



5264CH02

باب دو

برق سکونی مضمرا اور صلاحیت (ELECTROSTATIC POTENTIAL AND CAPACITANCE)

2.1 تعارف (INTRODUCTION)

باب 6 اور باب 8 (درجہ xi) میں وضعی توانائی (توانائی بالقوة Potential energy) کے تصور سے متعارف کرایا گیا تھا۔ جب ایک باہری قوت، ایک جسم ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک لے جانے میں، کسی دوسری قوت، جیسے اسپرنگ قوت یا مادی کشش قوت، کے خلاف کام کرتی ہے تو یہ کام جسم میں بہ طور وضعی توانائی محفوظ ہو جاتا ہے۔ جب باہری قوت ہٹالی جاتی ہے تو جسم حرکت کرنے لگتا ہے اور حرکی توانائی حاصل کرتا ہے اور وضعی توانائی کی یکساں مقدار ضائع کر دیتا ہے۔ اس طرح حرکی اور وضعی توانائیوں کے حاصل جمع کی بقا ہوتی ہے۔ اس قسم کی قوتیں، بقائی قوتیں کہلاتی ہیں۔ اسپرنگ قوت اور مادی کشش قوت، بقائی قوتوں کی مثالیں ہیں۔

دو (ساکن) چارجوں کے درمیان کولمب قوت بھی ایک بقائی قوت ہے۔ یہ کوئی تعجب خیز بات نہیں ہے، کیونکہ دونوں (برقی قوت اور مادی کشش قوت) فاصلے کے مربع کے مقلوب کے تابع ہیں اور صرف تناسبیت کے مستقلوں کی قدر کے لحاظ سے ہی مختلف ہیں۔ مادی کشش قانون میں شامل کمیتیں، کولمب کے قانون میں چارجوں سے تبدیل ہو جاتی ہیں۔ اس لیے ایک مادی کشش میدان میں ایک کمیت کی وضعی توانائی کی طرح، ہم ایک برقی میدان میں ایک چارج کی برق سکونی وضعی توانائی کی تعریف کر سکتے ہیں۔

برق سکونی مضمر اور صلاحیت

کسی چارج تشکیل کی وجہ سے پیدا ہونے والا برق سکونی میدان لیجیے۔ پہلے، آسانی کے لیے، مبدے پر رکھے ہوئے ایک چارج Q کی وجہ سے پیدا ہونے والے برق سکونی میدان کو لیجیے۔ اب تصور کیجیے کہ ہم نقطہ R سے نقطہ P تک، ایک ٹیسٹ چارج q ، اس پر لگ رہی چارج Q کی وجہ سے دفاعی قوت کے خلاف، لاتے ہیں۔ شکل 2.1 کے مطابق ایسا تب ہوگا، جب Q اور q دفاعی قوت کے خلاف، نقطہ R سے نقطہ P تک ایک ٹیسٹ چارج (>0) دونوں مثبت ہوں یا دونوں منفی ہوں۔ مان لیجیے: $Q, q > 0$

q لایا جاتا ہے۔

یہاں دو اہم باتیں کہی جاسکتی ہیں۔ پہلی، ہم نے فرض کر لیا ہے کہ ٹیسٹ چارج q اتنا چھوٹا ہے کہ یہ اصل تشکیل (Original configuration) میں، یعنی کہ مبدے پر رکھے چارج Q ، میں خلل انداز نہیں ہوتا (یا پھر ہم Q کو مبدے پر، کسی غیر متعین قوت کے ذریعے قائم رکھتے ہیں)۔ دوسری، چارج q کو R سے P تک لانے میں ہم ایک باہری قوت $\vec{F}_{ext}$ لگاتے ہیں۔ جو صرف اتنی ہوتی ہے کہ دفاعی برق قوت $\vec{F}_E$ کے اثر کو رد کر سکے (یعنی کہ $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_E$)۔ اس کا مطلب ہے کہ جب چارج q کو R سے P تک لایا جاتا ہے تو اس پر کوئی کل قوت یا اسراع نہیں ہوتا، یعنی کہ اسے لامتناہی خفیف آہستہ مستقلہ چال کے ساتھ لایا جاتا ہے۔ اس صورت میں باہری قوت کے ذریعے کیا گیا کام، برق قوت کے ذریعے کیے گئے کام کا منفی ہوتا ہے اور چارج q کی وضعی توانائی کی شکل میں مکمل طور پر محفوظ ہو جاتا ہے۔ اگر P پر پہنچتے ہی، باہری قوت کو ہٹا لیا جائے، تو برق قوت چارج کو Q سے دور لے جائے گی۔ P پر محفوظ ہوئی توانائی (ضعی توانائی) چارج q کو حرکی توانائی مہیا کرنے میں استعمال ہوتی ہے، اس طرح کہ حرکی اور وضعی توانائیوں کے حاصل جمع کی بقا ہوتی ہے۔

اس لیے، چارج q کو R سے P تک لانے میں باہری قوتوں کے ذریعے کیا گیا کام ہے،

$$W_{RP} = \int_R^P \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = - \int_R^P \vec{F}_E \cdot d\vec{r} \quad (2.1)$$

یہ کیا ہوا کام، برق سکونی دفاعی قوت کے خلاف ہے اور بہ طور وضعی توانائی محفوظ ہو جاتا ہے۔

برقی میدان میں ہر نقطہ پر، ایک چارج کے ذرہ میں کچھ برق سکونی وضعی توانائی ہوتی ہے۔ یہ کیا گیا کام اس

کی وضعی توانائی میں اضافہ کر دیتا ہے اور یہ اضافہ نقاط R اور P کے درمیان وضعی توانائی فرق کے مساوی ہوتا ہے۔

اس لیے وضعی توانائی فرق

$$\Delta U = U_P - U_R = W_{RP} \quad (2.2)$$

[نوٹ کریں کہ یہ نقل (2.2) (displacement) 'برقی قوت کی مخالف سمت میں ہے اور اس لیے برقی

میدان کے ذریعے کیا گیا کام منفی ہے، یعنی کہ $(-W_{RP})$]

اس لیے ہم دو نقاط کے درمیان برقی وضعی توانائی فرق کی تعریف اسی طرح کر سکتے ہیں: یہ چارج q کو ایک



کاؤنٹ الے سینڈرو وولٹا (1745-1827)
(Count Alessandro Volta)

اطلی کے طبیعیات داں یا دیا میں پروفیسر نے ثابت کیا کہ 1737-1798 میں لوئی گئی گالوانی (Lvgi galvani) نے مینڈک کے عضلاتی بافتوں (Musltissues) کو غیر یکساں دھاتوں کے ساتھ تماس میں لا کر کیے گئے تجربوں کے ذریعے حیوانی برق کا جو مشاہدہ کیا تھا، اس کی وجہ حیوانی بافتوں کی کوئی مخصوص خاصیت نہیں تھی بلکہ جب بھی کسی گیلے جسم کو دو غیر یکساں دھاتوں کے درمیان ملفوف (Sandwich) کیا جاتا ہے تو یہ برق پیدا ہوتی ہے۔ اسی دریافت نے ان کی رہنمائی پہلا وولٹائی ڈھیر (Voltaic Pile) یا بیٹری بنانے تک کی جو کارڈ بورڈ (برق باشہ) کی بہت سی گیلی قرصوں (Discs) پر مشتمل تھا، جنہیں دھات کی قرصوں کے درمیان ملفوف کیا گیا تھا (برقیرے)۔

اختیاری چارج تشکیل کے میدان میں ایک نقطہ سے دوسرے نقطے تک حرکت دینے (بغیر اسراع پیدا کیے) میں ایک باہری قوت کے ذریعے کیا گیا کام ہے۔

یہاں پر دو اہم تبصرے کیے جاسکتے ہیں:

- (i) مساوات (2.2) کی دائیں جانب صرف چارج کے ابتدائی اور اختتامی مقامات کے تابع ہے۔ اس کا مطلب ہوا کہ ایک برق سکونی میدان کے ذریعے چارج کو ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک حرکت دینے میں کیا گیا کام ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک پہنچنے کے لیے اختیار کیے گئے راستے کے غیر تابع ہے۔ یہ بقائی قوت کی بنیادی خاصیت ہے۔ وضعی توانائی کا تصور بامعنی نہیں ہوگا، اگر کام، راستہ کے تابع ہو۔ ایک برق سکونی میدان کے ذریعے کیے گئے کام کا راستہ کے غیر تابع ہونا، کولمب کا قانون استعمال کر کے، ثابت کیا جاسکتا ہے ہم یہاں یہ ثبوت پیش نہیں کر رہے ہیں۔
- (ii) مساوات (2.2) 'طبعی طور پر بامعنی مقدار کام' کی شکل میں 'وضعی توانائی فرق' کی تعریف کرتی ہے۔ ظاہر ہے کہ اس طرح معرف کی گئی وضعی توانائی ایک جمعی مستقلہ (Additive constant) سے غیر متعین ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ وضعی توانائی کی حقیقی قدر، طبعی طور پر اہم نہیں ہے، صرف وضعی توانائی کا فرق ہی اہمیت رکھتا ہے۔ ہم ہمیشہ ہر نقطے پر وضعی توانائی میں ایک اختیاری مستقلہ α جمع کر سکتے ہیں۔ کیونکہ اس سے وضعی توانائی فرق تبدیل نہیں ہوگا:

$$(U_P + \alpha) - (U_R + \alpha) = U_P - U_R$$

دوسرے الفاظ میں، ہمیں وہ نقطہ منتخب کرنے کی آزادی ہے؛ جہاں وضعی توانائی صفر ہے۔ ایک سہل انتخاب یہ ہے کہ برق سکونی وضعی توانائی کو لا انتہا (infinity) پر صفر مانا جائے۔ اس انتخاب کے ساتھ، اگر ہم نقطہ R کو لا انتہا پر مان لیں تو مساوات (2.2) سے حاصل ہوتا ہے:

$$W_{\infty P} = U_P - U_{\infty} = U_P \quad (2.3)$$

کیونکہ نقطہ P اختیاری ہے، مساوات (2.3) 'چارج q' کی کسی بھی نقطہ پر وضعی توانائی کی تعریف مہیا کرتی ہے۔ چارج q کی ایک نقطہ پر وضعی توانائی (کسی چارج تشاکل کی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدان میں)، باہری قوت (برقی قوت کے مساوی اور مخالف) کے ذریعے، چارج q کو لا انتہا سے اس نقطہ تک لانے میں کیا گیا کام ہے۔

2.2 برق سکونی مضمر (Electrostatic Potential)

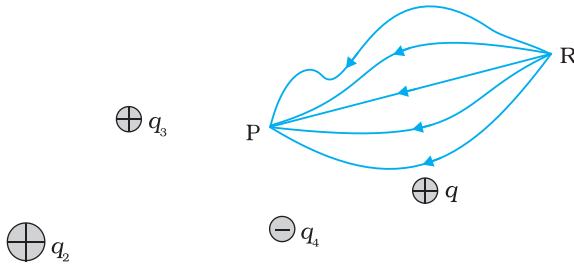
کوئی بھی ایک عمومی سکونی چارج تشکیل لیں۔ ہم ایک ٹیسٹ چارج q کی وضعی توانائی کو چارج q ہر کیے گئے کام کی شکل میں معرف کرتے ہیں۔ کیونکہ کسی بھی نقطہ پر قوت qE ہے، جہاں E دی ہوئی چارج تشکیل کی وجہ سے اس نقطہ پر پیدا ہونے

برق سکونی مضمر اور صلاحیت

والا برقی میدان ہے۔ اس لیے، سہولت اس میں ہے کہ کام کو چارج q کی مقدار سے تقسیم کر دیا جائے تاکہ حاصل ہونے والی مقدار q کے غیر تابع ہو۔ دوسرے لفظوں میں، کیا گیا کام فی اکائی ٹیسٹ چارج، چارج تشکیل سے منسلک برقی میدان کی خاصیت ہے۔ اس سے دی ہوئی چارج تشکیل کی وجہ سے برق سکونی مضمر V کے صورت تک رہنمائی ہوتی ہے۔ مساوات (2.1) سے R سے P تک ایک اکائی مثبت چارج کو لانے میں باہری قوت کے ذریعے کیا گیا کام

$$V_P - V_R \left(= \frac{U_P - U_R}{q} \right) \quad (2.4)$$

جہاں V_P اور V_R بالترتیب P اور R پر برق سکونی مضمر ہیں۔ نوٹ کریں کہ پہلے کی طرح ہی، مضمر کی اصلی قدر نہیں بلکہ مضمر فرق طبعی طور پر اہم ہے۔ اگر پہلے کی طرح، ہم لا انتہا پر مضمر کو صفر منتخب کریں، مساوات (2.4) سے اخذ کیا جاسکتا ہے:



ایک باہری قوت کے ذریعے، ایک اکائی مثبت چارج کو لا انتہا سے ایک نقطہ تک لانے میں کیا گیا کام = اس نقطہ پر برق سکونی مضمر (V)

دوسرے الفاظ میں، برق سکونی میدان کے کسی بھی علاقے میں، ایک نقطہ پر برق سکونی مضمر (V)، ایک اکائی مثبت چارج کو لا انتہا سے اس نقطہ تک لانے میں (بغیر اسراع کے) کیا گیا کام ہے۔

شکل 2.2: کسی بھی دی ہوئی چارج تشکیل کی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدان کے ذریعے ایک ٹیسٹ چارج پر کیا گیا کام راستے کے غیر تابع ہے اور صرف اس کے آغازی اور اختتامی نقاط کے تابع ہے۔

