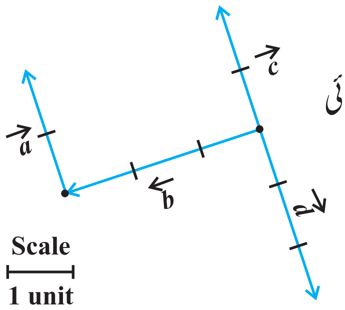
مثال 2: ذیل پیمائشوں کی درجہ بندی عددیہ اور سمتیہ میں کیجیے۔

(i) 5 سیکنڈ (ii) 1000 cm^3 کعب سم
(iii) 10 نیوٹن (iv) 30 کلومیٹر/گھنٹہ
(v) 10 گرام/مکعب سم (vi) 20 میٹر/سیکنڈ شمال کی طرف

حل: (i) وقت–عددیہ (ii) حجم–عددیہ (iii) قوت–سمتیہ
(iv) رفتار–عددیہ (v) کثافت–عددیہ (vi) رفتار–سمتیہ

مثال 3: شکل 10.5 میں کون سے سمتیہ ہیں

(i) ہم خط (ii) برابر (iii) ہم-ابتدائی



شکل10.5

حل: (i) ہم خط سمتیہ: $\vec{a}$، $\vec{c}$ اور $\vec{d}$

(ii) برابر سمتیہ: $\vec{a}$ اور $\vec{c}$

(iii) ہم ابتدائی سمتیہ: $\vec{b}$، $\vec{c}$ اور $\vec{d}$

مشق 10.1

1۔ 40 کلومیٹر نقل مکان کو، 30° شمال کا مشرق کو گراف کے ذریعہ ظاہر کیجیے۔

2۔ مندرجہ ذیل پیمائشوں کی عددیہ اور سمتیہ میں درجہ بندی کیجیے۔

(i) 10 کلوگرام (ii) 2 میٹر شمال-مغرب (iii) 40°

(iv) 40 واٹ (v) 10^{-19} کولومب (vi) 20 میٹر/مربع سیکنڈ

3۔ مندرجہ ذیل کی درجہ بندی عددیہ اور سمتیہ مقداروں کے طور پر کیجیے۔

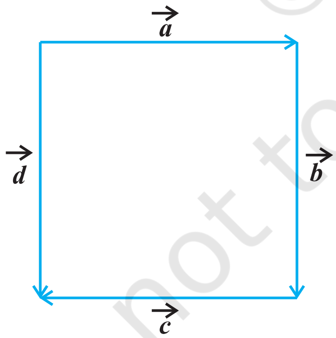
(i) وقفہ (ii) فاصلہ (iii) قوت

(iv) رفتار (v) کیا گیا کام

4۔ شکل 10.6 میں (ایک مربع)، مندرجہ ذیل سمتیوں کی پہچان کیجیے۔

(i) ہم ابتدائی (ii) برابر

(iii) ہم نقطہ لیکن برابر نہیں



شکل10.6

5۔ مندرجہ ذیل کا جواب صحیح یا غلط میں پر دیجیے۔

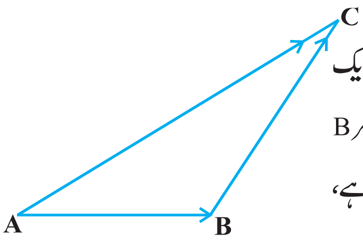
(i) $\vec{a}$ اور $-\vec{a}$ ہم نقطہ ہیں۔

(ii) دو ہم خط سمتیہ، وسعت میں ہمیشہ برابر ہوتے ہیں۔

(iii) دو سمتی جن کی وسعت یکساں ہے ہم خط ہیں۔

(iv) دو ہم خط سمتوں کی قدر اگر یکساں ہے تو وہ برابر ہیں۔

10.4 سمتیوں کی جمع (Addition of Vectors)



شکل 10.7

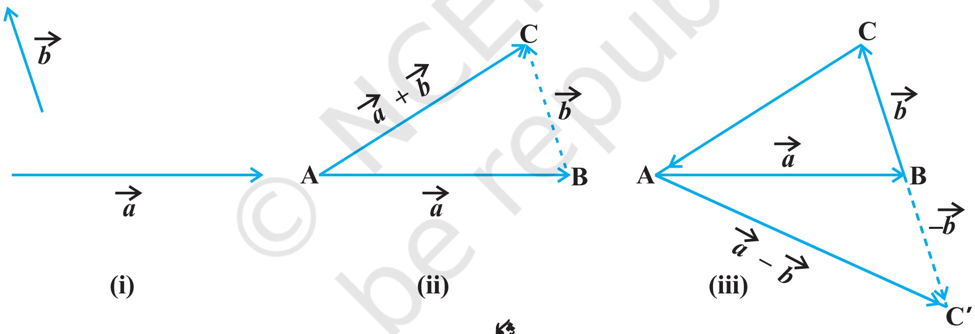
ایک سمتیہ $\overrightarrow{AB}$ کا سیدھا مطلب ہے نقطہ A سے نقطہ B تک نقل مکان۔ اب ایک صورت حال پر غور کیجیے کہ ایک لڑکی A سے B کی طرف حرکت کرتی ہے اور پھر B سے C کی طرف (شکل 10.7)۔ لڑکی کا کل نقل مکاں نقطہ A سے نقطہ C تک ہے،

اسے سمتی $\overrightarrow{AC}$ سے دیا گیا ہے اور اس طرح ظاہر کیا گیا ہے

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

اسے سمتیہ مجموعہ کا مثلثی قانون (Triangle law) کہتے ہیں۔

عام طور پر اگر ہمارے پاس دو سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہیں (شکل 10.8(i))، تب ان کا جمع معلوم کرنے کے لیے انھیں اس پوزیشن میں رکھا جاتا ہے کہ ایک کا ابتدائی نقطہ دوسرے کے آخری نقطہ سے مل جائے (شکل 10.8(ii))



شکل 10.8

مثال کے طور پر، شکل 10.8(ii) میں ہم نے سمتیہ $\vec{b}$ کی جگہ، بغیر قدر اور سمت کو بدلے ہوئے بدلی ہے، تا کہ اس کا ابتدائی نقطہ $\vec{a}$ کے آخری نقطہ کے ساتھ مل جائے۔ تب، سمتی $\vec{a}+\vec{b}$، جو کہ مثلث ABC کے تیسرے ضلع AC سے ظاہر کیا گیا ہے، ہمیں سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا جمع (یا نتیجتاً) دیتا ہے، یعنی: مثلث ABC میں (شکل 10.8(ii)) ہمارے پاس ہے

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

اب دوبارہ، کیونکہ $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$ ہے، اوپر کی مساوات سے، ہمارے پاس ہے

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

اس کا مطلب ہے کہ جب مثلث کے اضلاع ترتیب میں لیے جائیں، تو یہ نتیجتاً صفر کی طرف لے جاتے ہیں، کیونکہ ابتدائی اور آخری نقاط آپس میں مل جاتے ہیں۔ (شکل (10.8(iii))

اب ایک سمتیہ $\overrightarrow{BC'}$ بنائیے تا کہ اس کی قدر سمتیہ $\overrightarrow{BC}$ کے یکساں ہو، لیکن سمت اس کے مخالف ہو (شکل (10.8(iii)، یعنی،

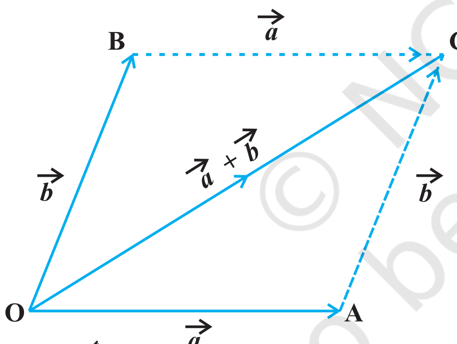
$$\overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{BC}$$

تب، شکل (10.8(iii) سے مثلثی قانون نافذ کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{BC}) = \vec{a} - \vec{b}$$

تب کہا جاتا ہے کہ سمتیہ $\overrightarrow{AC'}$، $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا فرق ظاہر کرتا ہے

اب، غور کیجیے کہ ایک کشتی دریا کے ایک کنارے سے دوسرے کنارے کی طرف جا رہی ہے اور اس کی سمت دریا کے بہاؤ کے عمودی ہے۔ تب، اس پر دو سمتیہ رفتار کا اثر ہوگا۔ ایک تو وہ رفتار جو کشتی کو اس کا انجن دے رہا ہے اور دوسری دریا کے پانی کی رفتار۔ ان دونوں رفتاروں کے اثر کی وجہ سے، حقیقت میں کشتی ایک مختلف رفتار کے ساتھ سفر کرنے لگتی ہے۔ کشتی کی اثر انداز رفتار اور سمت (یعنی؛ نتیجتاً رفتار) کے بارے میں موٹے طور پر ہمارے پاس سمتیہ جمع کا ذیل قانون ہے۔



شکل 10.9

اگر ہمارے پاس دو سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہیں جو کہ ایک متوازی الاضلاع کی دو متصل ضلعوں سے وسعت اور سمت میں ظاہر کیے گئے ہیں (شکل 10.9)، تب ان کا مجموعہ $\vec{a}+\vec{b}$، وسعت اور سمت میں متوازی الاضلاع کے وتر سے ان کے مشترک نقطہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یہ سمتیوں جمع کا متوازی الاضلاع قانون (Parallelogram law of vector addition) کہلاتا ہے۔

نوٹ شکل 10.9 سے مثلث کا قانون استعمال کر کے، کوئی بھی یہ نتیجہ اخذ کر سکتا ہے کہ

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

یا $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (کیونکہ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$)

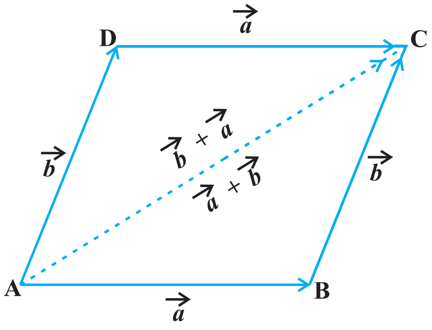
جو کہ متوازی الاضلاع قانون ہے۔ اس طرح، ہم کہہ سکتے ہیں کہ سمتیہ جمع کے دونوں قانون ایک دوسرے کے برابر ہیں۔

سمتیہ جمع کی خصوصیات (Properties of vector addition)

خصوصیت 1: کن ہی دو سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے لیے

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$ (جمع کا تقلیبی قانون Commutative property)

ثبوت: متوازی الاضلاع ABCD پر غور کیجیے (شکل 10.10)۔ مان لیجیے $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ اور $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ ہے، تب مثلث قانون کا استعمال کر کے مثلث ABC سے، ہمارے پاس ہے



شکل 10.10

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$$

اب، کیونکہ متوازی اضلاع کے مخالف ضلعے برابر اور متوازی ہیں، شکل 10.10 سے ہمارے پاس ہے، $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ اور $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$۔ دوبارہ مثلث قانون استعمال کر کے، مثلث ADC سے، ہمارے پاس ہے