لا انتہا ہی قلیل ٹیسٹ چارج

کرنا چاہیے اور پھر نسبت

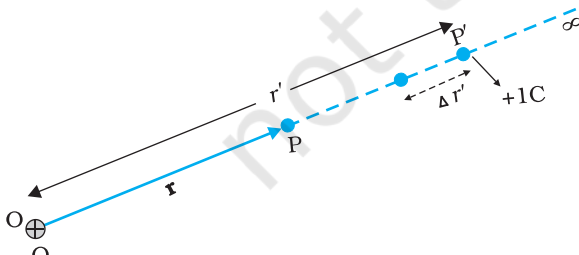
قوت کے مساوی اور مخالف ہونا

وضعی توانائی سے متعلق ہم نے جو اہم نکات بیان کیے تھے ان کا اطلاق مضمر کی تعریف پر بھی ہوتا ہے۔ کیا گیا کام فی اکائی ٹیسٹ چارج حاصل کرنے کے لیے ہمیں ایک لینا چاہیے اور پھر اسے لا انتہا سے اس نقطہ تک لانے میں کیا گیا کام δW معلوم معلوم کرنا چاہیے۔ مزید یہ کہ راستے کے ہر نقطے پر باہری قوت اس نقطہ پر برق سکونی چاہیے۔

2.3 ایک نقطہ چارج کی وجہ سے مضمر

(Potential due to a Point Charge)

ایک نقطہ چارج q ، مبدے پر لیں (شکل 2.3)۔ متعین کرنے کے لیے Q کو مثبت مان لیں۔ ہم کسی بھی نقطہ P پر مضمر معلوم کرنا چاہتے ہیں، جس کا مبدے سے مقام سمتیہ r ہے۔ اس کے لیے، ہمیں ایک اکائی مثبت ٹیسٹ چارج کو لا انتہا سے نقطہ P تک لانے میں کیے گئے کام کی تحسین کرنا ہوگی۔ $Q > 0$ کے لیے دفاعی قوت کے خلاف ٹیسٹ چارج پر کیا گیا کام مثبت ہے۔ کیونکہ کیا گیا کام راستے کے غیر تابع ہے، ہم ایک سہل راستہ منتخب



شکل 2.3: چارج Q ($Q > 0$) کی دفاعی قوت کے خلاف ایک اکائی مثبت ٹیسٹ چارج کو لا انتہا سے نقطہ P تک لانے میں کیا گیا کام۔

کرتے ہیں۔ نصف فطری سمت کی جانب لا انتہا سے نقطہ P تک۔ راستے کے کسی درمیانی نقطہ P' پر ایک اکائی مثبت چارج پر برق سکونی قوت ہے:

$$\frac{Q \times 1}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \hat{r}' \quad (2.5)$$

جہاں OP' کی جانب اکائی سمتیہ ہے۔ اس قوت کے خلاف $\vec{r}'$ سے $\vec{r}' + \Delta\vec{r}'$ تک کیا گیا کام ہے

$$(2.6)$$

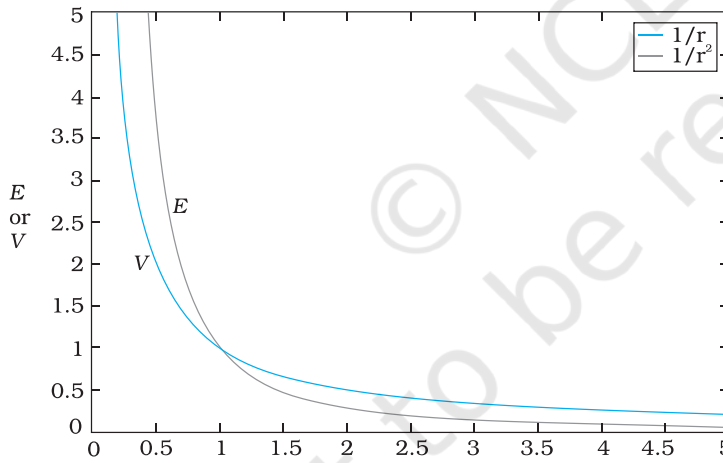
منفی علامت اس لیے آتی ہے کیونکہ $\Delta r' < 0$ کے لیے ΔW مثبت ہے۔ باہری قوت کے ذریعے کیا گیا کل کام (W) مساوات (2.6) کا $r' = \infty$ سے $r' = r$ تک مکملہ کر کے حاصل ہوتا ہے

$$W = -\int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{\infty}^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.7)$$

یہ تعریف کے مطابق چارج Q کی وجہ سے P پر مضمرب ہے

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.8)$$

مساوات (2.8) چارج کی کسی بھی علامت کے لیے



صادق ہے حالانکہ ہم نے اس اشتقاق (Derivation) میں $Q > 0$ مانا تھا۔ $Q < 0$ کے لیے $V < 0$ یعنی کہ اکائی مثبت چارج کو لا انتہا سے اس نقطہ تک لانے میں کیا گیا کام (باہری قوت کے ذریعے) فی اکائی ٹیسٹ چارج، منفی ہے۔ یہ ایسا کہنے کے مرادف ہے کہ لا انتہا سے نقطہ P تک اکائی مثبت چارج کو لانے میں برق سکونی قوت کے ذریعے کیا گیا کام مثبت ہے۔ [یہ ہی ہونا چاہیے، کیونکہ $Q < 0$ کے لیے اکائی مثبت ٹیسٹ چارج پر قوت، کششی ہے، اس طرح برق سکونی قوت اور نقل (لا انتہا سے P تک) یکساں سمت میں ہیں]۔ آخر میں ہم نوٹ کرتے ہیں کہ مساوات (2.8) لا انتہا پر مضمرب کو صفر منتخب کرنے سے موافقت رکھتی ہے۔

شکل 2.4: ایک نقطہ چارج Q کے لیے مضمرب V کی r کے ساتھ $\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\right) m^{-1}$ کی اکائیوں میں تبدیلی (نیلا تختی) اور برقی میدان کی r کے ساتھ $\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\right) m^{-2}$ کی اکائیوں میں تبدیلی (کالا تختی)

شکل (2.4) میں دکھایا گیا ہے کہ برقی سکونی مضمرب $\left(\frac{1}{r}\right)$ اور برقی سکونی میدان $\left(\frac{1}{r^2}\right)$ کے ساتھ کیسے

تبدیل ہوتے ہیں۔

مثال 2.1

(a) $4 \times 10^{-7} \text{ C}$ کے چارج کی وجہ سے ایک نقطہ P پر جو چارج سے 9cm دور ہے، مضمر کا حساب لگائیے
(b) اس کی مدد سے لا انتہا سے نقطہ P تک $2 \times 10^{-9} \text{ C}$ کے ایک چارج کو لانے میں کیا گیا کام حاصل کیجیے
کیا جواب اس راستہ کے تابع ہے جس راستے سے چارج کو لایا گیا ہے۔

حل

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times \frac{4 \times 10^{-7} \text{ C}}{0.09 \text{ m}} \quad (a)$$

$$= 4 \times 10^4 \text{ V}$$

$$W = qV = 2 \times 10^{-9} \text{ C} \times 4 \times 10^4 \text{ V} \quad (b)$$

$$= 8 \times 10^{-5} \text{ J}$$

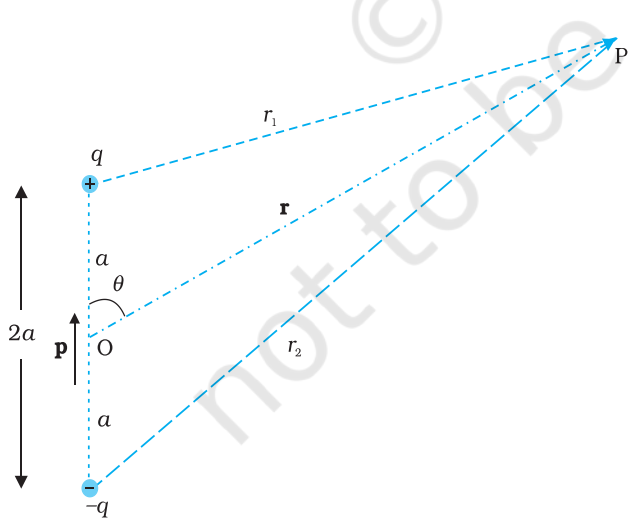
نہیں، کیا گیا کام، راستے کے غیر تابع ہوگا۔ ایک اختیاری لا انتہا خفیف راستہ کو دو باہم عمودی نقطوں میں تحلیل کیا جاسکتا ہے: ایک $\vec{r}$ کی جانب اور دوسرا $\vec{r}$ پر عمود۔ دوسرے سے مطابقت رکھنے والا کیا گیا کام صفر ہوگا۔

مثال 2.1

2:4 ایک برقی دو قطبی کی وجہ سے مضمر

(Potential due to a Point Charge)

جیسا کہ ہم پچھلے باب میں سیکھ چکے ہیں، ایک برقی دو قطبی دو چارجوں q اور $-q$ پر مشتمل ہوتا ہے، جن کا درمیانی فاصلہ $2a$ ہوتا ہے۔ اس کا کل چارج صفر ہے۔ اس کی خاصیت اس کا دو قطبی



معیار اثر سمتیہ $\vec{P}$ ہے جس کی عددی قدر $qx2a$ ہے اور جس کی سمت $-q$ سے q کی جانب ہوتی ہے (شکل 2.5)۔ ہم نے یہ بھی دیکھا تھا کہ ایک نقطہ پر جس کا مقام سمتیہ $\vec{r}$ ہے، ایک دو قطبی کا برقی میدان نہ صرف عددی قدر r کے تابع ہے بلکہ $\vec{r}$ اور $\vec{P}$ کے درمیانی زاویہ کے بھی تابع ہے۔ مزید یہ کہ بڑے فاصلوں پر برقی میدان $\frac{1}{r^2}$ کی مناسبت سے کم نہیں ہوتا (جو کہ ایک واحد چارج کی وجہ سے پیدا ہونے والے میدان کی خاصیت ہے) بلکہ $\frac{1}{r^3}$ کی مناسبت سے کم ہوتا ہے۔ اب ہم ایک برقی دو قطبی کی وجہ سے مضمر معلوم کریں گے اور اس کا موازنہ ایک واحد چارج کی وجہ سے مضمر سے کریں گے۔

شکل 2:5: ایک دو قطبی کی وجہ سے مضمر کی تحسیب میں شامل مقداریں۔

کہ برقی میدان، انطباق کے اصول کی پابندی کرتا ہے۔ کیونکہ مضمر اور میدان کے ذریعے کیے گئے کام میں رشتہ ہے، برق۔ سکونی مضمر بھی انطباق کے اصول کا پابند ہے۔ اس لیے، دو قطبی کی وجہ سے مضمر چارجوں q اور $-q$ کی وجہ سے مضمروں کا حاصل جمع ہے۔

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) \quad (2.9)$$

جہاں اور بالترتیب نقطہ P کے q اور $-q$ سے فاصلے ہیں۔
اب، جیومیٹری سے،

$$r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta \quad (2.10)$$

اب ہم r کو a کے مقابلے میں بہت بڑا لیتے ہیں ہیں $(r \gg a)$ اور کے صرف پہلے درجے تک کے ارکان ہی لیتے ہیں۔

$$r_1^2 = r^2 \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right) \cong r^2 \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} \right) \quad (2.11)$$

اسی طرح

$$r_2^2 \cong r^2 \left(1 + \frac{2a \cos \theta}{r} \right) \quad (2.12)$$

دور کنی مسئلہ استعمال کرتے ہوئے اور میں صرف پہلے درجے تک کے ارکان لیتے ہوئے

$$\frac{1}{r_1} \cong \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} \cong \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right) \quad (2.13a)$$

$$\frac{1}{r_2} \cong \frac{1}{r} \left(1 + \frac{2a \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} \cong \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right) \quad (2.13b)$$

مساوات (2.13) اور مساوات (2.9) $P = 2qa$ استعمال کرتے ہوئے حاصل ہوتا ہے

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cos \theta}{r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.14)$$

اب،

جہاں $\hat{r}$ ، مقام سمتیہ $\vec{OP}$ کی جانب اکائی سمتیہ ہے۔
اب ایک دو قطبی کا برقی مضمر دیا جاتا ہے:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cdot \mathbf{r}}{r^2}; \quad (r \gg a) \quad (2.15)$$

مساوات (2.15) جیسا کہ نشاندہی کی گئی ہے، دو قطبی کے سائز کے مقابلے میں صرف بہت بڑے فاصلوں کے لیے ہی نزدیکی طور پر صادق ہے، اس طرح کہ $\frac{a}{r}$ میں بڑے درجے کے ارکان قابل نظر انداز ہیں۔ مبدے پر رکھے ایک نقطہ دو قطبی کے لیے بہر حال مساوات (2-18) قطعی درست ہے۔

مساوات (2.15) سے، دو قطبی کے محور پر مضمر $(\theta = 0, \pi)$ دیا جاتا ہے:

$$V = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{r^2} \quad (2.16)$$

$(\theta = 0)$ کے لیے مثبت علامت اور $\theta = \pi$ کے لیے منفی علامت)۔ استوائی مستوی $(\theta = \frac{\pi}{2})$ میں

مضمر صفر ہے۔

مساوات (2.8) اور مساوات (2.15) سے ایک دو قطبی کے مضمر اور ایک واحد چارج کے مضمر میں اہم فرق واضح

ہو جاتے ہیں:

(i) ایک دو قطبی کی وجہ سے مضمر صرف r کے تابع نہیں ہے بلکہ مقام سمتیہ $\bar{r}$ اور دو قطبی معیار اثر سمتیہ $\bar{P}$ کے مابین زاویہ کے بھی تابع ہے۔ [حالانکہ یہ $\bar{P}$ کے گرد محوری متشاکل (axially Symmetric) ہے۔ یعنی کہ اگر آپ کے گرد مقام سمتیہ $\bar{R}$ کو گردش دیں، θ کو قائم (Fixed) رکھتے ہوئے اس طرح تشکیل پائے مخروط پر p کے مطابق نقاط پر وہی مضمر ہوگا جو P پر ہے۔]

(ii) برقی دو قطبی مضمر بڑے فاصلوں پر $\frac{1}{r^2}$ کی نسبت سے کم ہوتا ہے، $\frac{1}{r}$ کی نسبت سے نہیں، جو کہ واحد چارج کی وجہ سے مضمر کی خاصیت ہے۔ [آپ شکل 2.5 میں $\frac{1}{r^2}$ بہ مقابلہ r اور $\frac{1}{r}$ یہ مقابلہ r کے گراف دیکھ سکتے ہیں، جنہیں وہاں کسی اور تناظر میں کھینچا گیا ہے۔]

2.5 چار جوں کے ایک نظام کی وجہ سے مضمر

(Potential due to a System of Charges)

چار جوں: $q_1, q_2, \dots, q_n$ کا ایک نظام تصور کیجئے، جن کے مقام سمتیہ کسی مبدے کی مناسبت سے (شکل 2.6) ہیں۔ P پر چارج q کی وجہ سے مضمر V_1 ہے:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{1P}}$$

جہاں q_1, r_{1P} اور P کا درمیانی فاصلہ ہے۔

اسی طرح، q_2 کی وجہ سے مضمر V_2 اور q_3 کی وجہ سے مضمر V_3 دیے

جاتے ہیں:

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{2P}}; V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_{3P}}$$

جہاں r_{2P} اور r_{3P} ، P کے، بالترتیب، q_2 اور q_3 سے فاصلے ہیں۔ اسی طرح دوسرے چارجوں کی وجہ سے مضمر بھی ہوں گے۔ انطباق کے اصول کے ذریعے، کل چارج تشکیل کی وجہ سے P پر مضمر V انفرادی چارجوں کی وجہ سے مضمرات کا الجبرائی حاصل جمع ہے:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n \quad (2.17)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{1P}} + \frac{q_2}{r_{2P}} + \dots + \frac{q_n}{r_{nP}} \right) \quad (2.18)$$

اگر ہمارے پاس ایک مسلسل چارج تقسیم ہے، جس کی چارج کثافت $\rho(\vec{r})$ ہے، تو ہم پہلے کی طرح، اسے چھوٹے حجموں میں تقسیم کر لیتے ہیں، جن میں سے ہر جز کا سائز $\rho \Delta V$ ہے اور اس پر کل چارج $\rho \Delta V$ ہے۔ پھر ہم ہر حجم جز کی وجہ سے مضمر معلوم کرتے ہیں اور ایسے تمام حصوں کو جمع (بالکل درست طور پر، تکمیل) کر لیتے ہیں اور اس طرح پوری تقسیم کی وجہ سے مضمر معلوم کر لیتے ہیں۔

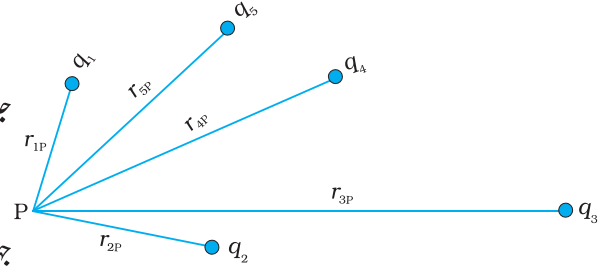
ہم باب 1 میں دیکھ چکے ہیں کہ ایک ہموار طور پر برقیائے ہوئے (چارج کیے ہوئے) کروی شیل کے لیے، شیل کے باہر برقی میدان ایسا ہوتا ہے جیسے کہ شیل کا پورا چارج اس کے مرکز پر مرکوز ہو، اس لیے، شیل کے باہر مضمر دیا جاتا ہے:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (r \geq R) \quad [2.19(a)]$$

جہاں q شیل پر کل چارج ہے اور R اس کا نصف قطر ہے۔ شیل کے اندر برقی میدان صفر ہے۔ اس سے اخذ کیا جاسکتا ہے (حصہ 2.6) کہ شیل کے اندر مضمر مستقل ہے (کیونکہ شیل کے اندر ایک چارج کو حرکت دینے میں کوئی کام نہیں کیا جاتا) اور اس لیے اس کی قدر سطح پر قدر کے مساوی ہے جو ہے

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad [2.19(b)]$$

مثال 2.2: $3 \times 10^{-8} \text{C}$ اور $-2 \times 10^{-8} \text{C}$ کے دو چارج ایک دوسرے سے 15cm کے فاصلے پر رکھے ہیں۔ ان دونوں چارجوں کو ملانے والے خط کے کس نقطے پر برقی مضمر صفر ہے؟ لا انتہا پر مضمر کو صفر مانئے۔
حل: ہم مثبت چارج کے مقام پر مبدا فرض کر لیتے ہیں۔ ان دونوں چارجوں کو ملانے والے خط کو x -محور مان لیتے ہیں۔ اور منفی چارج کو مبدا کے دائیں جانب مان لیتے ہیں۔ (شکل 2.7)



شکل 2.6: ایک نقطہ پر چارجوں کے ایک نظام کی وجہ سے مضمر انفرادی چارجوں کی وجہ سے مضمرات کا حاصل جمع ہے۔



شکل 2.7

غرض کیجیے $-x$ P محور پر وہ مطلوبہ نقطہ ہے جہاں مضمر صفر ہے۔ اگر P کا $-x$ کو آرڈی نیٹ x ہے تو ظاہر ہے کہ x مثبت ہوگا۔ (ایسا کوئی امکان نہیں ہے کہ $x < 0$ کے لیے دونوں چارجوں کی وجہ سے مضمرات کا حاصل جمع صفر ہو)۔ اگر x ، O اور A کے درمیان ہے تو ہمارے پاس ہے

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3 \times 10^{-8}}{x \times 10^{-2}} - \frac{2 \times 10^{-8}}{(15 - x) \times 10^{-2}} \right] = 0$$

جہاں x سینٹی میٹر میں ہے۔

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{15 - x} = 0$$

جس سے حاصل ہوتا ہے: $x = 9 \text{ cm}$

اگر x بڑھائے ہوئے خط OA پر ہے تو مطلوبہ شرط ہے:

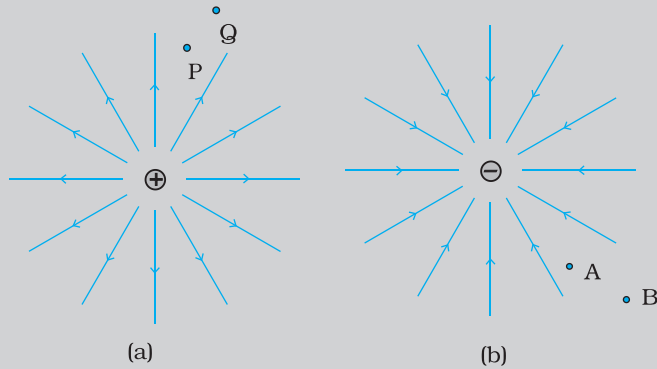
$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x - 15} = 0$$

جس سے حاصل ہوتا ہے: $x = 45 \text{ cm}$

اس لیے برقی مضمر مثبت چارج سے منفی چارج کی جانب 9 cm اور 45 cm فاصلے پر صفر ہے۔ نوٹ کریں کہ تحسب میں استعمال کیا گیا مضمر کا فارمولہ اب ہی استعمال کیا جاسکتا ہے جب لا انتہا پر مضمر کو صفر منتخب کیا جائے۔

مثال 2.2

مثال 2.3(a): 2.8 اور 2.8(b) شکلوں میں بالترتیب ایک مثبت چارج اور ایک منفی چارج کے میدانی خطوط دکھائے گئے ہیں۔



شکل 2.8

- (a) مضمر فرق: $V_P - V_Q$ اور $V_B - V_A$ کی علامتیں بتائیے
- (b) نقاط Q اور P، A اور B کے درمیان ایک قلیل مقدار کے منفی چارج کے مضمر توانائی فرق کی علامت بتائیے۔
- (c) Q سے P تک ایک قلیل مثبت چارج کو لے جانے میں میدان کے ذریعے کیے گئے کام کی علامت بتائیے۔
- (d) B سے A تک ایک قلیل منفی چارج کو لے جانے میں باہری ایجنسی کے ذریعے کیے گئے کام کی علامت بتائیے۔

حل:

- (a) کیونکہ $V \propto \frac{1}{r}$ ، $V_P > V_Q$ ، اس لیے $(V_P - V_Q)$ مثبت ہے۔ اور V_A ، V_B سے مقابلتاً کم
- منفی ہے اس لیے $V_B > V_A$ یا $(V_B - V_A)$ مثبت ہے۔
- (b) ایک قلیل منفی چارج، مثبت چارج کی جانب کشش ہوگا۔ یہ منفی چارج مقابلتاً زیادہ مضمر توانائی سے مقابلتاً کم مضمر توانائی کی طرف حرکت کرتا ہے۔ اس لیے P اور Q کے درمیان ایک قلیل منفی چارج کے مضمر توانائی فرق کی علامت مثبت ہوگی۔
- اسی طرح، $(P.E)_A > (P.E)_B$ اس لیے مضمر توانائی فرق کی علامت مثبت ہے۔
- (c) Q سے P تک، ایک قلیل مثبت چارج کو لے جانے میں، ایک باہری ایجنسی کو برقی میدان کے خلاف کام کرنا ہوگا۔ اس لیے برقی میدان کے ذریعے کیا گیا کام منفی ہوگا۔
- (d) B سے A تک، ایک منفی چارج کو لے جانے میں، باہری ایجنسی کے ذریعے کام کیا جائے گا۔ یہ مثبت ہے۔
- (e) منفی چارج پر دفع کی قوت کی وجہ سے رفتار کم ہوتی ہے اور اس لیے B سے A تک جانے میں حرکی توانائی کم ہوتی ہے۔

برقی مضمر، مساوی مضمر سطحیں:

http://video.mit.edu/watch/4-electrostatic-potential-energy-ev-conservative-field-equipotential-surfaces-12584

مثال 2.3

2.6 مساوی مضمر سطحیں (Equipotential Surfaces)

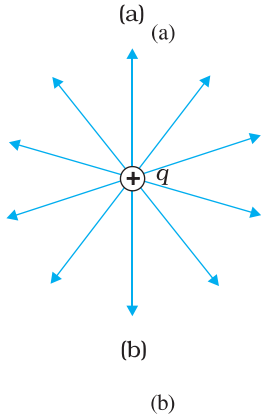
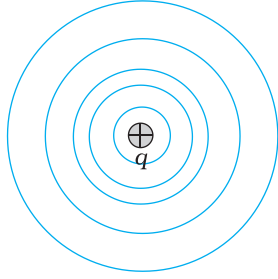
ایک مساوی مضمر سطح وہ سطح ہے جس سطح پر تمام نقطوں پر مضمر کی ایک مستقلہ قدر ہو۔ ایک واحد چارج q کے لیے، مضمر مساوات (2.8) سے دیا جاتا ہے۔

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ V ایک مستقلہ ہوگا، اگر r مستقلہ ہو۔ اس لیے ایک واحد نقطہ چارج کی مساوی مضمر سطحیں، وہ ہم مرکز کر دی سطحیں ہیں، جن کا مرکز چارج ہو۔

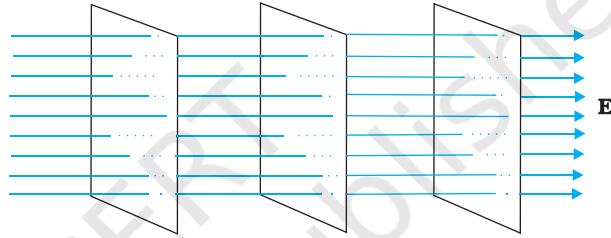
اب، ایک واحد چارج q کے برقی میدانی خطوط نصف قطری خطوط ہیں جو چارج سے شروع ہوتے ہیں یا چارج پر ختم

برق سکونی مضمر اور صلاحیت



ہوتے ہیں جو اس پر منحصر ہے کہ q مثبت ہے یا منفی۔ ظاہر ہے کہ ہر نقطہ پر برقی میدان اس نقطہ سے گزرنے والی مساوی مضمر سطح پر عمود ہوگا۔ یہ عمومی طور پر درست ہے: کسی بھی چارج تشکیل کے لیے ایک نقطہ سے گزرنے والی مساوی مضمر سطح، اس نقطہ پر برقی میدان پر عمود ہوگی۔ اس بیان کا ثبوت سادہ ہے:

اگر میدان مساوی مضمر سطح پر عمود نہ ہو تو سطح پر اس کا ایک غیر صفر جز ہوگا۔ میدان کے اس جز کی مخالف سمت میں ایک اکائی ٹیسٹ چارج کو حرکت دینے میں کام کرنا ہوگا۔ لیکن یہ مساوی مضمر سطح کی تعریف سے تضاد ہے: سطح کے کن ہی دو نقاط کے درمیان کوئی مضمر فرق نہیں ہے اور سطح پر چارج کو حرکت دینے میں کوئی کام کیا جانا درکار نہیں ہے۔ اس لیے ہر نقطہ پر برقی میدان مساوی مضمر سطح پر عمود ہوگا۔ ایک چارج تشکیل کے گرد برقی میدانی خطوط کے ساتھ ساتھ مساوی مضمر سطحیں بھی ایک متبادل بصری تصویر مہیا کرتی ہیں۔

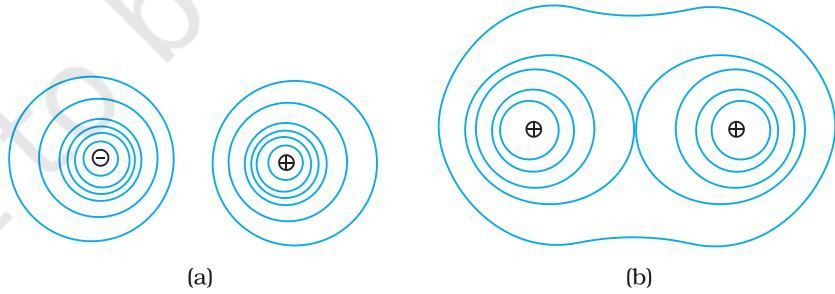


شکل 2.9: ایک واحد چارج q کے لیے (a)

مساوی مضمر سطحیں وہ کر دی سطحیں ہیں جن کا

مرکز چارج ہو اور (b) برقی میدانی

شکل 2.10: ایک ہموار برقی میدان کے لیے مساوی مضمر سطحیں
ایک ہموار برقی میدان کے لیے، جو فرض کیجیے x -محور کی جانب ہے، مساوی مضمر سطحیں وہ مستوی ہیں جو x -محور پر عمود ہیں۔ خطوط نصف قطری ہیں جو چارج سے یعنی کہ وہ مستوی y - z مستوی کے متوازی ہیں (شکل 2.10: (a) ایک دو قطبی اور (b) دو متماثل مثبت چارجوں کے لیے شروع ہوتے ہیں، اگر $q > 0$ مساوی مضمر سطحیں، شکل 2.11 میں دکھائی گئی ہیں۔



شکل 2.11: (a) ایک دو قطبی کے لیے (b) دو متماثل مثبت چارجوں کے لیے کچھ مساوی مضمر سطحیں

2.6.1 میدان اور مضمر میں رشتہ

(Relation between field and potential)

ایک دوسرے کے نزدیک رکھی ہوئی دو مساوی مضمر سطحیں A اور B لیجیے (شکل 2.12)، جن کے مضمر کی قدریں V اور $V + \delta V$ ہیں، جہاں δV برقی میدان $\vec{E}$ کی سمت میں V میں تبدیلی ہے۔ فرض کیجیے کہ P سطح B پر ایک نقطہ ہے۔

δl سطح A کا P سے عمودی فاصلہ ہے۔ فرض کیجیے کہ ایک اکائی مثبت چارج کو اس عمودی سطح B سے سطح A تک برقی میدان کے خلاف حرکت دی جاتی ہے۔ اس عمل میں کیا گیا کام

یہ کام 'مضمّر فرق' $V_A - V_B$ کے مساوی ہے۔ اس لیے

$$|\vec{E}| \delta l = V(V + \delta V) = -\delta V$$

یعنی کہ

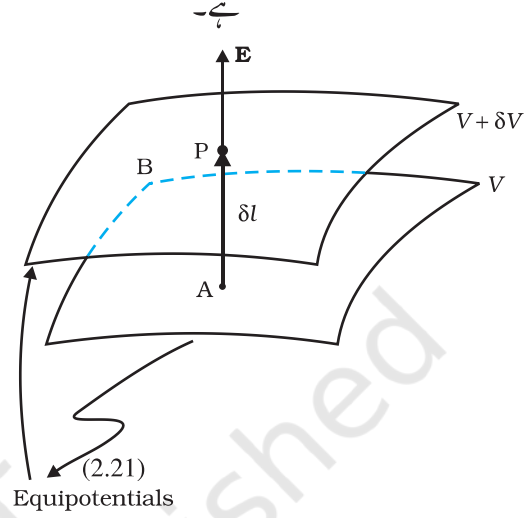
$$(2.20)$$

کیونکہ δV ، منفی ہے، $\delta V = -|\delta V|$ ہم مساوت (2.20) کو دوبارہ لکھ

$$|\vec{E}| = -\frac{\delta V}{\delta l}$$

سکتے ہیں:

$$|E| = -\frac{\delta V}{\delta l} = +\frac{|\delta V|}{\delta l}$$



فصل 2:12: مضمّر سے میدان کی جانب

اس طرح ہم برقی میدان اور مضمّر کے رشتہ سے متعلق دو اہم نتائج پر پہنچتے ہیں:

- (i) برقی میدان اس سمت میں ہے، جس میں مضمّر سب سے زیادہ شرح سے کم ہو رہا ہے۔
- (ii) برقی میدان کی عمودی قدر مضمّر کی عددی قدریں تبدیلی فی اکائی نقل اس نقطہ پر مساوی مضمّر سطح کے عمود ہے (سے دی جاتی ہے۔)

2:7 چارجوں کے ایک نظام کی وضعی توانائی

(Potential Energy of a System of Charges)

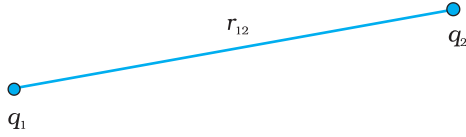
پہلے ایک سادہ صورت لیجیے۔ دو چارج q_1 اور q_2 ہیں، جن کے مقام سمتیے، کسی مبدا کے لحاظ سے، بالترتیب $\vec{r}_1$ اور $\vec{r}_2$ ہیں۔ آئیے اس تشکیل کو حاصل کرنے میں کیا گیا کام (باہری طور پر) تحسب کریں۔ اس کا مطلب ہوا کہ ہم آغاز میں q_1 اور q_2 کو لا انتہا پر مانتے ہیں اور پھر ایک باہری ایجنسی کے ذریعے انہیں ان کے دیے ہوئے مقامات تک لانے میں کیا گیا کام معلوم کرتے ہیں۔ مان لیجیے کہ پہلے چارج q_1 لا انتہا سے نقطہ $\vec{r}_1$ تک لایا گیا ہے۔ یہاں کوئی باہری میدان نہیں ہے، جس کے خلاف کام کرنے کی ضرورت ہو اس لیے q_1 کو لا انتہا سے $\vec{r}_1$ تک لانے میں کیا گیا کام صفر ہے۔ یہ چارج فضا میں ایک مضمّر پیدا کرتا ہے جو دیا جاتا ہے:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{1p}}$$

جہاں r_{1p} فضا میں ایک نقطہ P کا q_1 کے مقام سے فاصلہ ہے۔ مضمّر کی تعریف سے، چارج q_2 کو لا انتہا سے نقطہ

تک لانے میں کیا گیا کام q_2 اور $\vec{r}_2$ پر q_1 کی وجہ سے مضمّر کا حاصل ضرب ہوگا:

برق سکونی مضمر اور صلاحیت



$$q_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

جہاں r_{12} نقاط 1 اور 2 کے درمیان فاصلہ ہے۔

کیونکہ برق سکونی قوت بقائی قوت ہے، یہ کام نظام کی وضعی توانائی کی شکل میں ذخیرہ ہو جاتا ہے۔ اس لیے، شکل 2.13: چارجوں q_1 اور q_2 کے ایک نظام کی وضعی توانائی، چارجوں کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور چارجوں کے درمیان فاصلے کے معکوس متناسب ہے۔

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (2.22)$$

ظاہر ہے کہ اگر پہلے q_2 کو اس کے موجودہ مقام تک لایا جائے اور پھر بعد میں q_1 کو لایا جائے تو بھی وضعی توانائی U یکساں ہوگی۔ زیادہ عمومی طور پر وضعی توانائی کی ریاضیاتی عبارت، مساوات (2.22) غیر تبدیل رہے گی۔ چاہے چارجوں کو ان کے مخصوص مقاموں تک کسی طرح بھی لایا جائے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ برق سکونی قوت کے لیے کام راستہ کے غیر تابع ہے۔

مساوات (2.22) q_1 اور q_2 کی کسی بھی علامت کے لیے صادق ہے۔ اگر $q_1 q_2 > 0$ تو وضعی توانائی مثبت ہے۔ ایسی ہی امید بھی کی جاتی ہے، کیونکہ یکساں چارجوں کے لیے $(q_1 q_2 > 0)$ برق سکونی قوت دفاعی ہے اور اس لیے چارجوں کو لا انتہا سے ایک دوسرے کچھ متناہی فاصلے پر لانے کے لیے، اس قوت کے خلاف ایک مثبت مقدار کا کام کیا جانا درکار ہوگا۔ غیر یکساں چارجوں $(q_1 q_2 < 0)$ کے لیے، برق سکونی قوت کششی ہے۔ اس صورت میں، چارجوں کو دیے ہوئے مقامات سے لا انتہا پر لے جانے کے لیے اس قوت کے خلاف ایک مثبت مقدار کا کام کیا جانا ضروری ہے۔ دوسرے لفظوں میں مخالف راستے کے لیے (لا انتہا سے موجودہ مقامات تک) ایک منفی مقدار کے کام کا کیا جانا درکار ہے، وضعی توانائی منفی ہے۔

مساوات (2.22) کو بآسانی نقطہ چارجوں کی کسی بھی تعداد پر مشتمل نظام کے لیے عمومی شکل دی جاسکتی ہے۔ آئیے تین چارجوں q_1 ، q_2 اور q_3 جو بالترتیب مقامات $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ اور $\vec{r}_3$ پر ہیں، کے نظام کی وضعی توانائی کا حساب لگائیے۔ پہلے q_1 کو لا انتہا سے $\vec{r}_1$ تک لانے کے لیے، کوئی کام درکار نہیں ہے۔ اس کے بعد ہم q_2 کو لا انتہا سے تک لاتے ہیں۔ پہلے کی طرح، اس قدم میں کیا گیا کام ہے:

$$q_2 V_1(r_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (2.23)$$

چارج q_1 اور q_2 ایک مضمر پیدا کرتے ہیں، جو کسی نقطہ P پر دیا جاتا ہے:

$$V_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{1P}} + \frac{q_2}{r_{2P}} \right) \quad (2.24)$$

اس کے بعد، q_3 کو لا انتہا سے نقطہ $\vec{r}_3$ تک لانے میں کیا گیا کام، q_3 گنا، $\vec{r}_3$ پر $V_{1,2}$ ہے:

$$q_3 V_{1,2}(\mathbf{r}_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) \quad (2.25)$$

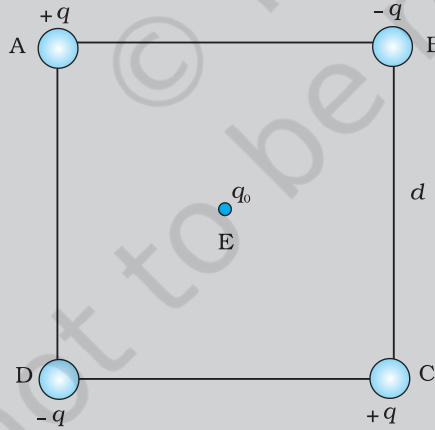
چار جوں کو ان کے دیے ہوئے مقامات پر اکٹھا کرنے میں کیا گیا کل کام مختلف قدموں [مساوات (2.23)] اور مساوات (2.25) میں کیے گئے کام کو جمع کر کے حاصل ہوتا ہے

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) \quad (2.26)$$

شکل 2.14: تین چارجوں کے ایک نظام کی وضعی توانائی مساوات (2.26) سے دی جاتی ہے اس مساوات میں استعمال ہوئی علامتیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔

پھر برق۔ سکونی قوت کی بقائی طبع کی وجہ سے (یا معادل طور پر کیے گئے کام کے راستے کے غیر تابع ہونے کی وجہ سے) U کے لیے حاصل کی گئی آخری ریاضیاتی عبارت (مساوات 2.26) اس بات کے تابع نہیں ہے کہ تشکیل کس طرح سے حاصل ہوتی ہے۔ وضعی توانائی تشکیل کی موجودہ حالت کی خاصیت ہے اس طریقے کی نہیں جس سے موجودہ حالت پر پہنچا گیا ہے۔

مثال 2.4: ضلع d کے ایک مربع ABCD کے چاروں کونوں پر ایک ایک چارج اس طرح رکھا گیا ہے جیسا کہ شکل 2.15 میں دکھایا گیا ہے۔ (a) یہ ترتیب حاصل کرنے کے لیے درکار کام معلوم کیجیے۔ (b) ایک چارج q_0 مربع کے مرکز E پر لایا جاتا ہے۔ جب کہ چاروں چارج اپنے اپنے کونوں پر قائم رکھے جاتے ہیں۔ ایسا کرنے میں کتنا اضافی کام کرنا ہوگا؟



شکل 2.15

حل:

(a) کیونکہ کیا گیا کام چارجوں کی آخری تشکیل کے تابع ہے اس کے تابع نہیں ہے کہ چارجوں کو کس طرح اس تشکیل میں یکجا کیا گیا ہے اس لیے ہم چارجوں کی دی ہوئی تشکیل، یعنی انہیں D.C.B.A پر رکھنے میں مندرجہ ذیل طریقے سے حاصل کرنے میں کیا گیا کام معلوم کرتے ہیں۔ فرض کیجیے کہ سب سے پہلے چارج $A, +q$

پر لایا جاتا ہے اور پھر بالترتیب $-q$ پر B ، $+q$ پر C ، $-q$ پر D پر لائے جاتے ہیں۔ درکار کل کام مندرجہ ذیل اقدامات میں تحسب کیا جاسکتا ہے۔

(i) چارج $+q$ کو A پر لانے میں کیا گیا کام جب کہیں کوئی اور چارج موجود نہیں ہے: یہ صفر ہے

(ii) چارج $-q$ کو B پر لانے میں کیا گیا کام، جب $+q$ پر A ہے۔ یہ دیا جاتا ہے:

$$(+q \text{ پر } A) \text{ کی وجہ سے } B \text{ پر برقی سکونی مضمر} (B \text{ پر چارج}) \\ = -q \times \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \right) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

(iii) چارج $+q$ کو C پر لانے میں کیا گیا کام جب $+q$ پر A ہے اور $-q$ پر B ہے، یہ دیا جاتا ہے:

$$(A \text{ اور } B \text{ پر چارجوں کی وجہ سے } C \text{ پر مضمر}) \times (C \text{ پر چارج}) \\ = +q \left(\frac{+q}{4\pi\epsilon_0 d\sqrt{2}} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 d} \right) = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

(iv) $-q$ کو D پر لانے میں کیا گیا کام جبکہ $+q$ پر A ، $-q$ پر B ، $+q$ پر C پر ہیں دیا جاتا ہے:

$$(A, B, C \text{ پر چارجوں کی وجہ سے } D \text{ پر مضمر}) \times (D \text{ پر چارج}) \\ = -q \left(\frac{+q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 d\sqrt{2}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \right) \\ = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

اقدامات (i) (ii) (iii) اور (iv) میں کیے گئے کام کو جمع کیجیے۔ درکار کل کام ہے:

$$= \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \left\{ (0) + (1) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\ = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 d} (4 - \sqrt{2})$$

کیا گیا کام صرف چارجوں کی آخری تشکیل کے تابع ہے اور اس کے تابع نہیں ہے کہ انہیں کیسے یکجا کیا گیا ہے۔
تعریف کے مطابق، یہ چارجوں کی کل برق سکونی توانائی ہے۔

{ طالب علم یہی کام توانائی، چارجوں کو کسی بھی ترتیب میں لے کر تحسب کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں اور خود کو مطمئن کر سکتے ہیں کہ کل توانائی یکساں رہتی ہے }

(b) چارج q_0 کو نقطہ E پر لانے میں کیا گیا زائد کام جبکہ $C'B'A$ اور D پر دیے ہوئے چارج موجود ہیں

$$(C'B'A \text{ اور } D \text{ پر چارجوں کی وجہ سے } E \text{ پر مضمر}) \times q_0$$

ظاہر ہے کہ E پر برق سکونی مضمر صفر ہوگا، کیونکہ A اور C پر چارجوں کی وجہ سے مضمر کی B اور D پر چارجوں کی وجہ سے مضمر سے تینخ ہو جائے گی۔ اس لیے نقطہ E پر کسی بھی چارج کو لانے میں کوئی کام درکار نہیں ہوگا۔

2.8 ایک باہری میدان میں وضعی توانائی

(Potential Energy in an External Field)

2.8.1 ایک واحد چارج کی وضعی توانائی (Potential energy of a single charge)

حصہ 27 میں برقی میدان کے وسیلہ۔ چارج اور ان کے مقامات۔ کو معین کر دیا گیا تھا اور ان چارجوں کے نظام کی وضعی توانائی تحسب کی گئی تھی۔ اس حصہ میں ہم ایک اسی سے متعلق لیکن واضح طور پر مختلف سوال پوچھتے ہیں۔ ایک دیے ہوئے میدان میں، ایک چارج q کی وضعی توانائی کیا ہوگی؟ یہ سوال، دراصل وہ شروعاتی نقطہ تھا، جس نے ہماری برق سکونی مضمون کے تصور تک رہنمائی کی (حصہ 2.1 اور حصہ 2.2)۔ لیکن یہاں ہم اس سوال سے دوبارہ بحث کرتے ہیں تاکہ یہ وضاحت ہو سکے کہ یہ حصہ 2.7 میں کی گئی بحث سے کیسے مختلف ہے۔

اصل فرق یہ ہے کہ اب ہم ایک باہری میدان میں ایک چارج (یا ایک سے زائد چارجوں) کی وضعی توانائی پر غور کر رہے ہیں۔ باہری میدان 'دیے ہوئے' اس چارج (ان چارجوں) کی وجہ سے نہیں پیدا ہو رہا ہے، جس کی (جن کی) وضعی توانائی ہم تحسب کرنا چاہتے ہیں۔ ان وسیلوں کے ذریعے پیدا ہو رہا ہے جو دیئے ہوئے چارج (چارجوں) کے لیے باہری وسیلے ہیں۔ باہری وسیلے معلوم بھی ہو سکتے ہیں، لیکن اکثر یہ نامعلوم یا غیر معین ہوتے ہیں، جو چیز متعین ہوتی ہے، وہ ان باہری وسیلوں کی وجہ سے پیدا ہونے والا برقی میدان یا برق سکونی مضمون V ہے۔ ہم فرض کر لیتے ہیں کہ چارج q باہری میدان پیدا کرنے والے باہری وسیلوں پر کوئی قابل لحاظ اثر نہیں ڈالتا۔ یہ صادق بیان ہوگا اگر q بہت چھوٹا ہو یا باہری وسیلوں کو دوسری غیر معین قوتوں کے ذریعے قائم رکھا جائے۔ اگر q کی قدر متناہی (Finite) بھی ہو، اس کا باہری وسیلوں پر اثر نظر انداز کیا جاسکتا ہے، اگر صورت حال ایسی ہو کہ دلچسپی کے علاقے میں، بہت طاقتور وسیلے جو بہت دور، لا انتہا پر ہیں، ایک متناہی میدان پیدا کرتے ہیں۔ پھر نوٹ کریں کہ ہماری دلچسپی ایک دیے ہوئے چارج q (اور بعد میں چارجوں کے ایک نظام) کی باہری میدان میں وضعی توانائی معلوم کرنے میں ہے، ہمیں باہری برقی میدان پیدا کرنے والے وسیلوں کی وضعی توانائی معلوم کرنے میں کوئی دلچسپی نہیں ہے۔

باہری برقی میدان اور اس سے مطابقت رکھنے والا باہری مضمون V ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ پر تبدیل ہو سکتا ہے۔ تعریف کے مطابق، ایک نقطہ P پر V ایک اکائی مثبت چارج کو لا انتہا سے نقطہ P تک لانے میں کیا گیا کام ہے۔ (ہم لا انتہا پر مضمون کو صفر ماننا جاری رکھتے ہیں) اس لیے، ایک چارج q کو باہری میدان میں لا انتہا سے P تک لانے میں کیا گیا کام qV ہے۔ یہ کام q کی وضعی توانائی کی شکل میں ذخیرہ ہو جاتا ہے۔ اگر نقطہ P کسی مبدا کی مناسبت سے مقام سمتیہ $\vec{r}$ ہے، تو ہم لکھ سکتے ہیں:

باہری میدان میں $\vec{r}$ پر q کی وضعی توانائی

$$= qV(\vec{r})$$

(2.27)

جہاں $V(\vec{r})$ نقطہ $\vec{r}$ پر باہری مضمر ہے۔

اس لیے اگر ایک الیکٹران کو جس کا چارج: $q = e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ہے، ایک مضمر فرق: سے اسراع پذیر کیا جاتا ہے، تو یہ $q\Delta V = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ توانائی حاصل کرے گا۔ توانائی کی یہ اکائی بہ طور 1 electron volt (1 الیکٹران وولٹ) یا eV معروف کی جاتی ہے یعنی $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ پڑنی اکائیاں ایٹمی نیوکلیائی اور ذراتی طبیعیات میں عام طور سے استعمال کی جاتی ہیں۔

$$1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-16} \text{ J}, 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-10} \text{ J} \text{ اور } 1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-7} \text{ J}$$

{ اس کی تعریف پہلے ہی صفحہ 117، جدول 6.1، XI طبیعیات حصہ 1 میں کی جا چکی ہے }

2.8.2 ایک باہری میدان میں دو چارجوں کے ایک نظام کی وضعی توانائی

Potential energy of a system of two charges in an external field

اب ہم پوچھتے ہیں کہ دو چارجوں q_1 اور q_2 ، جو بالترتیب مقامات $\vec{r}_1$ اور $\vec{r}_2$ پر ہیں، کے ایک نظام کی وضعی توانائی، ایک باہری میدان میں کیا ہوگی؟ پہلے ہم چارج q کو لا انتہا سے $\vec{r}_1$ تک لانے میں کیے گئے کام کی تحسب کرتے ہیں۔ مساوات (2.27) استعمال کرتے ہوئے، اس قدم میں کیا گیا کام ہے: $-W = q_1 V(\vec{r}_1)$ ۔ پھر ہم q_2 کو $\vec{r}_2$ تک لانے میں کیا گیا کام معلوم کرتے رہیں۔ اس قدم میں کام نہ صرف باہری برقی میدان کے خلاف کیا جاتا ہے بلکہ q_1 کی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدان کے خلاف بھی کیا جاتا ہے۔

باہری میدان کے خلاف q_2 پر کیا گیا کام

$$= q_2 V(\vec{r}_2)$$

کی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدان کے خلاف q_2 پر کیا گیا کام

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

جہاں q_1 اور q_2 کا درمیانی فاصلہ ہے۔ ہم نے مساوات (2.27) اور مساوات (2.22) استعمال کی ہیں۔

میدانوں کے لیے انطباق کے اصول کے مطابق، ہم دونوں میدانوں ($\vec{E}$ اور q_1 کی وجہ سے پیدا ہونے والا) کے

خلاف q_2 ہر کیے گئے کاموں کو جمع کرتے ہیں۔

q_2 کو $\vec{r}_2$ تک لانے میں کیا گیا کام

$$= q_2 V(\vec{r}_2) + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (2.28)$$

اس لیے،

اس نظام کی وضعی توانائی = تشکیل کو یکجا کرنے میں کیا گیا کل کام

$$= q_1 V(r_1) + q_2 V(r_2) + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (2.29)$$

مثال 2.5

- (a) دو چارجوں، $7\mu\text{C}$ اور $-2\mu\text{C}$ ، جو بالترتیب $(-9\text{ cm}, 0, 0)$ اور $(9\text{ cm}, 0, 0)$ پر رکھے ہوئے ہیں، کے نظام کی برق سکونی وضعی توانائی معلوم کیجیے (کوئی باہری برقی میدان نہیں ہے)۔
- (b) دونوں چارجوں کو ایک دوسرے سے لامتناہی فاصلے پر لے جانے میں کتنا کام درکار ہوگا؟
- (c) فرض کیجیے کہ چارجوں کے اسی نظام کو ایک باہری برقی میدان:
- $$E = A \left(\frac{1}{r^2} \right); A = 9 \times 10^5 \text{ C m}^{-2}$$
- میں رکھ دیا جاتا ہے۔ اب اس تشکیل کی برق سکونی توانائی کیا ہوگی؟

حل

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = 9 \times 10^9 \times \frac{7 \times (-2) \times 10^{-12}}{0.18} = -0.7 \text{ J} \quad (a)$$

$$W = U_2 - U_1 = 0 - U = 0 - (-0.7) = 0.7 \text{ J} \quad (b)$$

- (c) دونوں چارجوں کی باہم عمل توانائی (Mutual interaction energy) غیر تبدیل شدہ رہتی ہے۔ اس کے علاوہ دونوں چارجوں کے باہری میدان سے باہم عمل کی توانائی بھی ہے۔ ہم پاتے ہیں۔

$$q_1 V(\mathbf{r}_1) + q_2 V(\mathbf{r}_2) = A \frac{7\mu\text{C}}{0.09\text{m}} + A \frac{-2\mu\text{C}}{0.09\text{m}}$$

اور کل برقی سکونی توانائی ہے

$$q_1 V(\mathbf{r}_1) + q_2 V(\mathbf{r}_2) + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = A \frac{7\mu\text{C}}{0.09\text{m}} + A \frac{-2\mu\text{C}}{0.09\text{m}} - 0.7 \text{ J}$$

$$= 70 - 20 - 0.7 = 49.3 \text{ J}$$

مثال 2.5

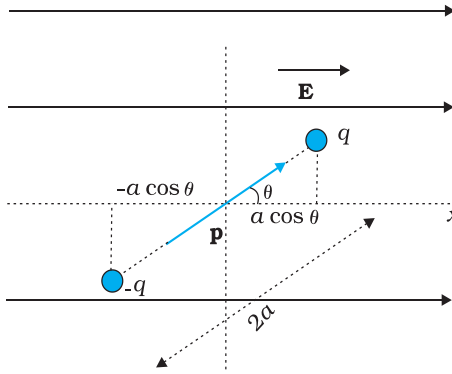
2:8.3 ایک باہری میدان میں ایک دو قطبہ کی وضعی توانائی