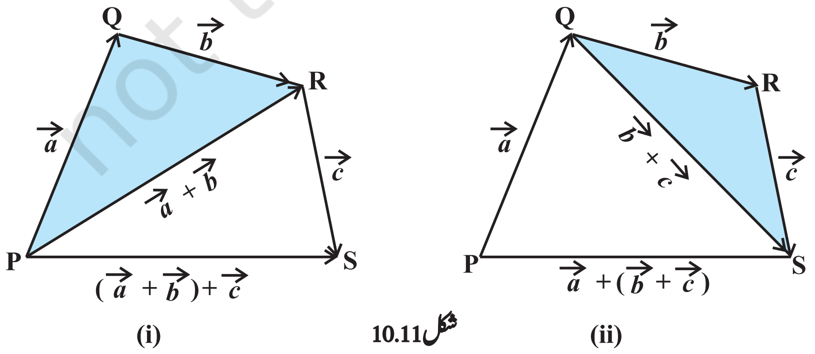
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}$$

یہاں $$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

خصوصیت 2: کن ہی تین سمتیوں $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کے لیے

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$ (تلازمی خصوصیت)

ثبوت: مان لیجیے سمتیہ $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کو بالترتیب $\overline{PQ}$، $\overline{QR}$ اور $\overline{RS}$ سے ظاہر کیا گیا ہے، جیسا کہ شکل 10.11(i) اور (ii) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 10.11

تب $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$

اور $\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{QS}$

اس لیے $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{PS}$

اور $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}$

اس لیے $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

ریمارک (Remark): سمتیہ جمع کی تلازمی خصوصیت ہمیں اس قابل بنا دیتی ہے کہ ہم بغیر بریکٹس کا استعمال کیے ہوئے تین سمتوں $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ کا حاصل جمع $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ سے ظاہر کر سکیں۔

نوٹ کر لیجیے کہ کسی بھی سمتیہ $\vec{a}$ کے لیے، ہمارے پاس ہے

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$$

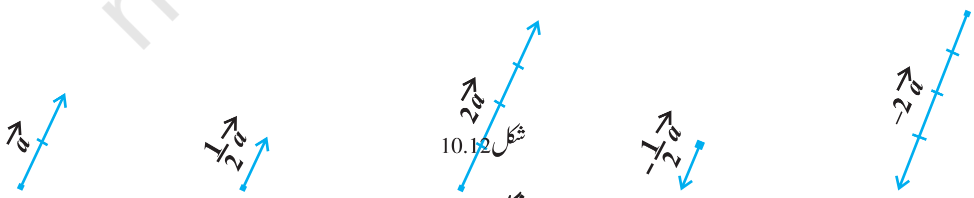
یہاں، صفر سمتی $\vec{0}$ سمتی جمع کے لیے جمعی تماثلا کہلاتا ہے۔

10.5 ایک سمتیہ کی ایک عددیہ سے ضرب (Multiplication of a Vector by a Scalar)

مان لیجیے $\vec{a}$ ایک دیا ہوا سمتیہ ہے اور λ ایک عددیہ ہے۔ تب سمتیہ $\vec{a}$ کا عددیہ λ سے حاصل ضرب جو کہ $\lambda\vec{a}$ سے ظاہر کیا گیا ہے، سمتیہ $\vec{a}$ کا عددیہ λ سے حاصل ضرب کہلاتا ہے۔ نوٹ کر لیجیے کہ، $\lambda\vec{a}$ بھی ایک سمتیہ ہے جو کہ سمتیہ $\vec{a}$ کے ساتھ ہم خط ہے۔ سمتیہ $\lambda\vec{a}$ کی سمت یکساں ہے (یا مخالف) جو کہ سمتیہ $\vec{a}$ کی ہے، λ کی قدر کے مطابق مثبت ہے (یا منفی)۔ ساتھ ہی $\lambda\vec{a}$ کی قدر سمتیہ $\vec{a}$ کی قدر، کی $|\lambda|$ گناہ ہے، یعنی:

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$$

ایک سمتیہ کی ایک عددیہ سے جیومیٹریائی انداز میں ضرب، شکل 10.12 میں دی گئی ہے۔



شکل 10.12

جب $\lambda = -1$ ہے، $\lambda \vec{a} = -\vec{a}$ ، جو کہ ایک سمتیہ ہے اور جس کی قدر $\vec{a}$ کی قدر کے برابر ہے اور سمتیہ $\vec{a}$ کے مخالف ہے۔ سمتیہ $-\vec{a}$ ، سمتی $\vec{a}$ کا منفی (یا جمعی معکوس) کہلاتا ہے اور ہمارے پاس ہمیشہ موجود ہے

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

ساتھ ہی، اگر $\lambda = \dfrac{1}{|\vec{a}|}$ ہے، جب کہ $\vec{a} \neq 0$ یعنی: $\vec{a}$ ایک خالی سمتیہ نہیں ہے، تب

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$$

اس طرح، $\lambda \vec{a}$ ، $\vec{a}$ کی سمت میں اکائی سمتی کو ظاہر کرتا ہے۔ ہمیں اسے اس طرح

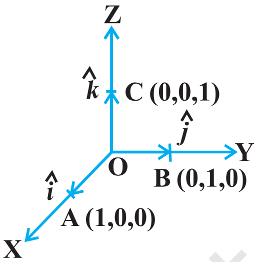
$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

نوٹ کسی بھی عددیہ k کے لیے، $k\vec{0} = \vec{0}$

10.5.1 سمتیہ کے اجزا (Components of a vector)

ہم x–محور، y–محور اور z–محور پر بالترتیب نقاط A(1,0,0)، B(0,1,0) اور C(0,0,1) لیتے ہیں۔ تب، صاف طور پر

$$|\overrightarrow{OA}| = 1, |\overrightarrow{OB}| = 1 \text{ اور } |\overrightarrow{OC}| = 1$$

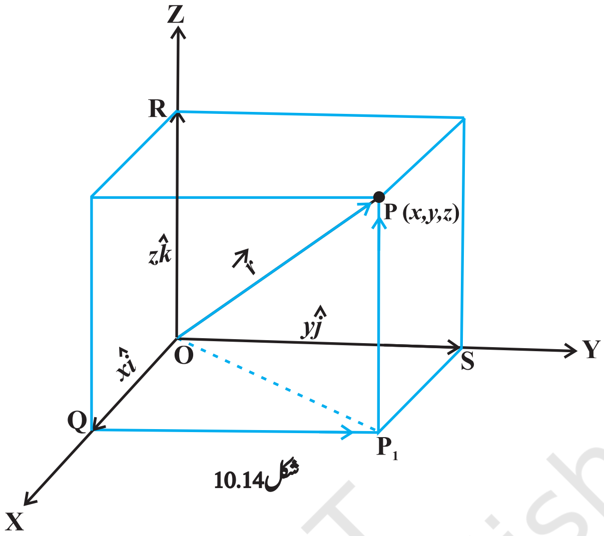


سمتیہ $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OB}$ اور $\overrightarrow{OC}$ جن میں سے ہر ایک کی قدر 1 ہے، بالترتیب محوروں OX، OY اور OZ کے ساتھ اکائی سمتیہ کہلاتے ہیں اور بالترتیب $\hat{i}$ ، $\hat{j}$ اور $\hat{k}$ سے ظاہر کیے جاتے ہیں۔ (شکل 10.13)

اب شکل 10.14 میں نقطہ $P(x, y, z)$ کے مقامی سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ پر غور کیجیے۔ مان لیجیے، مستوی XOY پر نقطہ P سے P_1 عمود کا پیر ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ P_1P ، z–محور کے متوازی ہے۔ جیسا کہ $\hat{i}$ ، $\hat{j}$ اور $\hat{k}$ بالترتیب x، y اور z–محوروں کے ساتھ اکائی سمتیہ ہیں، اور P کی مختص کی تعریف سے، ہمارے پاس $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OR} = z\hat{k}$ ہے۔ اسی طرح $\overrightarrow{QP_1} = \overrightarrow{OS} = y\hat{j}$ اور $\overrightarrow{OQ} = x\hat{i}$ ۔

اس لیے، اس سے ملتا ہے کہ $\quad \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP_1} = x\hat{i} + y\hat{j}$

اور $\quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$



شکل 10.14

اس لیے، مقامی سمتیہ P کی O کے حوالے سے اس طرح دیا گیا ہے

$$\overrightarrow{OP} \text{ (or } \vec{r}) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

کسی بھی سمتی کی یہ شکل اس کی اجزائی شکل کہلاتی ہے۔ یہاں x، y اور z، $\vec{r}$ کے عددیہ اجزا کہلاتے ہیں، اور $x\hat{i}$ ، $y\hat{j}$ اور $z\hat{k}$ ، $\vec{r}$ کے محوروں کے ساتھ سمتیہ اجزا کہلاتے ہیں۔ کئی بار x، y اور z کو مستطیلی اجزا بھی کہا جاتا ہے۔

کسی بھی سمتیہ کی لمبائی $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ، پائیتھا گورس مسئلہ کو دوبار نافذ کرکے جلدی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ قائم مقام مثلث OQP_1 میں (شکل 10.14)

$$|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{QP_1}|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

اور قائم مقام مثلث OP_1P میں، ہمارے پاس ہے

$$|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{P_1P}|^2} = \sqrt{(x^2 + y^2) + z^2}$$

اس لیے، کسی بھی سمتیہ کی لمبائی $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ اس سے دی گئی ہے

$$|\vec{r}| = |x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کوئی بھی دو سمتیہ بالترتیب دی ہوئی اجزائی شکل $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ اور $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ میں دیئے گئے ہیں، تب،

(i) $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ سمتیوں کا حاصل جمع (یا نتیجتاً) اس طرح دیا گیا ہے

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1)\hat{i}+(a_2+b_2)\hat{j}+(a_3+b_3)\hat{k}$$

(ii) $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ سمتیوں کا فرق اس طرح دیا گیا ہے

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1)\hat{i}+(a_2-b_2)\hat{j}+(a_3-b_3)\hat{k}$$

(iii) سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ برابر ہیں اگر اور صرف اگر

$a_1=b_1$ ، $a_2=b_2$ اور $a_3=b_3$

(iv) سمتیہ $\vec{a}$ کی ضرب کسی بھی عددیہ λ سے اس طرح دی گئی ہے

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1)\hat{i}+(\lambda a_2)\hat{j}+(\lambda a_3)\hat{k}$$

سمتیوں کی جمع اور ایک سمتیہ کی ایک عددیہ سے ضرب ایک ساتھ مل کر مندرجہ ذیل تقسیمی قانون بناتی ہے:

مان لیجیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کوئی بھی دو سمتیہ ہیں، اور k اور m کوئی بھی دو عددیہ ہیں۔ تب

$$k\vec{a}+m\vec{a}=(k+m)\vec{a} \quad \text{(i)}$$

$$k(m\vec{a})=(km)\vec{a} \quad \text{(ii)}$$

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b} \quad \text{(iii)}$$

ریمارک (Remark)

(i) کوئی بھی یہ مشاہدہ کرسکتا ہے کہ، λ کی کوئی بھی قدر ہو، سمتیہ $\lambda\vec{a}$ ہمیشہ سمتیہ $\vec{a}$ کے ہم خط ہوتا ہے۔ حقیقت میں، دو سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کو ہم خط کہا جاسکتا ہے اگر اور صرف اگر ایک غیر صفر عددیہ λ موجود ہو، تاکہ $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ ۔ اگر سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ اجزائی شکل میں دیئے گئے ہیں، یعنی، $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ اور $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$، تب دونوں سمتیے ہم خط ہیں اگر اور صرف اگر

$$b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}=\lambda(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})$$

$$b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}=(\lambda a_1)\hat{i}+(\lambda a_2)\hat{j}+(\lambda a_3)\hat{k}$$

$$b_1=\lambda a_1, b_2=\lambda a_2,\ b_3=\lambda a_3$$

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}=\lambda$$

(ii) اگر $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ہے، تب a_1, a_2, a_3 کو $\vec{a}$ کی سمت نسبت بھی کہا جاتا ہے۔

(iii) اگر کسی حالت میں یہ دیا گیا ہے کہ l ، m ، n ایک سمتیہ کے سمت کو سائن (Cosine) ہیں، تب $l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$ $= (\cos\alpha)\hat{i} + (\cos\beta)\hat{j} + (\cos\gamma)\hat{k}$ ، تب اس سمتیہ کا اُس سمت میں اکائی سمتیہ ہے، جہاں α ، β اور γ وہ زاویہ ہیں جو سمتیہ، بالترتیب x ، y اور z محوروں کے ساتھ بناتا ہے۔

مثال4: x ، y اور z کی قدریں معلوم کیجیے تاکہ سمتی $\vec{a} = x\hat{i} + 2\hat{j} + z\hat{k}$ اور $\vec{b} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$ برابر ہیں۔

حل: یہ نوٹ کر لیجیے کہ دو سمتیہ اس وقت برابر ہوتے ہیں، اگر اور صرف اگر ان کے متناظر اجزا برابر ہیں۔ اس طرح دیے ہوئے سمتیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ اس وقت برابر ہوں گے اگر اور صرف اگر

$$x = 2,\ y = 2,\ z = 1$$

مثال5: مان لیجیے $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$ اور $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$ ہے، کیا $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ؟ کیا سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ برابر ہیں؟

حل: ہمارے پاس ہے $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ اور $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

تاکہ، $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ۔ لیکن، دونوں سمتیہ برابر نہیں ہیں کیونکہ ان کے متناظر اجزا مختلف ہیں۔

مثال6: سمتیہ $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ معلوم کیجیے؟

حل: سمتیہ $\vec{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ سے دیا گیا ہے

اب $$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

اس لیے، $$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$$

مثال7: سمتیہ $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ کی سمت میں ایک سمتیہ معلوم کیجیے جس کی قدر 7 اکائی ہے۔

حل: دیئے ہوئے سمتیہ $\vec{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ ہے

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$$

اس لیے، سمتیہ جس کی قدر 7 کے برابر ہے اور $\vec{a}$ کی سمت میں ہے اس سے دیا گیا ہے

$$7\hat{a} = 7\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$$

مثال8: سمتیہ $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ اور $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ کے حاصل جمع کی سمت میں اکائی سمتیہ معلوم کیجیے۔

حل: دیے ہوئے سمتیوں کا حاصل جمع ہے

$$(\text{مان لیجیے}) = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

اور
$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

اس لیے، مطلوبہ اکائی سمتیہ ہے

$$\hat{c} = \frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{29}}(4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k}$$

مثال9: سمتیہ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ کی سمت نسبت لکھیے اور اس طرح اس کی سمت کوسائن بھی معلوم کیجیے۔

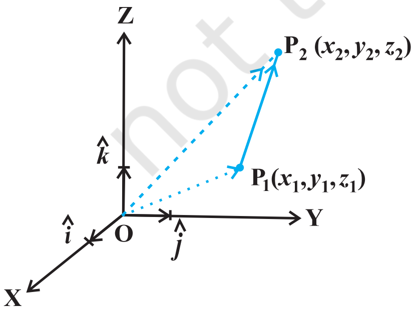
حل: یہ نوٹ کر لیجیے ایک سمتی $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ کی سمت نسبتیں a، b، c سمتیوں کے مناسب اجزا x، y اور z ہیں۔ اس لیے، دیے ہوئے سمتیہ کے لیے، ہمارے پاس ہے، $a = 1$ ، $b = 1$ اور $c = -2$ ۔ اس کے آگے، اگر l، m اور n دیے ہوئے سمتیہ کی سمت کوسائن ہیں، تب

$$l = \frac{a}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad m = \frac{b}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad n = \frac{c}{|\vec{r}|} = \frac{-2}{\sqrt{6}}$$ کیونکہ

اس طرح، $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ سمت کوسائن ہیں۔

10.5.2 دو نقاط کو ملانے والا سمتیہ (Vector joining two points)

اگر $P_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $P_2(x_2, y_2, z_2)$ کوئی بھی دو نقاط ہیں، تب P_1 اور P_2 کو ملانے والا سمتیہ $\overrightarrow{P_1P_2}$ ہے (شکل 10.15)



شکل 10.15

مبدہ O سے نقاط P_1 اور P_2 کو ملانے پر، اور مثلث OP_1P_2 میں، مثلث قانون نافذ کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$$

سمتیہ جمع خصوصیت کا استعمال کرنے پر، مندرجہ بالا مساوات یہ ہوجاتی ہیں

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

یعنی:
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$
$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

سمتیہ $\overrightarrow{P_1P_2}$ کی قدر اس سے دی گئی ہے

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

مثال 10: وہ سمتیہ معلوم کیجیے جو نقاط $P(2,3,0)$ اور $Q(-1,-2,-4)$ کو ملا رہا ہے اور P سے Q کی سمت کی طرف جاتا ہے۔

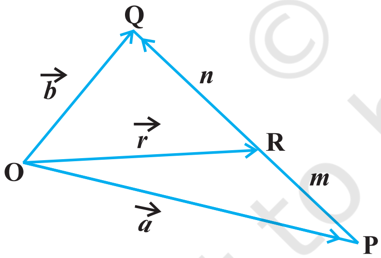
حل: کیونکہ سمتیہ P سے Q کی طرف جاتا ہے، صاف طور پر P ایک ابتدائی نقطہ ہے اور Q آخری نقطہ۔ اس لیے، مطلوبہ سمتیہ جو P اور Q کو رہا ہے سمتیہ $\overrightarrow{PQ}$ ہے اور اس طرح دیا گیا ہے

$$\overrightarrow{PQ} = (-1-2)\hat{i} + (-2-3)\hat{j} + (-4-0)\hat{k}$$

یعنی:
$$\overrightarrow{PQ} = -3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$$

10.5.3 سیکشن فارمولہ (Section Formula)

مان لیجیے P اور Q دو نقاط ہیں جو کہ بالترتیب مقامی سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ اور $\overrightarrow{OQ}$ سے مبدء O کو مدنظر رکھتے ہوئے ظاہر کیے گئے ہیں۔ تب نقاط P اور Q کو ملانے والا قطعہ خط ایک تیسرے نقطہ، مان لیجیے R سے، دو طریقوں سے تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ اندرونی طور پر (شکل 10.16) اور بیرونی طور پر ہمارا ارادہ (شکل 10.17)۔ یہاں ہم نقطہ R کے لیے مبدء O کی مناسبت سے مقامی سمتیہ $\overrightarrow{OR}$ کو معلوم کرنے کا ہے۔ ہم دونوں کیسوں کو ایک ایک کرکے لیتے ہیں۔



شکل 10.16

کیس I جب R، PQ کو اندرونی طور پر تقسیم کرتا ہے (شکل 10.16)

اگر R، $\overrightarrow{PQ}$ کو تقسیم کرتا ہے تاکہ $m\overrightarrow{RQ} = n\overrightarrow{PR}$ ، جہاں m اور n مثبت عدد یہ ہیں، ہم کہتے ہیں کہ R، $\overrightarrow{PQ}$ کو $m:n$ نسبت میں اندرونی طور پر تقسیم کرتا ہے۔ اب مثلثوں ORQ اور OPR سے، ہمارے پاس ہے

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = \vec{b} - \vec{r}$$

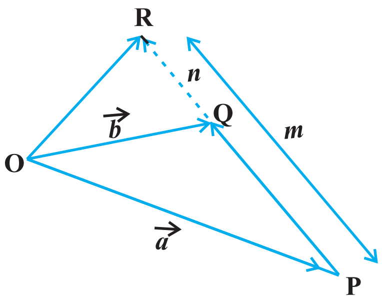
اور $\quad \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \vec{r} - \vec{a}$

اس لیے، ہمارے پاس ہے $\quad m(\vec{b} - \vec{r}) = n(\vec{r} - \vec{a}) \quad$ (کیوں؟)

یا $\quad \vec{r} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n} \quad$ (آسان کرنے پر)

اس لیے، نقطہ R کا مقامی سمتیہ جو کہ P اور Q کو اندرونی طور پر m:n نسبت میں تقسیم کرتا ہے، اس طرح دیا گیا ہے

$$\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$



شکل 10.17

کیس II جب R، PQ کو بیرونی طور پر تقسیم کرتا ہے (شکل 10.17)۔ ہم نے اسے پڑھنے والے کے لیے ایک مشق کے طور پر چھوڑا ہے، یہ تصدیق کرنے کے لیے کہ نقطہ R کا مقامی سمتیہ جو کہ قطعہ خط PQ کو بیرونی طور پر m:n نسبت (یعنی، $\dfrac{PR}{QR} = \dfrac{m}{n}$) میں تقسیم کررہا ہے، اس طرح دیا گیا ہے

$$\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$$

ریمارک (Remark) اگر R، PQ کا درمیانی نقطہ ہے، تب $m=n$ ہے۔ اور اس لیے، کیس I سے، $\overrightarrow{PQ}$ کا درمیانی نقطہ R، اپنا مقامی سمتیہ اس طرح رکھے گا

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

مثال 11: دو نقاط P اور Q جن کے مقامی سمتیہ $\overrightarrow{OP} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ اور $\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + \vec{b}$ ہیں، پر غور کیجیے۔ ایک نقطہ R کا مقامی سمتیہ معلوم کیجیے جو کہ P اور Q کو ملانے والے خط کو 2:1 میں تقسیم کرتا ہے، (i) اندرونی طور پر، اور (ii) بیرونی طور پر

حل:

(i) نقطہ R کا مقامی سمتیہ جو کہ P اور Q کو ملانے والے خط کو اندرونی طور پر 2:1 نسب میں تقسیم کررہا ہے، یہ ہے

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) + (3\vec{a} - 2\vec{b})}{2+1} = \frac{5\vec{a}}{3}$$

(ii) نقطہ R کی مقامی سمتیہ جو کہ P اور Q کو ملانے والے خط کو بیرونی طور پر 2:1 نسبت میں کاٹ رہا ہے، یہ ہے

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a}+\vec{b})-(3\vec{a}-2\vec{b})}{2-1} = 4\vec{b}-\vec{a}$$

مثال 12: دکھائیے کہ نقاط $A(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$، $B(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})$، $C(3\hat{i}-4j-4\hat{k})$ ایک قائم زاوی مثلث کے راس ہیں۔

حل: ہمارے پاس ہے

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\hat{i}+(-3+1)\hat{j}+(-5-1)\hat{k} = -\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3-1)\hat{i}+(-4+3)\hat{j}+(-4+5)\hat{k} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$$

اور

$$\overrightarrow{CA} = (2-3)\hat{i}+(-1+4)\hat{j}+(1+4)\hat{k} = -\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$$