Potential energy of a dipole in an external field

- ایک دو قطبہ لیں، جس کے چارج $q_1 = +q$ اور $q_2 = -q$ ہیں اور جو ایک ہموار برقی میدان $\vec{E}$ میں رکھا ہوا ہے، جیسا کہ شکل 2.16 میں دکھایا گیا ہے۔
- جیسا کہ ہم پچھلے باب میں دیکھ چکے ہیں، ایک ہموار برقی میدان میں، دو قطبہ پر کوئی کل قوت نہیں لگتی لیکن اس پر ایک قوت گردشہ $\vec{\tau}$ لگتا ہے، جو دیا جاتا ہے۔

$$\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E} \quad (2.30)$$

برق سکونی مضمر اور صلاحیت



شکل 2.16: ایک دو قطبہ کی ایک باہری میدان میں وضعی توانائی

جواسے گھمانے کی کوشش کرے گا (اگر $\vec{E}$ ، $\vec{P}$ کے متوازی یا مخالف متوازی نہیں ہے)۔ فرض کیجیے کہ ایک باہری قوت گردشہ $\vec{\tau}$ اس طور پر لگایا جاتا ہے کہ اس قوت گردشہ کی بس تعدیل بھر کر دیتا ہے اور دو قطبہ کو کاغذ کے مستوی میں زاویہ θ_1 سے زاویہ θ_2 تک، لامتناہی خفیف زاویائی چال کے ساتھ اور بغیر کسی زاویائی اسراع کے، گھماتا ہے۔ باہری قوت گردشہ کے ذریعے کیے گئے کام کی مقدار x دی جاتی ہے:

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \tau_{\text{ext}}(\theta) d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} pE \sin \theta d\theta$$

$$= pE (\cos \theta_0 - \cos \theta_1) \quad (2.31)$$

یہ کام نظام کی وضعی توانائی کے بہ طور ذخیرہ ہو جاتا ہے۔ اب ہم وضعی توانائی $U(\theta)$ کو دو قطبہ کے میلان (inclination) θ سے منسلک کر سکتے ہیں۔ دیگر وضعی توانائیوں کی طرح، وہ زاویہ منتخب کرنے کی آزادی ہے جہاں وضعی توانائی U کو صفر لیا جائے۔ ایک قدرتی انتخاب یہ ہے کہ $\theta = \frac{\pi}{2}$ لیا جائے۔ (اس کی وضاحت اس بحث کے آخر میں کی گئی ہے)۔ اب ہم لکھ سکتے ہیں

$$U(\theta) = pE \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \theta \right) = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (2.32)$$

یہ ریاضیاتی عبارت، مساوات (2.29) سے بھی متبادل طور پر سمجھی جاسکتی ہے۔ ہم $+q$ اور $-q$ دو چارجوں کے موجودہ نظام پر مساوات (2.29) کا اطلاق کرتے ہیں۔ وضعی توانائی کی ریاضیاتی عبارت، اس صورت میں ہو جاتی ہے:

$$U'(\theta) = q[V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)] - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \times 2a} \quad (2.33)$$

یہاں $\vec{r}_1$ اور $\vec{r}_2$ بالترتیب q_1 اور q_2 کے مقام سمتیوں کی نشاندہی کرتے ہیں۔ اب مقامات $\vec{r}_1$ اور $\vec{r}_2$ کے درمیان مضمر فرق، ایک اکائی مثبت چارج کو، میدان کے خلاف، $\vec{r}_2$ سے $\vec{r}_1$ تک لانے میں کیے گئے کام کے مساوی ہے۔ قوت کے متوازی (Displacement) $2a \cos \theta$ ہے۔ اس لیے

$$[V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)] = -E \times 2a \cos \theta$$

اس طرح، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$U'(\theta) = -pE \cos \theta - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \times 2a} = -\vec{p} \cdot \vec{E} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \times 2a} \quad (2.34)$$

ہم نوٹ کرتے ہیں کہ $U'(\theta)$ ایک ایسی مقدار سے $U(\theta)$ سے مختلف ہے، جو کہ ایک دیے ہوئے دو قطبیہ کے لیے صرف ایک مستقل ہے۔ کیونکہ وضعی توانائی کے لیے ایک مستقلہ کوئی اہمیت نہیں رکھتا، ہم مساوات (2.34) میں سے دوسرے رکن کو چھوڑ سکتے ہیں اور پھر یہ مساوات (2.32) میں تحلیل ہو جاتی ہے۔

اب ہم سمجھ سکتے ہیں کہ ہم نے $\theta = \frac{\pi}{2}$ کیوں لیا تھا۔ اس صورت میں باہری میدان $\vec{E}$ کے خلاف، $+q$

اور q - کولانے میں کیے گئے کام مساوی اور مخالف ہیں اور ایک دوسرے کی تینخ کر دیتے ہیں، یعنی کہ

$$q[V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)] = 0$$

مثال 2.6 ایک شے کے ایک مالکیول کا، عددی مقدار 10^{-29} cm کا مستقل دو قطبی معیار اثر (Dipole moment) ہے۔ اس شے کے ایک مول (Mole) کی، 10^6 Vm^{-1} عددی قدر کے طاقت و برق سکونی میدان کو لگا کر قطیب (Polarisation) کی جاتی ہے۔ (کم درجہ حرارت پر) میدان کی سمت کا ایک 60° کے زاویے سے تبدیل کر دی جاتی ہے۔ شے کے ذریعے اپنے دو قطبیوں کو میدان کی نئی سمت کی جانب کرنے میں خارج کی جانے والی حرارت کا تخمینہ لگائیے۔ آسانی کے لیے مان لیجیے کہ نمونے کی 100% قطیب ہوئی ہے۔

حل: یہاں، 10^{-29} cm ہر ایک مالکیول کا دو قطبی معیار اثر

کیونکہ شے کے امول میں 6×10^{23} مالکیول ہوتے ہیں۔

$$p = 6 \times 10^{23} \times 10^{-29} = 6 \times 10^{-6} \text{ C m}$$

$$U_i = -pE \cos \theta = -6 \times 10^{-6} \times 10^6 \cos 0^\circ = -6 \text{ J}$$

$$U_f = -6 \times 10^{-6} \times 10^6 \cos 60^\circ = -3 \text{ J} \quad (\text{جب، } \theta = 60^\circ)$$

$$\text{وضعی توانائی میں تبدیلی} = -3 \text{ J} - (-6 \text{ J}) = 3 \text{ J}$$

اس طرح، وضعی توانائی کا زیاں ہوتا ہے۔ یہی وہ توانائی ہوگی جو شے کے ذریعے، اپنے دو قطبیوں کو میدان کی نئی سمت کی جانب کرنے میں، حرارت کی شکل میں خارج ہوتی ہے۔

مثال 2.6

2.9 موصولوں کی برق - سکونیات (Electrostatics of Conductors)

باب 1 میں موصول اور عاجز کو مختصر طور پر بیان کیا گیا تھا۔ موصولوں میں رواں (Mobile) چارج بردار (Charge carriers) ہوتے ہیں۔ دھاتی موصولوں میں یہ چارج بردار الیکٹران ہوتے ہیں۔ ایک دھات میں باہری (بندشی) (Valence) الیکٹران اپنے ایٹموں سے علیحدہ ہو جاتے ہیں اور حرکت کرنے کے لیے آزاد ہوتے ہیں۔ یہ الیکٹران دھات کے اندر آزاد ہوتے ہیں، لیکن دھات سے باہر نکلنے کے لیے آزاد نہیں ہوتے۔ یہ آزاد الیکٹران ایک قسم کی ”گیس“ تشکیل دے لیتے ہیں، یہ ایک دوسرے سے اور آئنوں (ions) سے تصادم کرتے ہیں اور مختلف سمتوں میں بے ترتیب حرکت کرتے ہیں۔ ایک باہری برقی میداں میں، یہ میدان کی سمت کے مخالف بار آور ہوتے ہیں۔ نیوکلیانوں (nuclei) پر مشتمل مثبت آئن اور بندھے ہوئے الیکٹران اپنے متعین مقامات پر قائم رہتے ہیں۔ برق پاشی موصولوں (electrolytic conductors) میں، مثبت اور منفی، دونوں آئن چارج بردار ہوتے ہیں، لیکن اس صورت میں حالت زیادہ پیچیدہ ہوتی ہے۔ چارج برداروں کی حرکت، باہری برقی میدان اور جنہیں کیمیائی قوتیں کہا جاتا ہے، دونوں

سے متاثر ہوتی ہے (دیکھیے باب 3)۔ ہم اپنی بحث کو دھاتی ٹھوس موصولوں تک ہی محدود رکھیں گے۔ آئیے موصولوں کی برق سکونیات سے متعلق اہم نتائج نوٹ کریں۔

1۔ ایک موصل کے اندر، برق سکونی میدان صفر ہوتا ہے:

ایک موصل لیں، جو چاہے چارج شدہ ہو یا تعدیل شدہ۔ یہاں ایک باہری برق سکونی میدان بھی ہو سکتا ہے۔ سکونی حالت میں، جب کہ موصل کے اندر یا موصل کی سطح پر کوئی کرنٹ نہیں ہے، تو موصل کے اندر ہر جگہ برقی میدان صفر ہے۔ یہ حقیقت ایک موصل کو معرف کرنے والی خاصیت مانی جاسکتی ہے۔ ایک موصل میں آزاد الیکٹران ہوتے ہیں۔ جب تک کہ برقی میدان صفر نہیں ہے، آزاد چارج برداروں پر ایک قوت لگے گی اور وہ بار آور ہوں گے۔ سکونی حالت میں، آزاد چارج اپنے آپ کو اس طور پر تقسیم کر لیتے ہیں کہ موصل کے اندر ہر جگہ برقی میدان صفر ہوتا ہے۔ ایک موصل کے اندر برق سکونی میدان صفر ہے۔

2۔ ایک چارج شدہ موصل کی سطح پر، برقی میدان، ہر نقطہ پر سطح کے عمودی ہونا لازمی ہے:

اگر سطح پر عمودی نہیں ہے، تو سطح پر اس کا ایک غیر صفر جز ہوگا۔ موصل کے سطح کے آزاد چارجوں پر تب ایک قوت لگے گی اور وہ حرکت کریں گے۔ اس لیے، سکونی حالت میں، کا کوئی مماسی جز نہیں ہونا چاہئے۔ اس لیے، ایک چارج شدہ موصل کی سطح پر برق سکونی میدان، ہر نقطہ پر سطح پر عمودی ہونا چاہئے۔ (ایک ایسے موصل کے لیے، جس کی کوئی سطحی چارج کثافت نہیں ہے، میدان سطح پر بھی صفر ہے) دیکھیے نتیجہ 5۔

3۔ سکونی حالت میں موصل کے اندرونی حصے میں کوئی اضافی چارج نہیں ہو سکتا:

ایک تبدیلی موصل میں اس کے ہر چھوٹے حجم یا سطحی جز میں مثبت اور منفی چارجوں کی مساوی مقدار ہوتی ہے۔ جب موصل کو چارج کیا جاتا ہے تو سکونی حالت میں یہ اضافی چارج صرف سطح پر ہی رہ سکتا ہے۔ یہ گاس کے قانون سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ حجم v کو گھیرنے والی بند سطح S پر، برق سکونی میدان صفر ہے۔ اس لیے S سے گزرنے والا کل برقی فلکس صفر ہے۔ اس لیے گاس کے قانون کے مطابق، S کے ذریعے کوئی کل چارج نہیں گھرا ہوا ہے۔ لیکن آپ سطح S کو جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں، یعنی کہ حجم v کو ناقابل لحاظ حد تک خفیف بنایا جاسکتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ موصل کے اندرونی حصے میں کسی بھی نقطہ پر کوئی کل چارج نہیں ہے اور اس لیے کسی بھی اضافی چارج کو موصل کی سطح پر رہنا چاہیے۔

4۔ موصل کے پورے حجم میں ہر جگہ برق سکونی مضمر مستقل ہے اور سطح پر بھی اس کی وہی قدر ہے جو اندرونی حصے میں ہے۔

یہ اوپر دیے ہوئے نتائج 1 اور 2 سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ کیونکہ موصل کے اندر $\vec{E} = 0$ ہے اور سطح پر اس کا کوئی مماسی جز نہیں ہے، اس لیے موصل کے اندر اور اس کی سطح پر ایک چھوٹے ٹیسٹ چارج کو حرکت کرانے میں کوئی کام نہیں ہوتا۔

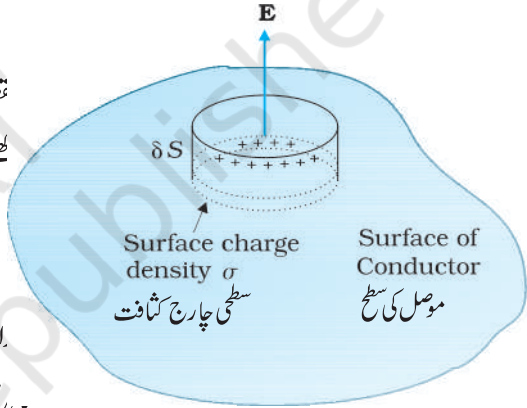
یعنی کہ، موصل کے اندر یا اس کی سطح پر، کن ہی دو نقاط کے درمیان کوئی مضمض فرق نہیں ہے۔ اس لیے نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔ اگر موصل چارج شدہ ہے، تو سطح پر عمودی، برقی میدان پایا جاتا ہے، اس کا مطلب ہوا کہ سطح پر اور سطح سے ذرا سے باہر ایک نقطہ پر مضمض مختلف ہوگا۔