اس کے آگے، نوٹ کیجیے کہ

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 41 = 6+35 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$$

اس لیے، مثلث ایک قائم زاوی مثلث ہے۔

مشق 10.2

1۔ مندرجہ ذیل سمتیوں کی قدر معلوم کیجیے:

$$\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}; \quad \vec{b} = 2\hat{i}-7\hat{j}-3\hat{k}; \quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

2۔ دو مختلف سمتیے لکھیے جن کی قدر یکساں ہو۔

3۔ دو مختلف سمتیے لکھیے جن کی سمت یکساں ہو۔

4۔ x اور y کی قدریں معلوم کیجیے تا کہ سمتیے $2\hat{i}+3\hat{j}$ اور $x\hat{i}+y\hat{j}$ برابر ہوں۔

5۔ اس سمتیہ کے لیے عددیہ اور سمتیہ اجزا معلوم کیجیے جس کا ابتدائی نقطہ (2,1) اور آخری نقطہ (–5,7) ہے۔

6۔ سمتوں $\vec{a} = \hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$، $\vec{b} = -2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ اور $\vec{c} = \hat{i}-6\hat{j}-7\hat{k}$ کا حاصل جمع معلوم کیجیے۔

7۔ سمتیہ $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ معلوم کیجیے۔

8۔ سمتیہ $\overrightarrow{PQ}$, کی سمت میں اکائی سمتیہ معلوم کیجیے، جہاں P اور Q بالترتیب (1,2,3) اور (4,5,6) نقاط ہیں۔

9۔ دیے ہوئے سمتیہ $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ اور $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ کے لیے، سمتیہ $\vec{a} + \vec{b}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ معلوم کیجیے۔

10۔ ایک سمتیہ $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ کی سمت میں ایک سمتیہ معلوم کیجیے جس کی قدر 8 اکائی ہے۔

11۔ دکھایئے کہ سمتیہ $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ اور $-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ ہم خط ہیں۔

12۔ سمتیہ $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ کی سمت کوسائن معلوم کیجیے۔

13۔ سمتیہ کی کوسائن معلوم کیجیے جو کہ نقاط A(1,2,–3) اور B(–1,–2,1) کے ملنے سے بنا ہے اور A سے B کی طرف جاتا ہے۔

14۔ دکھایئے کہ سمتیہ $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$، OX، OY اور OZ محوروں پر برابر جھکا ہوا ہے۔

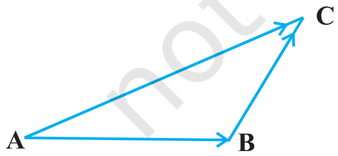
15۔ ایک نقطہ R کا مقامی سمتیہ معلوم کیجیے جو کہ نقاط P اور Q سے بننے والے خط کو تقسیم کرتا ہے اور جس کے مقامی سمتیہ بالترتیب $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ اور $-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ہیں۔ 2:1 نسبت میں

(i) اندرونی طور پر (ii) بیرونی طور پر

16۔ نقاط P(2,3,4) اور Q(4,1,–2) کو ملانے والے سمتیہ کے درمیانی نقطہ کے مقامی سمتیہ معلوم کیجیے۔

17۔ دکھایئے کہ نقاط A، B اور C بالترتیب مقامی سمتیہ $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$، $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ اور $\vec{c} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ کے ساتھ ایک قائم زاوی مثلث کے راس بناتے ہیں۔

18۔ مثلث ABC (شکل 10.18) میں، درج ذیل میں کون سا درست نہیں ہے:



شکل 10.18

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

(B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

(D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

19۔ اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو ہم خط سمتیہ ہیں، تب مندرجہ ذیل میں کون سے غلط ہیں:

(A) $\vec{b} = \lambda \vec{a}$، کسی عددیہ کے لیے

(B) $\vec{a} = \pm \vec{b}$

(C) $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے اجزا آپس میں تناسب میں ہیں

(D) سمتیوں کی سمتیں یکساں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دونوں ہیں، لیکن قدر مختلف ہیں۔

10.6 دو سمتیوں کا حاصل ضرب (Product of Two Vectors)

ابھی تک ہم نے سمتیوں کے حاصل جمع اور تفریق کے بارے میں ہی مطالعہ کیا ہے۔ ایک دوسرا الجبریائی عمل جس کے بارے میں ہم بحث کرنا چاہتے ہیں وہ سمتیوں کا حاصل ضرب ہے۔ ہم یہ یاد کر سکتے ہیں کہ دو اعداد کا حاصل ضرب ایک عدد ہے، دو ماترس کا حاصل ضرب پھر دوبارہ ایک ماترس ہے۔ لیکن تفاعل کے کیس میں ہم انھیں دو طرح سے ضرب کر سکتے ہیں، جن کے نام ہیں نقطوں کے طرز پر دو تفاعلات کی ضرب اور دو تفاعلات کا ترکیب اجزائی۔ اسی طرح، دو سمتیوں کی ضرب بھی دو طریقے سے بیان کی گئی ہے، جن کے نام ہیں، عددیہ (یا نقطہ) حاصل ضرب جہاں نتیجہ ایک عددیہ ہے اور سمتیہ (یا کراس) حاصل ضرب جہاں نتیجہ ایک سمتیہ ہے۔ ان سمتیوں کے لیے دو طرح کے حاصل ضرب پر مبنی، ان کی جیومیٹری، میکینکس اور انجینئرنگ میں بہت سے عملوں میں ضرورت پائی گئی ہے۔ اس سیکشن میں ہم حاصل ضرب کے ان دو طریقوں پر بحث کریں گے۔

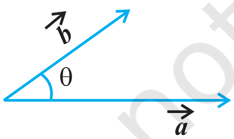
10.6.1 عددیہ (یا نقطہ) دو سمتیوں کا حاصل ضرب (Scalar (or dot) product of two vectors)

تعریف 2: دو غیر صفر سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا حاصل، جو کہ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ سے ظاہر کیا گیا ہے، اس طرح بیان کیا گیا ہے

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

جہاں، $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے درمیان میں زاویہ θ ہے، $0 \leq \theta \leq \pi$ (شکل 10.19)

اگر کوئی بھی $\vec{a} = \vec{0}$ ہے یا $\vec{b} = \vec{0}$ ہے، تب θ بیان نہیں کیا گیا ہے، اور اس کیس میں ہم $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ بیان کرتے ہیں۔



شکل 10.19

مشاہدات

1۔ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ایک حقیقی عدد ہے۔

2۔ مان لیجیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو غیر صفر سمتیہ ہیں، تب $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ہے اگر اور صرف اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دونوں ایک دوسرے کے عمود ہیں، یعنی:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

3۔ اگر $\theta=0$ ہے، تب $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$

خاص طور پر، $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$، جیسا کہ اس صورت میں θ، 0 ہے

4۔ اگر $\theta=\pi$ ہے، تب $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$

خاص طور پر $\vec{a}\cdot(-\vec{a})=-|\vec{a}|^2$، جیسا کہ اس کیس میں θ، π ہے۔

5۔ مشاہدات 2 اور 3 کے حوالے سے، باہمی عمودی اکائی سمتیوں $\hat{i}$، $\hat{j}$ اور $\hat{k}$ کے لیے، ہمارے پاس ہے

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{k}=\hat{k}\cdot\hat{i}=0$$

6۔ دو غیر صفر سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے درمیان زاویہ اس طرح دیا گیا ہے

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\text{، یا }\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

7۔ عددیہ حاصل ضرب تقلیبی ہے، یعنی،

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}\quad\text{(کیوں؟)}$$

عددیہ حاصل ضرب کی دو اہم خصوصیات (Two important properties of scalar product)

خصوصیت 1: (جمع پر عددیہ حاصل ضرب کی تقسیمی خصوصیت)۔ مان لیجیے $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کوئی بھی تین سمتیہ ہیں، تب

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

خصوصیت 2: مان لیجیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کوئی بھی دو سمتیہ ہیں، اور λ کوئی بھی عددیہ ہے۔ تب

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$$

اگر دو سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ اجزائی شکل $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ اور $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ میں دیئے گئے ہیں، تب ان کی عددیہ

حاصل ضرب اس طرح دی گئی ہے۔

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1\hat{i}\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) + a_2\hat{j}\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) + a_3\hat{k}\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i}) + a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j}) + a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k}) + a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i}) + a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j}) + a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k})$$

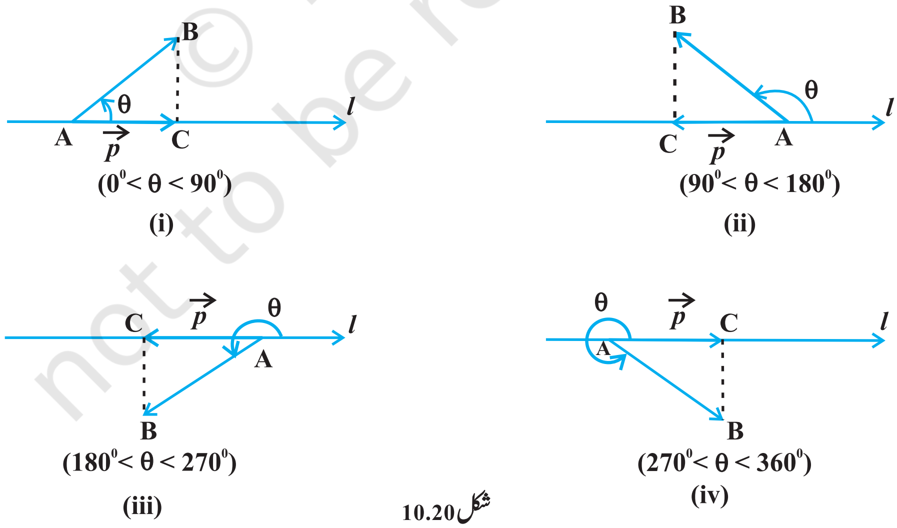
$$+ a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i}) + a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j}) + a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k})$$ (اوپر کی 1 اور 2 خصوصیات استعمال کرنے پر)

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$ (مشاہدہ 5 کا استعمال کرنے پر)

اس طرح $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

10.6.2 ایک خط پر ایک سمتی کی تظلیل (Projection of a vector on a line)

مان لیجیے سمتیہ $\overrightarrow{AB}$ ایک دی ہوئی سمت دار تغیر خط l کے ساتھ گھڑی کی مخالف سمت میں ایک زاویہ θ بناتا ہے (مان لیجیے)۔ (شکل 10.20) تب $\overrightarrow{AB}$ کا خط l پر تظلیل ایک سمتی $\vec{p}$ ہے (مان لیجیے) جس کی قدر $|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$ ہے، اور $\vec{p}$ کی سمت کیونکہ یکساں ہے (یا مخالف ہے) خط l پر جو کہ اس پر منحصر ہے، کہ کیا $\cos\theta$ مثبت ہے یا منفی۔ سمتیہ $\vec{p}$ کی تظلیل کہلاتا ہے، اور اس کی قدر $|\vec{p}|$ سمتی $\overrightarrow{AB}$ کا سمت دار خط l پر تظلیل کہلاتی ہے۔



شکل 10.20

مثال کے طور پر، ہر ایک درج ذیل شکلوں میں (شکل 10.20(i) تا (iv)) $\overrightarrow{AB}$ کی تظلیل خط l کے ساتھ سمتیہ $\overrightarrow{AC}$ ہے۔

مشاہدات

1۔ اگر $\hat{p}$ خط l کے ساتھ اکائی سمتیہ ہے، تب خط l پر ایک سمتیہ $\vec{a}$ کی تظلیل $\vec{a}\cdot\hat{p}$ سے دی گئی ہے۔

2۔ ایک سمتی $\vec{a}$ کی تظلیل سمتیہ $\vec{b}$ پر، اس طرح دی گئی ہے

$$\vec{a}\cdot\hat{b}, \text{ یا } \vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)، \text{ یا } \frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

3۔ اگر $\theta = 0$ ہے، تب $\overline{AB}$ کی تظلیل بخود $\overline{AB}$ ہوگی اور اگر $\theta = \pi$ ہے، تب $\overline{AB}$ کی تظلیل $\overline{BA}$ ہوگی۔

4۔ اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ یا $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ہے، تب $\overline{AB}$ کا ابھرا ہوا سمتی صفر سمتی ہوگا۔

ریمارک (Remark): اگر سمتیہ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ کے α، β اور γ سمتیہ زاویہ ہیں، تب اس کے سمت کوسائن اس طرح دیے جاسکتے ہیں

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\hat{i}}{|\vec{a}||\hat{i}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}، \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} \quad \text{اور} \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

ساتھ ہی یہ نوٹ کر لیجیے کہ $|\vec{a}|\cos\alpha$، $|\vec{a}|\cos\beta$ اور $|\vec{a}|\cos\gamma$ بالترتیب $\vec{a}$ کی OX، OY اور OZ کی تظلیل ہیں۔ یعنی، اجزا a_1، a_2 اور a_3 سمتی $\vec{a}$ کے موٹے طور پر بالترتیب $\vec{a}$ کے x-محور، y-محور اور z-محور کی تظلیل ہیں۔ اس کے آگے، اگر $\vec{a}$ ایک اکائی سمتیہ ہے، تب اسے سمت کوسائن میں اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے

$$\vec{a} = \cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$$

مثال 13: دو سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ جن کی قدر بالترتیب 1 اور 2 ہے کا درمیانی زاویہ معلوم کیجیے جب کہ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$ ہے

حل: دیا گیا ہے $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$، $|\vec{a}| = 1$ اور $|\vec{b}| = 2$۔ ہمارے پاس ہے

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

مثال 14: سمتیوں $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ اور $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ کے درمیان زاویہ θ معلوم کیجیے۔

حل: دو سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے درمیان زاویہ θ اس طرح دیا گیا ہے

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

اب $\vec{a}\cdot\vec{b}=(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})\cdot(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=1-1-1=-1$

اس لیے، ہمارے پاس ہے $\cos\theta=\dfrac{-1}{3}$

اس لیے، مطلوبہ زاویہ ہے $\theta=\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

مثال 15: اگر $\vec{a}=5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$ اور $\vec{b}=\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$ ہے، تب دکھائیے کہ سمتیہ $\vec{a}+\vec{b}$ اور $\vec{a}-\vec{b}$ ایک دوسرے پر عمود ہیں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ دو غیر صفر سمتیہ اگر ان کا عددیہ حاصل ضرب صفر ہے، تو ایک دوسرے پر عمود ہیں۔

یہاں $\vec{a}+\vec{b}=(5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})+(\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})=6\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}$

اور $\vec{a}-\vec{b}=(5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})-(\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})=4\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}$

اس طرح، $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(6\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k})\cdot(4\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k})=24-8-16=0.$

اس لیے $\vec{a}+\vec{b}$ اور $\vec{a}-\vec{b}$ عمودی سمتیے ہیں۔

مثال 16: سمتیہ $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ کا سمتیہ $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ پر تظلیل معلوم کیجیے۔

حل: سمتیہ $\vec{a}$ تظلیل سمتیہ $\vec{b}$ پر اس طرح دیا گیا ہے

$$\frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{(2\times1+3\times2+2\times1)}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{6}}=\frac{5}{3}\sqrt{6}$$

مثال 17: $|\vec{a}-\vec{b}|$ معلوم کیجیے، اگر دو سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ اس طرح کہ $|\vec{a}|=2$، $|\vec{b}|=3$ اور $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ ہے

حل: ہمارے پاس ہے

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

$$=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$=|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2$$

$$=(2)^2-2(4)+(3)^2$$

اس لیے $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$

مثال 18: اگر $\vec{a}$ ایک اکائی سمتیہ ہے اور $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a})=8$ ہے، تب $|\vec{x}|$ معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ $\vec{a}$ ایک اکائی سمتیہ ہے، $|\vec{a}|=1$ ہے۔ ساتھ ہی،

$$(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a})=8$$

یا
$$\vec{x}\cdot\vec{x}+\vec{x}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{x}-\vec{a}\cdot\vec{a}=8$$

یا
$$|\vec{x}|^2-1=8$$ یعنی، $|\vec{x}|^2=9$

اس لیے $|\vec{x}|=3$ (کیونکہ ایک سمتیہ کی قدر غیر منفی ہے)

مثال 19: کن ہی دو سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے لیے، ہمارے پاس ہمیشہ $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$ ہے (کوچے شوارٹس نامساوات)

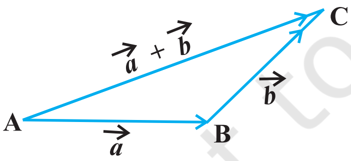
حل: نامساوات ادنیٰ طور پر لاگو ہوتی ہے جب کہ یا تو $\vec{a}=\vec{0}$ یا $\vec{b}=\vec{0}$۔ اصلیت میں، اس طرح کے حالات میں ہمارے پاس $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=0=|\vec{a}||\vec{b}|$ ہے۔ اس طرح، ہمیں ماننا چاہیے کہ $|\vec{a}|\neq 0\neq|\vec{b}|$۔

تب، ہمارے پاس ہے
$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=|\cos\theta|\leq 1$$

اس لیے
$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$$

مثال 20: کن ہی دو سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے لیے، ہمارے پاس ہمیشہ $|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$ ہے (مثلی نامساوات)

حل: اس کیس میں نامساوات کوئی بھی $\vec{a}=\vec{0}$ یا $\vec{b}=\vec{0}$ ادنیٰ طور پر لاگو ہے۔ (کس طرح؟)۔ اس طرح مان لیجیے $|\vec{a}|\neq\vec{0}\neq|\vec{b}|$ تب،



شکل 10.21

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

(عددیہ حاصل ضرب تقلیبی ہے)

$$\leq|\vec{a}|^2+2|\vec{a}\cdot\vec{b}|+|\vec{b}|^2$$ (کیونکہ $x\leq|x|\ \forall x\in\mathbf{R}$)

$$\leq|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2$$ (مثال 19 سے)

$$= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$$

اس لیے، $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

ریمارک (Remark): اگر برابر مثلثی غیر مساوات مطمئن ہے (مندرجہ بالا مثال 20 میں) یعنی،

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

تب $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$

جو دکھاتا ہے کہ نقاط A، B اور C ہم خط ہیں۔

مثال 21: دکھایئے کہ نقاط $A(-2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})$، $B(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ اور $C(7\hat{i}-\hat{k})$ ہم خط ہیں۔

حل: ہمارے پاس ہے

$$\overrightarrow{AB} = (1+2)\hat{i} + (2-3)\hat{j} + (3-5)\hat{k} = 3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (7-1)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (-1-3)\hat{k} = 6\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (7+2)\hat{i} + (0-3)\hat{j} + (-1-5)\hat{k} = 9\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14}$، $|\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{14}$ اور $|\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{14}$

اس لیے $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$

اس لیے A، B اور C ہم خط نقاط ہیں

نوٹ مثال 21 میں، کوئی بھی یہ سمجھ کرسکتا ہے کہ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ ہے حالانکہ لیکن نقاط A، B اور C ایک مثلث کے راس نہیں بناتے۔

مشق 10.3

1۔ دو سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے جن کی وسعت بالترتیب $\sqrt{3}$ اور 2 ہے اور $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{6}$ ہے۔

2۔ سمتیہ $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ اور $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے۔

3۔ سمتیہ $\hat{i} - \hat{j}$ کا سمتیہ $\hat{i} + \hat{j}$ پر تظلیل معلوم کیجیے۔

4۔ سمتیہ $\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$ کا سمتی $7\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ پر تظلیل معلوم کیجیے۔

5۔ دکھایئے کہ دیے ہوئے تین سمتیوں میں ہر ایک سمتیہ ایک اکائی سمتیہ ہے:

$$\frac{1}{7}(6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})\text{، }\frac{1}{7}(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k})\text{، }\frac{1}{7}(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$$

ساتھ ہی، دکھایئے کہ یہ ایک دوسرے پر باہمی عمودی ہیں۔

6۔ $|\vec{a}|$ اور $|\vec{b}|$ معلوم کیجیے، اگر $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=8$ اور $|\vec{a}|=8|\vec{b}|$ ہے۔

7۔ $(3\vec{a}-5\vec{b})\cdot(2\vec{a}+7\vec{b})$ کے حاصل ضرب کی قدر کا اندازہ لگایئے۔

8۔ دو سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کی قدر معلوم کیجیے، جن کی قدر یکساں ہے اور تا کہ ان کا درمیانی زاویہ 60° کا ہے اور ان کا عددیہ حاصل ضرب $\frac{1}{2}$ ہے۔

9۔ $|\vec{x}|$ معلوم کیجیے، اگر اکائی سمتیہ $\vec{a}$ کے لیے $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a})=12$ ہے۔

10۔ اگر $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$، $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ اور $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ ہیں جب کہ $\vec{a}+\lambda\vec{b}$، $\vec{c}$ پر عمود ہے، تب λ کی قدر معلوم کیجیے۔

11۔ دکھایئے کہ کن ہی دو غیر صفر سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے لیے $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$، $|\vec{a}|\vec{b}-|\vec{b}|\vec{a}$ پر عمود ہے۔

12۔ اگر $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ اور $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ہے، تب سمتیہ $\vec{b}$ کے بارے میں کیا نتیجہ نکالا جا سکتا ہے؟

13۔ اگر $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ اکائی سمتیہ ہیں تا کہ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ہے، تب $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ کی قدر معلوم کیجیے۔

14۔ اگر سمتیہ $\vec{a}=\vec{0}$ ہے یا $\vec{b}=\vec{0}$ ہے، تب $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ہے۔ لیکن اس کا معکوس ضروری نہیں ہے کہ صحیح نہیں ہے۔ اپنے جواب کی ایک مثال کی مدد سے وضاحت کیجیے۔

15۔ اگر ایک مثلث ABC کے راس A، B اور C بالترتیب (1,2,3)، (–1,0,0) اور (0,1,2) ہیں، تب $\angle ABC$ معلوم کیجیے۔ ($\angle ABC$ سمتی $\overline{BA}$ اور $\overline{BC}$ کے درمیان زاویہ ہے)۔

16۔ دکھایئے کہ نقاط A(1,2,7)، B(2,6,3) اور C(3,10,–1) ہم خط ہیں۔

17۔ دکھایئے کہ سمتیہ $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$، $\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ اور $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ ایک قائم زاوی مثلث کے راس ہیں۔