ایک غیر معین سائز، شکل اور چارج تشکیل کے موصلوں کے نظام میں، ہر موصل مضمض کی ایک مستقلہ قدر کے ذریعے مخصوص کیا جاتا ہے، لیکن یہ مستقلہ ایک موصل سے دوسرے موصل میں مختلف ہو سکتا ہے۔

5- ایک چارج شدہ موصل کی سطح پر برقی میدان:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (2.35)$$

جہاں σ سطحی چارج کثافت ہے اور $\hat{n}$ سطح پر عمود باہر کی جانب، اکائی سمتیہ ہے۔ اس نتیجہ کو مشتق کرنے کے لیے ایک گولیاں رکھنے کی شیشی (ایک چھوٹا استوانہ)، سطح نقطہ P کے گرد، بہ طور گاس سطح منتخب کیجیے (جیسا کہ شکل 2.17 میں دکھایا گیا ہے)۔ یہ گولیاں لہنے کی شیشی، موصل کی سطح کے جزوی طور پر اندر ہے اور جزوی طور پر باہر ہے۔ اس کا تراشی رقبہ بہت چھوٹا ہے اور اسکی اونچائی ناقابل لحاظ ہے۔



سطح کے بس اندر، برق سکونی میدان صفر ہے اور سطح کے بس باہر، میدان سطح پر عمود ہے اس کی عددی قدر E ہے۔ اس لیے گل فلکس میں گولیوں کی شیشی سے حصہ صرف اس کے : ری (دائری) تراشے سے آتا ہے۔ یہ $\pm \delta S$ کے مساوی ہے ($\sigma > 0$ کے لیے مثبت اور $\sigma < 0$ کے لیے منفی)، کیونکہ قلیل رقبہ δS پر $\vec{E}$ کو مستقلہ مانا جاسکتا ہے اور $\vec{E}$ اور δS یا تو متوازی ہیں یا مخالف متوازی ہیں۔ گولیوں کی شیشی سے گھرا ہوا چارج $\sigma \delta S$ ہے۔

شکل 2.17: ایک چارج شدہ موصل کی سطح پر مساوات (2.35) مشتق کرنے کے لیے منتخب کی گئی گاسی سطح (ایک گولیوں کی شیشی)

گاس کے قانون سے:

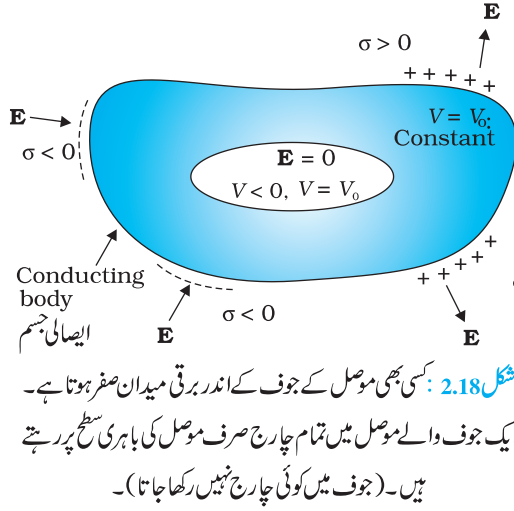
$$E \delta S = \frac{|\sigma| \delta S}{\epsilon_0} \quad (2.36)$$

$$E = \frac{|\sigma|}{\epsilon_0}$$

اس حقیقت کو شامل کرتے ہوئے کہ برقی میدان، سطح پر عمود ہے، ہم سمتیہ رشتہ، مساوات (2.35) حاصل کر لیتے ہیں، جو σ کی دونوں علامتوں کے لیے صادق ہے۔ $\sigma > 0$ کے لیے، برقی میدان، سطح پر عمود، باہر کی جانب ہے اور $\sigma < 0$ کے لیے، برقی میدان، سطح پر عمود، اندر کی جانب ہے۔

6- برق سکونی سپر (Electrostatic shielding)

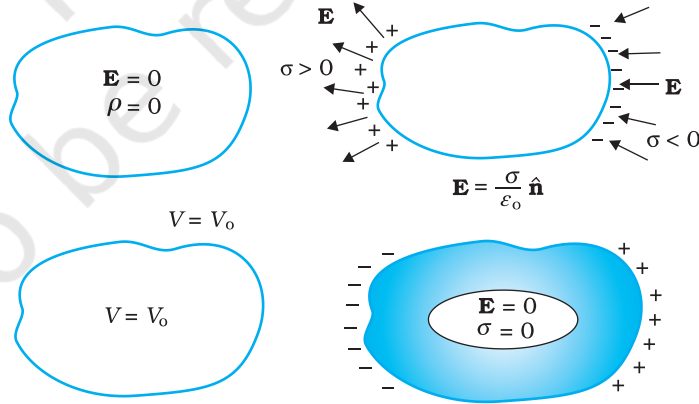
ایک موصل لیں، جس میں ایک جوف (Cavity) ہے اور جوف کے اندر کوئی چارج نہیں ہے۔ ایک اہم نتیجہ یہ ہے کہ جوف



کے اندر کی طرف برقی میدان صفر ہوتا ہے، چاہے جوف کا سائز اور اس کی شکل کیسی بھی ہو اور اس موصل پر کتنا بھی چارج ہو اور اسے جس برقی میدان میں بھی رکھا جائے۔

ہم اس نتیجے کی ایک سادہ صورت پہلے ہی ثابت کر چکے ہیں۔ ایک چارج شدہ کروی چھلے (Spherical shell) کے اندر برقی میدان صفر ہوتا ہے۔ چھلے کے لیے اس نتیجے کو ثابت کرنے میں ہم نے چھلے کے کردی تشاکل (spherical symmetry) کو استعمال کیا تھا (دیکھیے باب 1)۔ لیکن جیسا کہ اوپر بیان کیا گیا ہے، ایک موصل کے جوف میں بھی میدان کا زائل ہو جانا (چارج - آزاد) ایک عمومی نتیجہ ہے۔ اسی سے منسلک ایک نتیجہ یہ بھی ہے کہ چاہے موصل کو چارج کیا جائے یا ایک تعدیلی موصل (neutral conductor) پر ایک باہری میدان کے ذریعے چارجوں کا امالہ (induction) کیا جائے، تمام چارج جوف والے موصل کی صرف باہری سطح پر ہی رہتا ہے۔

شکل 2.18 میں نوٹ کیے گئے نتائج کا ثبوت ہم یہیں پیش نہیں کر رہے ہیں، لیکن ہم ان کے اہم مضمرات نوٹ کریں گے۔ باہر کی طرف چاہے چارج اور میدان کی کوئی بھی تشکیل ہو، ایک موصل میں کوئی بھی جوف باہری برقی اثر سے سپر شدہ (Shielded) رہتا ہے: جوف کے اندر میدان ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔ اسے برقی سکونی سپر (electrostatic shielding) کہتے ہیں۔ اس اثر کا استعمال، حساس آلوں کو باہری برقی اثرات سے محفوظ رکھنے میں کیا جاسکتا ہے۔ شکل 2.19 میں ایک موصل کی اہم برقی سکونی خاصیتوں کا خلاصہ پیش کیا گیا ہے۔



شکل 2.19: ایک موصل کی کچھ اہم برقی سکونی خاصیتیں

مثال 2.7

- (a) سوکھے بالوں میں پھیرا گیا ایک کنگھا، کاغذ کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں کو کشش کرتا ہے۔ کیوں؟ کیا ہوگا اگر کنگھا گیلیا ہو یا اس دن بارش ہو رہی ہو؟ (یاد رکھیے کہ ایک کاغذ برق کا ایصال نہیں کرتا۔)

- (b) عام ربر ایک عاجز ہے۔ لیکن ہوائی جہاز کے مخصوص ربر ٹائروں کو تھوڑا سا ایصالی بنایا جاتا ہے۔ ایسا کرنا کیوں ضروری ہے؟
- (c) احتراق پذیر (inflammable) مادی اشیاء لے جانے والی گاڑیوں میں عام طور سے لوہے کی زنجیریں لگی ہوتی ہیں جو گاڑی کے حرکت کرنے کے دوران زمین کو چھوتی رہتی ہیں۔ کیوں؟
- (d) ایک چڑیا ایک ننگی ہائی پاور لائن پر بیٹھی رہتی ہے اور چڑیا کو کچھ نہیں ہوتا۔ ایک زمین پر کھڑا آدمی اسی لائن کو چھوئے تو اسے جان لیوا جھٹکا لگتا ہے۔ کیوں؟

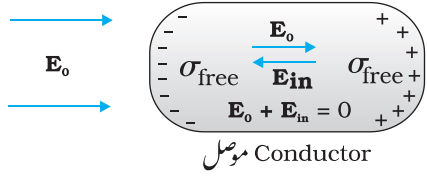
حل:

- (a) ایسا اس لیے ہوتا ہے کیونکہ کنگھا/رگڑ کے ذریعے چارج ہو جاتا ہے۔ کاغذ کے مالکیولوں کی چارج شدہ کنگھے کے ذریعے تقطیب ہو جاتی ہے، جس سے ایک کششی کل قوت پیدا ہوتی ہے۔ اگر بال گیلے ہوں یا بارش کا موسم ہو تو بالوں اور کنگھے کے درمیان رگڑ کم ہو جاتی ہے۔ کنگھا چارج نہیں ہوتا اور اس لیے وہ کاغذ کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں کو کشش نہیں کرے گا۔
- (b) انہیں زمین میں چارج (رگڑ کے ذریعے پیدا ہونے والا) ایصال کرنے دینے کے لیے، اس لیے کہ بہت زیادہ اکٹھا ہوئی ساکن برق سے شرارہ (spark) پیدا ہو سکتا ہے، جس سے آگ لگ سکتی ہے۔
- (c) وجہ (b) سے ملتی جلتی ہے۔
- (d) کرنٹ صرف اسی وقت گذرتا ہے، جب مضمر فرق ہو۔

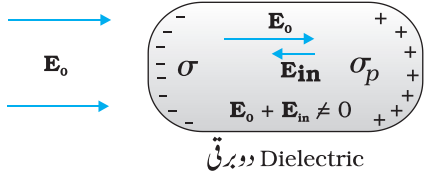
2.10 دو برقی اور تقطیب (Dielectrics and Polarisation)

دو برقی، غیر ایصالی مادی اشیاء ہوتے ہیں۔ موصل کے برخلاف ان میں چارج بردار نہیں ہوتے (یا ان کی تعداد ناقابل لحاظ ہوتی ہے)۔ حصہ 2.9 سے یاد کریے کہ جب ایک موصل کو ایک باہری برقی میدان میں رکھا جاتا ہے تو کیا ہوتا ہے۔ آزاد چارج بردار حرکت کرنے لگتے ہیں اور موصل میں چارج کی تقسیم اپنے آپ کو اس طرح ترتیب دے لیتی ہے کہ امالہ کیے گئے چارجوں (induced charges) کی وجہ سے پیدا ہونے والا برقی میدان، موصل کے اندر باہری میدان کی مخالفت کرتا ہے۔ یہ اس وقت تک ہوتا رہتا ہے، جب تک کہ سکونی حالت میں، دونوں میدان ایک دوسرے کی تینینج نہیں کر دیتے اور موصل میں کل برقی میدان صفر نہیں ہو جاتا۔ ایک دو برقی (Dielectric) میں، چارجوں کی یہ آزادانہ حرکت ممکن نہیں ہے۔ اس لیے ہوتا یہ ہے کہ باہری میدان، دو برقی کے مالکیولوں کو کھینچ کر (slretching) یا ان کی دوبارہ تشریق (reorientation) کر کے دو قطبی معیار اثر کا (Dipole moment) کا امال (Induction) کرنا ہے۔ تمام مالکیولیائی دو قطبی معیار اثر کا مجموعی اثر یہ ہوتا ہے کہ دو برقی کی سطح پر کل چارج پیدا ہو جاتا ہے اور جو ایسا میدان پیدا کرتا ہے جو باہری میدان کی مخالفت کرتا ہے۔ ایک موصل کے برخلاف، اس طرح امالہ ہوا مخالف برقی میدان، باہری میدان کی

برق سکونی مضمرا اور صلاحیت

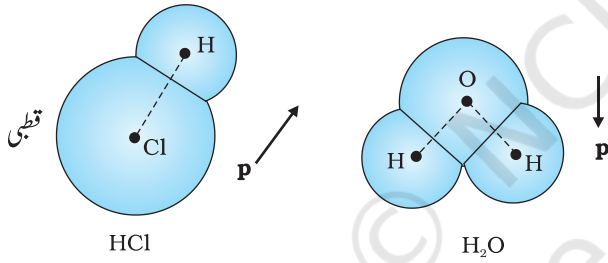
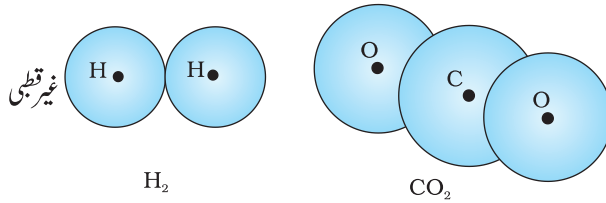


تنسیخ نہیں کرتا۔ یہ صرف اسے کم کر دیتا ہے۔ یہ اثر کس حد تک ہوگا، یہ دو برقی کی سطح پر منحصر ہے۔ اس اثر کو سمجھنے کے لیے، ہمیں ایک دو برقی میں مالکیولیائی سطح پر چارج کی تقسیم کو دیکھنا ہوگا۔