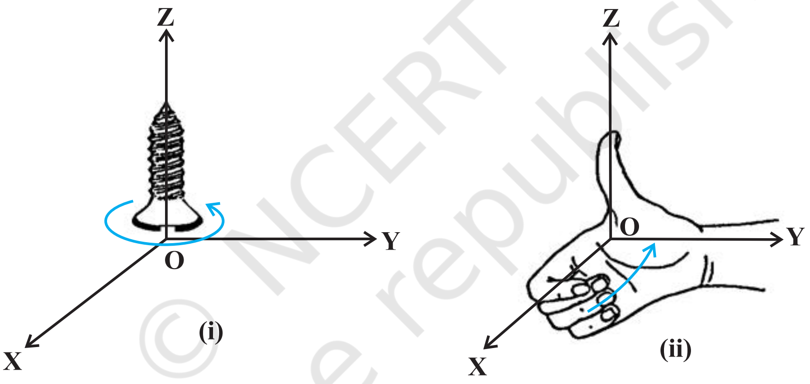
18۔ اگر $\vec{a}$ ایک غیر صفر سمتیہ ہے جس کی قدر 'a' ہے اور λ ایک غیر صفر عددیہ ہے، تب $\lambda\vec{a}$ ایک اکائی سمتیہ ہے اگر

(A) $\lambda = 1$ (B) $\lambda = -1$ (C) $a = |\lambda|$ (D) $a = \dfrac{1}{|\lambda|}$

10.6.3 دو سمتیوں کا سمتیہ (یا کراس) حاصل ضرب (Vector (or cross) product of two vectors)

سیکشن 10.2 میں ہم نے تین ماپی سیدھے ہاتھ کے مستطیلی منحنی نظام کے بارے میں بحث کی ہے۔ اس نظام میں جب مثبت x– محور گھڑی کو سویوں کی سمت میں (clock wise) کی طرف مثبت y– محور میں گھمائی جاتی ہے، سیدھے ہاتھ کی طرف مثبت z– محور کی سمت میں پیچ (معیاری) آگے کی طرف بڑھتا ہے (شکل (i)10.22)۔

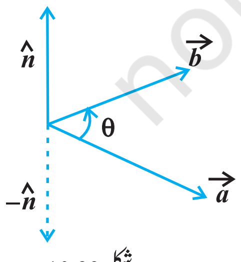
سیدھے ہاتھ والے مختص نظام میں، سیدھے ہاتھ کا انگوٹھا z– محور کی مثبت سمت میں اشارہ کرتا ہے، جب کہ انگلیاں مثبت x– محور کی سمت سے مثبت y– محور کی سمت میں آگے کی طرف بڑھ جاتی ہیں۔ (شکل (ii)10.22)۔



شکل 10.22(i),(ii)

تعریف 3: دو غیر صفر سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا سمتیہ حاصل ضرب $\vec{a} \times \vec{b}$ سے ظاہر کیا گیا ہے جیسا کہ اس طرح بیان کیا گیا ہے

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \, \hat{n}$$



شکل 10.23

جہاں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے درمیان زاویہ θ ہے، $0 \leq \theta \leq \pi$ اور $\hat{n}$ دونوں سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ پر ایک اکائی عمودی ہے، تا کہ $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ اور $\hat{n}$ ایک سیدھے ہاتھ کا قانون بناتے ہیں (شکل 10.23)، یعنی؛ سیدھے ہاتھ کا نام جو کہ $\vec{a}$ سے $\vec{b}$ کی طرف $\hat{n}$ کی سمت میں گھومتا ہے۔

اگر کوئی بھی $\vec{a} = \vec{0}$ ہے یا $\vec{b} = \vec{0}$ ہے، تب θ بیان نہیں کیا گیا ہے اور اس حالت میں ہم $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ بیان کرتے ہیں

مشاہدات

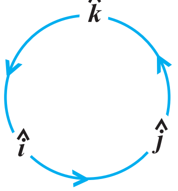
1۔ $\vec{a} \times \vec{b}$ ایک سمتیہ ہے۔

2۔ مان لیجیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو غیر صفر سمتیہ ہیں۔ تب $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ اگر اور صرف اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ایک دوسرے کے متوازی ہیں (یا ہم خط)، یعنی،

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \,\square\, \vec{b}$$

خاص طور پر، $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ اور $\vec{a} \times (-\vec{a}) = \vec{0}$ ، کیونکہ پہلی حالت میں، $\theta = 0$ ہے اور دوسری حالت میں $\theta = \pi$ ہے، جو کہ $\sin\theta$ کی قدر کو 0 بنا رہا ہے۔

3۔ اگر $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ہے، تب $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$



شکل 10.24

4۔ باہمی عمودی اکائی سمتیوں $\hat{i}$ ، $\hat{j}$ اور $\hat{k}$ کے لیے مشاہدات 2 اور 3 کا خیال رکھتے ہوئے، (شکل 10.24)، ہمارے پاس ہے

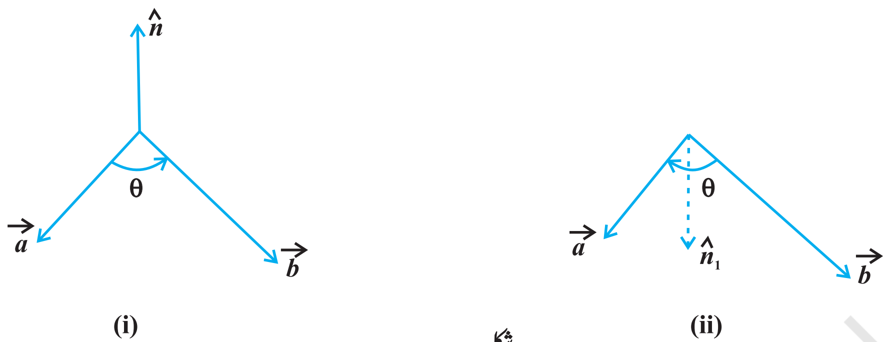
$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

5۔ سمتیہ حاصل ضرب کی شکل میں، دو سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا درمیانی زاویہ اس طرح بھی دیا جا سکتا ہے

$$\sin\theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

6۔ یہ ہمیشہ صحیح ہے کہ سمتیہ حاصل ضرب تقلیبی نہیں ہے، کیونکہ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ۔ اصلیت میں $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ ہے، جہاں $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ اور $\hat{n}$ ایک سیدھے ہاتھ کا نظام بناتے ہیں، یعنی، θ ، $\vec{a}$ سے $\vec{b}$ تک جاتا ہے، شکل (i) 10.25 ۔ جب کہ $\vec{b} \times \vec{a} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}_1$ ، جہاں $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ اور $\hat{n}_1$ ، ایک سیدھے ہاتھ کا نظام بناتے ہیں، یعنی، θ ، $\vec{b}$ سے $\vec{a}$ تک گزرتا ہے۔ شکل (ii) 10.25



شکل 10.25(i),(ii)

اس طرح، اگر ہم یہ تصور کریں کہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کاغذ کی مستوی میں واقع ہیں، تب دونوں $\hat{n}$ اور $\hat{n}_1$ دونوں کاغذ کی مستوی میں عمود ہوں گے۔ لیکن، کیونکہ $\hat{n}$ کاغذ کے اوپر سمت وار ہے جب کہ $\hat{n}_1$ کاغذ کے نیچے سمت وار ہے،

یعنی، $\hat{n}_1 = -\hat{n}$

اس لیے، $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$

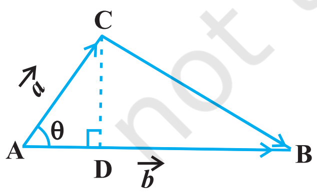
$$= -|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}_1 = -\vec{b}\times\vec{a}$$

7۔ 4 اور 6 مشاہدات کا خیال رکھتے ہوئے، ہمارے پاس ہے

$\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$ اور $\hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$ ، $\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$

8۔ اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ایک مثلث کے متصل ضلعوں کو ظاہر کرتے ہیں تب اس کا رقبہ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$



شکل 10.26

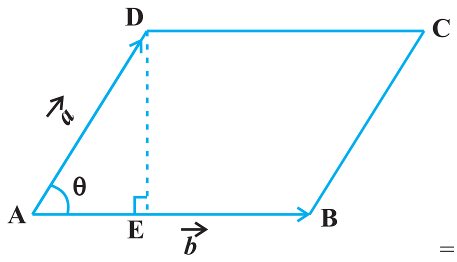
مثلث کے رقبہ کی تعریف سے ہمارے پاس شکل 10.26 سے ہے

مثلث ABC کا رقبہ $= \frac{1}{2}AB\cdot CD.$

لیکن $AB = |\vec{b}|$ (جیسا کہ دیا گیا ہے) اور $CD = |\vec{a}|\sin\theta$

اس طرح، مثلث ABC کا رقبہ $= \frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|.$

9۔ اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ایک متوازی الاضلاع کے برابر کے اضلاع کو ظاہر کرتے ہیں، تب اس کا رقبہ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ سے دیا گیا ہے۔



شکل10.27

شکل10.27 سے، ہمارے پاس ہے

متوازی اضلاع ABCD کا رقبہ = AB. DE لیکن

$AB = |\vec{b}|$ (جیسا کہ دیا گیا ہے)، اور $DE = |\vec{a}| \sin\theta$

اس طرح،

متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ = $|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta$ =

$|\vec{a}\times\vec{b}|$

ہم اب سمتیہ حاصل ضرب کی دو خاص خصوصیات کو بیان کرتے ہیں۔

خصوصیت 3 (جمع پر سمتیہ حاصل ضرب کی تقسیمی خصوصیت): اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کوئی بھی تین سمتیے ہیں اور λ ایک عدد یہ ہے، تب

(i) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

(ii) $\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

مان لیجیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو سمتیہ ہیں جو کہ بالترتیب اجزائی شکل میں $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ اور $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ کی شکل میں دیے گئے ہیں۔ تب ان کا کراس حاصل ضرب اس طرح دیا جا سکتا ہے

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

سمجھانا۔ ہمارے پاس ہے

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i}) + a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j}) + a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k}) + a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i})$$

$$+ a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j}) + a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})$$

$$+ a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i}) + a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j}) + a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k})$$ (خصوصیت 1 سے)

$$= a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j}) - a_1b_3(\hat{k}\times\hat{i}) - a_2b_1(\hat{i}\times\hat{j})$$

$$+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})-a_3b_2(\hat{j}\times\hat{k})$$

(کیونکہ $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$ اور $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{k}\times\hat{i},\ \hat{j}\times\hat{i}=-\hat{i}\times\hat{j}$ اور $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{j}\times\hat{k}$)

$$=a_1b_2\hat{k}-a_1b_3\hat{j}-a_2b_1\hat{k}+a_2b_3\hat{i}+a_3b_1\hat{j}-a_3b_2\hat{i}$$

(کیونکہ $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$ ، $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$ اور $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$)

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

مثال 22: $|\vec{a}\times\vec{b}|$ معلوم کیجیے، اگر $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ اور $\vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$

حل: ہمارے پاس ہے

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 5 & -2\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(-2-15)-(-4-9)\hat{j}+(10-3)\hat{k}=-17\hat{i}+13\hat{j}+7\hat{k}$$

اس طرح، $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(-17)^2+(13)^2+(7)^2}=\sqrt{507}$

مثال 23: ہر ایک سمتی $(\vec{a}+\vec{b})$ اور $(\vec{a}-\vec{b})$ کے لیے ایک اکائی عمودی سمتیہ معلوم کیجیے، جہاں $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ، $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ہے۔

حل: ہمارے پاس ہے $\vec{a}+\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ اور $\vec{a}-\vec{b}=-\hat{j}-2\hat{k}$

ایک سمتی جو دونوں $\vec{a}+\vec{b}$ اور $\vec{a}-\vec{b}$ پر عمود ہے اس سے دیا گیا ہے

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2\end{vmatrix}=-2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$$ (مان لیجیے $=\vec{c}$ ہے)

اب $|\vec{c}|=\sqrt{4+16+4}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

اس لیے، مطلوبہ اکائی سمتیہ ہے

$$\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{-1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$$

نوٹ کسی بھی مستوی کے لیے دو عمودی سمتیے ہیں۔ اسی طرح، $\vec{a}+\vec{b}$ اور $\vec{a}-\vec{b}$ پر ایک دوسرا اکائی عمودی سمتی $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$. ہوگا۔ لیکن وہ $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$ کا نتیجہ ہوگا۔

مثال 24: ایک مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے راس نقاط A(1,1,1)، B(1,2,3) اور C(2,3,1) ہیں۔

حل: ہمارے پاس ہے $\overrightarrow{AB} = \hat{j} + 2\hat{k}$ اور $\overrightarrow{AC} = \hat{i} + 2\hat{j}$۔ دیے ہوئے مثلث کا رقبہ $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ ہے۔

اب،
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

اس لیے
$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$$

اس لیے، مطلوبہ رقبہ $\frac{1}{2}\sqrt{21}$ ہے۔

مثال 25: ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے برابر کے اضلاع سمتوں $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ اور $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ سے دیئے گئے ہیں۔

حل: متوازی الاضلاع کا رقبہ جس کے برابر کے اضلاع $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہیں، $|\vec{a}\times\vec{b}|$ سے دیا گیا ہے

اب
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$$

اس لیے
$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{25+1+16} = \sqrt{42}$$

اور اس طرح، مطلوبہ رقبہ $\sqrt{42}$ ہے۔

مشق 10.4

1۔ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ معلوم کیجیے، اگر $\vec{a}=\hat{i}-7\hat{j}+7\hat{k}$ اور $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ ہے

2۔ ایک اکائی سمتیہ معلوم کیجیے جو کہ ہر ایک سمتیہ $\vec{a}+\vec{b}$ اور $\vec{a}-\vec{b}$ پر عمود ہے، جہاں $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ اور $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ ہے۔

3۔ اگر ایک اکائی سمتیہ $\vec{a}$ ، $\hat{i}$ کے ساتھ $\frac{\pi}{3}$ کا زاویہ بناتا ہے، $\hat{j}$ کے ساتھ $\frac{\pi}{4}$ کا اور $\hat{k}$ کے ساتھ زاویہ حادہ θ، تب θ معلوم کیجیے اور اس طرح، $\vec{a}$ کے اجزا بھی

4۔ دکھائیے کہ $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$

5۔ λ اور μ دریافت کیجیے اگر $(2\hat{i}+6\hat{j}+27\hat{k})\times(\hat{i}+\lambda\hat{j}+\mu\hat{k})=\vec{0}$

6۔ دیا ہوا ہے کہ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ اور $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ ہیں۔ آپ سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے بارے میں کیا نتیجہ نکال سکتے ہیں؟

7۔ مان لیجیے کہ سمتی $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ کی طرح $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ، $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ ، $c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ دیے گئے ہیں۔ تب دکھائیے کہ $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

8۔ اگر $\vec{a}=\vec{0}$ یا $\vec{b}=\vec{0}$ ہے، تب $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ ہے۔ کیا اس کا معکوس درست ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت ایک مثال کے ذریعہ کیجیے۔

9۔ ایک مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے راس A(1,1,2)، B(2,3,5) اور C(1,5,5) ہیں۔

10۔ ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے برابر کے اضلاع سمتیوں $\vec{a}=\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ اور $\vec{b}=2\hat{i}-7\hat{j}+\hat{k}$ سے ظاہر کیے گئے ہیں۔

11۔ مان لیجیے کہ سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ اس طرح ہیں کہ $|\vec{a}|=3$ اور $|\vec{b}|=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ہے، تب $\vec{a}\times\vec{b}$ ایک اکائی سمتیہ ہے، اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے درمیان کا زاویہ ہے

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

12۔ ایک مستطیل کا رقبہ جس کے راس A، B، C اور D ہیں اور جس کے مقامی سمتیہ بالترتیب $-\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$، $\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$، $\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$ اور $-\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$ ہیں، یہ ہے

(A) (B) 1 (C) 2 (D) 4

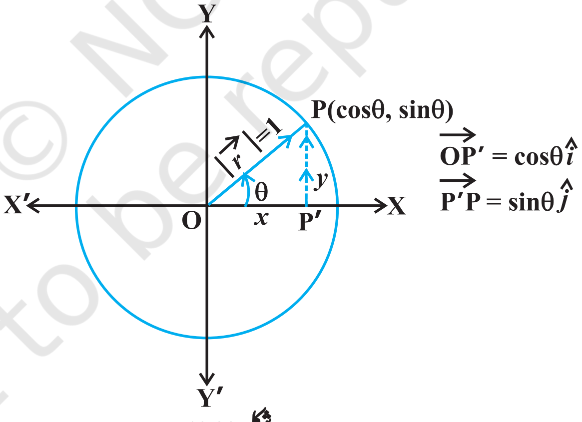
متفرق مشقیں

مثال 26: xy-مستوی میں تمام اکائی سمتیہ لکھیے۔

حل: مان لیجیے xy-مستوی میں $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}$ ایک اکائی سمتیہ ہے (شکل 10.28)۔ تب شکل سے ہمارے پاس $x=\cos\theta$ اور $y=\sin\theta$ ہے (کیونکہ $|\vec{r}|=1$)۔ اس لیے، ہم سمتیہ $\vec{r}$ کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\vec{r}\left(=\overrightarrow{OP}\right)=\cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{j} \quad \text{...........(1)}$$

صاف طور پر $|\vec{r}|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$



شکل 10.28

ساتھ ہی، جیسے θ، O سے 2π کی طرف بڑھتا ہے، نقطہ P گھڑی کی سویوں کی سمت میں (شکل 10.28) دائرہ $x^2+y^2=1$ بناتا ہے، اور یہ تمام ممکن سمتوں کو ڈھک لیتا ہے۔ اس طرح (1)، xy-مستوی میں ہر ممکن اکائی سمتیہ دے دیتا ہے۔

مثال 27: اگر $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$، $2\hat{i}+5\hat{j}$، $3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ اور $\hat{i}-6\hat{j}-\hat{k}$ بالترتیب نقاط A، B، C اور D کے

مقامی سمتیے ہیں،تب $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{CD}$ کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے۔دکھائیے کہ $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{CD}$ ہم خط ہیں۔

حل: یہ نوٹ کر لیجیے کہ θ، AB اور CD کے درمیان زاویہ θ ہے،تب، $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{CD}$ کے درمیان میں بھی زاویہ θ ہے۔

اب $\overrightarrow{AB}$ = B کا مقامی سمتیہ – A کا مقامی سمتیہ

$$= (2\hat{i} + 5\hat{j}) - (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$$

اس لیے
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2 + (4)^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

اسی طرح
$$\overrightarrow{CD} = -2\hat{i} - 8\hat{j} + 2\hat{k} \text{ اور } |\overrightarrow{CD}| = 6\sqrt{2}$$

اس لیے
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}$$

$$= \frac{1(-2) + 4(-8) + (-1)(2)}{(3\sqrt{2})(6\sqrt{2})} = \frac{-36}{36} = -1$$

کیونکہ $0 \leq \theta \leq \pi$ ،اس سے $\theta = \pi$ حاصل ہے۔یہ،یہ ثابت کرتا ہے کہ $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{CD}$ ہم خط ہیں۔

متبادل کے طور پر، $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ،جس کا مطلب ہے $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{CD}$ ہم خط سمتیہ ہیں۔

مثال 28: مان لیجیے $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ تین سمتیے ہیں،تا کہ $|\vec{a}| = 3$ ، $|\vec{b}| = 4$ ، $|\vec{c}| = 5$ ہیں اور کیونکہ ان میں سے ہر ایک دوسرے دو کے مجموعہ پر عمود ہے، $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ معلوم کیجیے۔

حل: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0$ ، $\vec{b} \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = 0$ ، $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$ دیا ہوا ہے

اب
$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c})$$

$$+ \vec{c}.(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.\vec{c}$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

$$= 9 + 16 + 25 = 50$$

اس لیے،
$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

مثال 29: تین سمتیہ $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ شرط $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ کو مطمئن کرتے ہیں۔ مقدار $\mu=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ کی قدر کا اندازہ لگائیے، اگر $|\vec{a}|=1$ ، $|\vec{b}|=4$ اور $|\vec{c}|=2$ ہے۔

حل: کیونکہ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ہے، ہمارے پاس ہے

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$$

یا
$$\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

اس لیے
$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-|\vec{a}|^2=-1 \qquad \text{(1)......}$$

دوبارہ،
$$\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$$

یا
$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-|\vec{b}|^2=-16 \qquad \text{(2)......}$$

اسی طرح
$$\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-4 \qquad \text{(3)......}$$

(1)، (2) اور (3) کو جمع کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$2\,(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c})=-21$$

یا $2\mu=-21$ ، یعنی، $\mu=\dfrac{-21}{2}$

مثال 30: اگر سیدھے ہاتھ کے باہمی عمود اکائی نظام کے حوالے سے سمتیہ $\hat{i}$ ، $\hat{j}$ اور $\hat{k}$ ، $\vec{\alpha}=3\hat{i}-\hat{j}$ ، $\vec{\beta}=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ کے لیے ہیں، تب $\vec{\beta}$ کو $\vec{\beta}=\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2$ کی شکل میں دکھائیے، جہاں $\vec{\beta}_1$، $\vec{\alpha}$ کے متوازی ہے اور $\vec{\beta}_2$ ، $\vec{\alpha}$ پر عمود ہے۔

حل: مان لیجیے $\vec{\beta}_1=\lambda\vec{\alpha}$ ہے، جہاں λ ایک عددیہ ہے، یعنی،

اب
$$\vec{\beta}_2=\vec{\beta}-\vec{\beta}_1=(2-3\lambda)\hat{i}+(1+\lambda)\hat{j}-3\hat{k}$$

اب کیونکہ، $\vec{\beta}_2$ ، $\vec{\alpha}$ پر عمود ہونا چاہیے، ہمارے پاس ہونا چاہیے $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}_2=0$ ، یعنی،

$$3(2-3\lambda)-(1+\lambda)=0$$

یا
$$\lambda=\frac{1}{2}$$

اس لیے $\vec{\beta}_1 = \frac{3}{2}\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j}$ اور $\vec{\beta}_2 = \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{j} - 3\hat{k}$

باب 10 پر مبنی متفرق مشقیں

1۔ xy-مستوی میں ایک اکائی سمتیہ لکھیے، جو کہ x-محور کی مثبت سمت میں 30° کا زاویہ بنا رہا ہے۔

2۔ نقاط $P(x_1, y_1, z_1)$ اور $Q(x_2, y_2, z_2)$ سے مل کر بننے والے سمتی کے عددیہ اجزا اور قدر معلوم کیجیے۔

3۔ ایک لڑکی مغرب کی طرف 4 کلومیٹر چلتی ہے، اور تب وہ 30° مشرق کی طرف شمال کے لیے 3 کلومیٹر چلتی ہے اور رک جاتی ہے۔ لڑکی کا اس کے ابتدائی نقطہ سے طے کیا ہوا فاصلہ معلوم کیجیے۔

4۔ اگر $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ ہے، تب یہ $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$ صحیح ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

5۔ x کی وہ قدر معلوم کیجیے جس کے لیے $x(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ ایک اکائی سمتیہ ہے۔

6۔ ایک سمتیہ معلوم کیجیے جس کی قدر 5 اکائی ہے، اور دو سمتیوں $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ اور $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ کے نتیجہ کے متوازی ہے۔

7۔ اگر $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$، $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ اور $\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ہے، تب ایک اکائی سمتیہ معلوم کیجیے جو کہ سمتیہ $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ کے متوازی ہے۔

8۔ دکھائیے کہ نقاط $A(1, -2, -8)$، $B(5, 0, -2)$ اور $C(11, 3, 7)$ ہم خط ہیں، اور وہ نسبت معلوم کیجیے جس میں B، AC کو تقسیم کرتا ہے۔

9۔ ایک نقطہ R کا مقامی سمتیہ معلوم کیجیے جو کہ دو نقاط P اور Q سے ملنے والے خط کو باہری طور پر 1:2 نسبت میں تقسیم کرتی ہے اور جس کے مقامی سمتیہ $(2\vec{a} + \vec{b})$ اور $(\vec{a} - 3\vec{b})$ ہیں۔ ساتھ ہی، دکھائیے کہ P قطع خط PQ کا درمیانی نقطہ ہے۔

10۔ ایک متوازی الاضلاع کے دو برابر کے ضلع $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ اور $\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ہیں۔ اس کے وتر کے متوازی اکائی سمتیہ معلوم کیجیے۔ اور ساتھ ہی، اس کا رقبہ بھی معلوم کیجیے۔

11۔ دکھائیے کہ ایک اکائی سمتیہ کے سمت کوسائن محوروں OX، OY اور OZ پر برابر جھکے ہوئے ہیں اور وہ $\frac{1}{\sqrt{3}}$، $\frac{1}{\sqrt{3}}$،

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہیں۔

12۔ مان لیجیے $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ ، $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ اور $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ ہیں۔ایک سمتیہ $\vec{d}$ معلوم کیجیے جوکہ دونوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ پر عمود ہے اور $\vec{c} \cdot \vec{d} = 15$

13۔ سمتی $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ کا ایک اکائی سمتیہ کے ساتھ، سمتیوں $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ اور $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ کے حاصل جمع کا عددیہ حاصل ضرب ایک ہے۔ λ کی قدر معلوم کیجیے۔

14۔ اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ یکساں قدر کے باہمی عمودی سمتیہ ہیں، تو دکھایئے کہ سمتیہ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ، $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ پر برابر کا جھکا ہوا ہے۔

15۔ ثابت کیجیے کہ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ ہے، اگر اور صرف اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ عمودی ہیں، دیا ہوا ہے کہ $\vec{a} \neq \vec{0}$ ،

سوال 16 تا 19 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

16۔ اگر دو سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے درمیان θ ایک زاویہ ہے، تب صرف $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ ہے جب کہ

(A) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (B) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < \theta < \pi$ (D) $0 \leq \theta \leq \pi$

17۔ مان لیجیے، $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو اکائی سمتیہ ہیں، اور θ ان کے درمیان زاویہ θ ہے۔تب $\vec{a} + \vec{b}$ ایک اکائی سمتیہ ہے اگر

(A) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (B) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (C) $\theta = \frac{\pi}{2}$ (D) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

18۔ $\hat{i}.(\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j}\cdot(\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k}\cdot(\hat{i} \times \hat{j})$ کی قدر ہے

(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) 3

19۔ اگر کن ہی دو سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے درمیان زاویہ θ ہے، تب $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ ہے، جب کہ θ برابر ہے

(A) 0 (B) (C) (D)

خلاصہ

- ایک نقطہ P(x,y,z) کا مقامی سمتیہ $\overrightarrow{OP}(=\vec{r}) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ سے دیا گیا ہے، اور اس کی قدر $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ دی گئی ہے۔
- ایک سمتیہ کے عددیہ اجزا اس کی سمت نسبتیں ہیں اور اس کی تظلیل حصہ اس کی اپنی محوروں کے ساتھ ظاہر ہوتا ہے۔
- قدر (r)، سمت نسبتیں (a, b, c) اور سمت کوسائن (l, m, n) کسی بھی سمتیہ کے اس طرح رشتہ رکھتے ہیں۔

$$l = \frac{a}{r}, \quad m = \frac{b}{r}, \quad n = \frac{c}{r}$$

- مثلث کے تین اضلاع کا سمتیہ حاصل جمع ترتیب میں $\vec{0}$ ہے
- دو ہم ابتدائی سمتیوں کا سمتی حاصل جمع متوازی الاضلاع کے وتر سے دیا گیا ہے، جس کے برابر کے اضلاع دیے ہوئے سمتیہ ہیں۔
- ایک دیے ہوئے سمتیہ کی ایک عددیہ λ سے ضرب، سمتیہ کی قدر $|\lambda|$ کے ضریب سے بدل دیتی ہے اور سمت یکساں رکھتی ہے (یا اسے مخالف بنا دیتی ہے)، جیسا کہ λ کی قدر مثبت ہے (یا منفی) ہے۔
- ایک دیے ہوئے سمتیہ $\vec{a}$ کے لیے، سمتیہ $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$، $\vec{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ دیتا ہے۔
- ایک نقطہ R کے مقامی سمتیہ ایک قطع خط کو تقسیم کر رہے ہیں جو کہ نقاط P اور Q سے مل کر بنا ہے اور جس کے مقامی سمتیہ بالترتیب $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہیں، جو کہ نسبت $m:n$ میں ہیں۔

(i) اندرونی طور پر، دیا گیا ہے $\dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$

(ii) بیرونی طور پر دیا گیا ہے $\dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$

- دو دیے ہوئے سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ جن کے درمیان کا زاویہ θ ہے، کا عددیہ حاصل ضرب اس طرح بیان کیا گیا ہے

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

ساتھ ہی، جب کہ $\vec{a}$، $\vec{b}$ دیا گیا ہے، تب سمتیوں $\vec{a}$، $\vec{b}$ کا درمیانی زاویہ کے درمیان کا زاویہ θ اس طرح حاصل کیا جا سکتا ہے

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

- اگر دوسمتوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے درمیان کا زاویہ θ ہے،تب ان کا کراس حاصل ضرب اس طرح دیا گیا ہے

$$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$$

جہاں $\hat{n}$ ایک اکائی سمتیہ ہے اور مستوی کے عمودی ہے جس میں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ موجود ہیں۔ تاکہ $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\hat{n}$ مختص محوروں کا سیدھے ہاتھ کا نظام بناتے ہیں۔

- اگر ہمارے پاس دوسمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ موجود ہیں، جو کہ اجزائی شکل میں اس طرح دیے گئے ہیں $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ اور $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ اور λ کوئی بھی عددیہ ہے۔

تب $\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\hat{i} + (a_2+b_2)\hat{j} + (a_3+b_3)\hat{k}$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

اور
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

تاریخ کے اوراق سے

سمتی (vector) لفظ لاطینی لفظ ویکٹس (Vectus) سے بنا ہے، جس کا مطلب ہے ''لے جانا'' جدید سمتی نظریہ کی پیدائش کے خیالات کی تاریخ تقریباً 1800 ہے جب کیسپر ویسل (1745-1818) Caspar Wessel جین روبرٹ آرگنڈ (1768-1822) Jean Robert Argand نے بیان کیا کہ کس طرح پیچیدہ عدد $a + ib$ کی اک مخفی مستوی میں سمت وار قطع خط کی مواد سے وضاحت کی جاتی ہے۔ ایک آئیر لینڈ کا رہنے والا ریاضی داں ولیم روون ہیملٹن (1805-1865) William Rowen Hamilton پہلا شخص تھا جس نے اپنی کتاب Lectures on Quaternions (1853) میں سمت وار قطع خط کے لیے سمتی لفظ کا استعمال کیا۔ ہیملٹن کے طریقے میں (چار حقیقی اعداد والا ایک ترتیبی سیٹ جو اس طرح دیا گیا ہے: $a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k}$, $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$، جس میں کچھ الجبرے کے اصول استعمال کیے گئے ہیں) سہ ابعادی خلا میں ضربی سمتوں کے مسئلہ کا حل تھا۔ حالانکہ، ہمیں یہاں مشق میں یہ بتانا

ضروری ہے کہ سمتی کے تصور کا خیال اوران کا مجموعہ پہلے سے ہی ارستو (.Aristotle (384 -3558 B.C کے وقت سے معلوم تھا، جوکہ گریک کے ایک مشہور فلسفی تھے، اور پلیٹو (.Plato(427-348 B. C کے شاگرد تھے۔اس وقت یہ مانا جاتا تھا کہ دو یا دو سے زیادہ قوتوں کا مجموعی عمل متوازی الاضلاع قانون سے مجموعہ کر کے دیکھا جا سکتا ہے۔ترکیب اجزائی قوتوں کا صحیح قانون، کہ قوتیں راسی طور پر جمع ہوتی ہیں، اسٹیون سمتی (1548-1620) Stevin-Simon کے ذریعہ عمودی قوتوں کے کیس میں معلوم کیا جا چکا تھا۔1586، اے۔ڈی میں اس نے اپنے رسالہ DeBeghinselen der Weeghconst (''وزن کرنے کی فن کاری کے اصول'') میں قوتوں کے مجموعہ کے جیومیٹریائی اصول پر نظر ثانی کی، لیکن سمتوں کے عام نظریہ کو بنانے میں پھر 200 سال لگ گئے۔

1880 میں جوزہ ولارڈ گبس (1839-1903) Josaih Willard Gibbs، ایک امریکی ماہر فزکس اور ریاضی داں، اور اولیور ہیویسائیڈ (1850-1925)Oliver Heaviside، ایک برطانوی انجینئر، نے جسے اب ہم سمتی تحلیل vector analysis کہتے ہیں کو ضروری طور پر حقیقی (عددیہ) حصہ کو اس کے غیر حقیقی (سمتی) حصہ سے الگ کر کے بنایا۔ 1881 اور 1884 میں گبس نے ایک رسالہ شائع کیا جس کا نام Element of Vector Analysis تھا۔اس کتاب نے سمتیوں کو ایک طریقہ وار اور چھوٹے انداز سے سمجھایا۔حالانکہ، سمتوں کے استعمال کو سمجھانے کا زیادہ تر سہرا، ڈی۔ہیوی سائیڈ D. Heaviside اور پی۔جی۔ٹیٹ (1831-1901) P.G. Tait کے سر بندھا، جنھوں نے اس مضمون کی خاص امداد کی۔