ایک مادی شے کے مالکیول قطبی (Polar) بھی ہو سکتے ہیں اور غیر قطبی (Non Polar)۔ ایک غیر قطبی مالکیول میں، مثبت اور منفی چارجوں کے مراکز منطبق (coincident) ہوتے ہیں۔ تب E_0 مالکیول میں کوئی مستقل یا ذاتی (Intrinsic) دو قطبی معیار اثر نہیں ہوتا۔ غیر قطبی مالکیولوں کی

مثالیں آکسیجن O_2 اور ہائیڈروجن H_2 مالکیول میں، جن میں ان کے تشاکل (Symmetry) کی وجہ سے کوئی دو قطبی معیار اثر نہیں ہوتا۔ دوسری طرف، ایک قطبی مالکیول وہ ہے، جس میں مثبت اور منفی چارجوں کے مراکز علیحدہ علیحدہ ہوتے ہیں (اس وقت بھی جب کوئی باہری میدان نہیں لگایا گیا ہو)۔ ایسے مالکیول میں مستقل دو قطبی معیار اثر (Permanent dipole moment) ہوتا ہے۔ ایک آنی مالکیول جیسے پانی کا مالکیول H_2O قطبی مالکیولوں کی مثال ہے۔

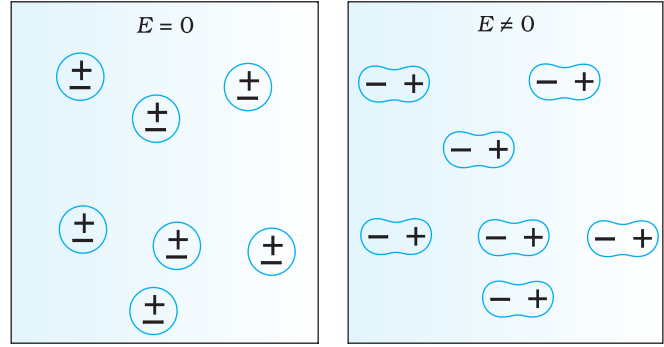


شکل 2.21: قطبی اور غیر قطبی مالکیول کی کچھ مثالیں

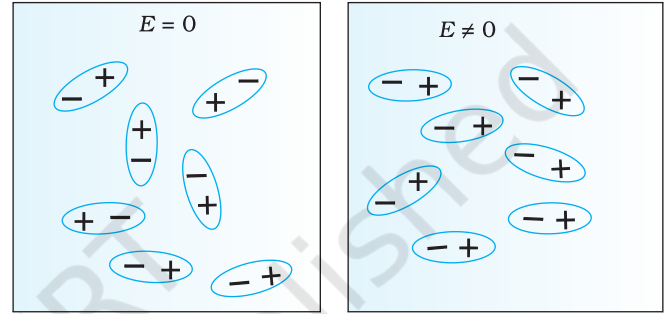
ایک باہری برقی میدان میں، ایک غیر قطبی مالکیول کے مثبت اور منفی چارج، مخالف سمتوں میں نقل کرتے ہیں۔ یہ نقل (Displacement) اس وقت رک جاتا ہے جب مالکیول کے ترکیبی چارجوں پر لگ رہی باہری قوت، بحالی قوت (مالکیولوں کے اندرونی میدان کی وجہ سے) سے متوازن ہو جاتی ہے۔ اس طرح غیر قطبی مالکیولوں میں ایک امالہ شدہ دو قطبی معیار اثر (Induced dipole moment) پیدا ہو جاتا ہے۔ اب کہا جاتا ہے کہ دو برقی کی باہری میدان کے ذریعے تقطیب ہو گئی ہے۔ ہم صرف وہ سادہ صورت ہی لیں گے جب امالہ شدہ دو قطبی معیار اثر، میدان کی سمت میں ہے اور میدان کی طاقت (Field strength) کے راست متناسب ہے۔ (وہ مادی اشیاء جن کے لیے یہ مفروضہ صادق ہے،

نقطی ہم شمول دو برقی (Linear isotropic dielectric) کہلاتے ہیں۔ مختلف مالکیولوں کے امالہ شدہ دو قطبی معیار اثر، آپس میں جڑ جاتے ہیں اور برقی میدان کی موجودگی میں، دو برقی کا ایک کل دو قطبی معیار اثر دیتے ہیں۔ قطبی مالکیولوں والا دو برقی بھی، ایک باہری میدان میں، ایک گل (غیر صفر) دو قطبی معیار اثر پیدا کر لیتا ہے، لیکن اس کی وجہ مختلف ہوتی ہے۔ کسی باہری میدان کی غیر موجودگی میں، مختلف مستقل دو قطبی، حرارتی اضطراب (thermal agitation) کی وجہ سے، بے ترتیب طور پر (randomly) تشریق ہوتے ہیں، اس لیے کل دو قطبی معیار اثر صفر ہوتا ہے۔ جب ایک باہری میدان لگایا جاتا ہے تو انفرادی دو قطبی معیار اثر اپنے آپ کو باہری میدان کی سمت

کی جانب کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ اب جب تمام مالکیولوں کے دو قطبی معیار اثر کو جمع کیا جاتا ہے تو باہری میدان کی سمت میں ایک کل (غیر صفر) دو قطبی معیار اثر حاصل ہوتا ہے۔ یعنی کہ، دو برقی کی تقطیب (Polarization) ہو جاتی ہے۔ تقطیب کس حد تک ہو، یہ آپس میں مخالف دو عوامل کی نسبتی طاقت (Relative Strength) پر منحصر ہے: باہری میدان میں دو قطبی وضعی توانائی جو دو قطبیوں کی میدان کی سمت کی جانب صف بندی (Alignment) کرنے کی کوشش کرتی ہے اور حرارتی توانائی جو اس ترتیب کو توڑنے کی کوشش کرتی ہے۔ اس کے علاوہ امالہ شدہ دو قطبی معیار اثر کا اثر بھی ہو سکتا ہے، جیسا کہ غیر قطبی مالکیولوں میں ہوتا ہے، لیکن عام طور پر صف بندی اثر، دو قطبی مالکیولوں کے لیے زیادہ اہم ہے۔ اس لیے دونوں صورتوں میں چاہے دو برقی قطبی ہو یا غیر قطبی، ایک دو برقی، باہری میدان کی موجودگی میں ایک کل (غیر صفر) دو قطبی معیار اثر پیدا کر لیتا ہے۔ دو قطبی معیار اثر فی اکائی حجم، تقطیب (Polarisation) کہلاتا ہے اور اسے $\bar{P}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ خطی سموت دو برقی کے لیے



(a) Non-polar molecules قطبی مالکیول



(b) Polar molecules غیر قطبی مالکیول

شکل 2.22: ایک دو برقی، باہری برقی میدان میں ایک کل دو قطبی معیار اثر پیدا کر لیتا ہے

(a) غیر قطبی مالکیول (b) قطبی مالکیول

$$\bar{P} = \chi_e \bar{E}$$

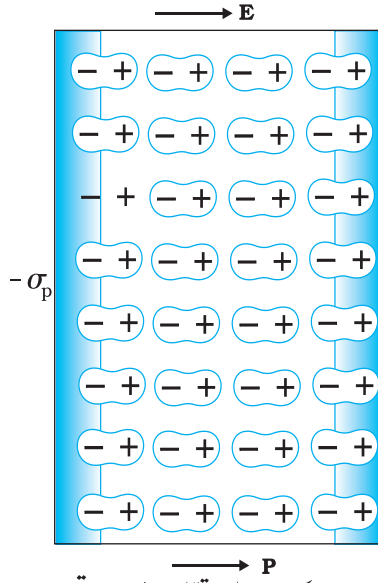
(2.37)

جہاں ایک دو برقی کی مستقل خاصیت ہے اور دو برقی واسطے (Dielectric medium) کی میلانیت (Susceptibility) کہلاتی ہے۔

کامادی شے کی مالکیولی خاصیتوں سے تعلق قائم کرنا ممکن ہے، لیکن یہاں ہم اس کی کوشش نہیں کریں گے۔

سوال یہ ہے کہ: ایک تقطیب شدہ دو برقی، اپنے اندر اصل (original) برقی میدان میں سدھار کیسے کرتا ہے؟

آسانی کے لیے، ہم ایک مستطیل نما دو برقی سل لیتے ہیں جو اپنے درخوں کے متوازی، ایک باہری ہموار برقی میدان میں رکھی ہوئی ہے۔ یہ برقی میدان، دو قطبی میں ہموار تقطیب $\bar{P}$ پیدا کرتا ہے۔ اس لیے سل کا ہر حجم جز میں، میدان کی سمت میں ایک دو قطبی معیار اثر $\bar{P} \Delta V$ ہوتا ہے۔ حجم جز ΔV کلاں بنی طور پر چھوٹا ہے لیکن اس میں مالکیولیائی دو قطبیوں کی بہت بڑی تعداد ہے۔ دو برقی کے اندر کہیں بھی، حجم جز ΔV میں کوئی کل (غیر صفر) چارج نہیں ہے (حالانکہ اس کا کل دو قطبی معیار اثر ہے)۔ ایسا اس لیے ہے کیونکہ ایک دو قطبہ کا مثبت چارج اپنے برابر والے دو قطبہ کے منفی چارج کے بہت نزدیک ہوتا ہے۔ لیکن برقی میدان پر عمود، دو برقی کی سطحوں پر ظاہرہ طور پر ایک کل چارج کثافت ہوتی ہے۔ جیسا کہ شکل 2.23 میں دیکھا جاسکتا ہے، دو قطبیوں کے مثبت سرے دائیں سطح (right surface) پر اور منفی سرے بائیں سطح



شکل 2.23: ایک ہموار طور پر تقطیب شدہ دو برقی میں امالہ شدہ سطحی چارج کثافت ہوتی ہے لیکن کوئی جی چارج کثافت نہیں ہوتی۔

پر غیر تعدیل شدہ باقی رہتے ہیں۔ یہ غیر متوازن چارج، باہری میدان کی وجہ سے امالہ ہوئے چارج ہیں۔

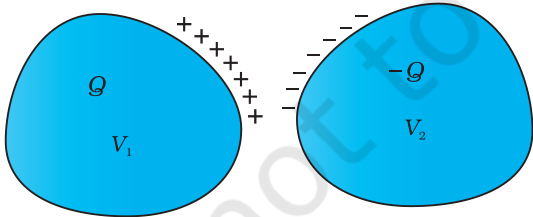
اس لیے ایک تقطیب شدہ دو برقی، دو چارج شدہ سطحوں کے مساوی ہے، جن کی امالہ شدہ سطحی چارج کثافتیں، فرض کیا، σ_p اور $-\sigma_p$ ہیں۔ ظاہر ہے کہ ان سطحی چارجوں کی وجہ سے پیدا ہوا میدان، باہری میدان کی مخالفت کرتا ہے۔ اس لیے ایک دو برقی میں کل میدان اس صورت کے مقابلے میں جب کوئی σ_p دو برقی موجود نہیں ہوتا، کم ہو جاتا ہے۔ ہمیں یہ نوٹ کرنا چاہیے کہ سطحی چارج کثافت $\pm \sigma_p$ ، دو برقی کے بندھے ہوئے چارجوں (آزاد چارج نہیں) کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے۔

2.11 کیپیسٹر اور صلاحیت (Capacitors and Capacitance)

ایک کیپیسٹر دو موصولوں کا ایسا نظام ہے جو ایک عاجز کے ذریعے ایک دوسرے سے جدا کیے ہوئے ہوتے ہیں (شکل 2.24)۔ فرض کیجیے موصولوں پر چارج Q_1 اور Q_2 ہیں اور ان کے مضمرا V_1 اور V_2 ہیں۔ عام طور سے عملی صورتوں میں، دونوں موصولوں پر چارج $+Q$ اور $-Q$ ہوتے ہیں اور ان کے درمیان مضمرا فرق: $V = V_1 - V_2$ ہوتا ہے۔ ہم کیپیسٹر کی صرف اسی قسم کی چارج تشکیل لیں گے (ایک واحد موصول کو بھی، یہ فرض کرتے ہوئے کہ دوسرا انتہا پر ہے، بطور کیپیسٹر استعمال کیا جاسکتا ہے) موصولوں کو ایک بیڑی کے ٹرمنل سے جوڑ کر اس طرح چارج کیا جاسکتا ہے۔

Q ، کیپیسٹر کا چارج کہلاتا ہے حالانکہ دراصل یہ دونوں میں سے ایک موصول کا چارج ہے۔ کیپیسٹر کا کل چارج صفر ہے۔

موصولوں کے درمیانی علاقے میں برقی میدان چارج Q کے متناسب ہے۔ یعنی کہ اگر کیپیسٹر پر چارج کو فرض کیا، دگنا کر دیا جائے تو ہر نقطہ پر برقی میدان بھی دگنا ہو جائے گا۔ (یہ کولمب کے قانون سے اخذ کی گئی میدان اور چارج کے درمیان راست متناسبت اور انطباق کے اصول سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔) اب برقی مضمرا فرق V ، ایک قلیل ٹیسٹ چارج کو موصول 1 سے موصول 2 تک لے جانے میں میدان کے خلاف کیا گیا کام فی اکائی مثبت چارج ہے۔ لہذا V بھی Q کے متناسب ہے اور نسبت ایک مستقلہ ہے۔



موصول 1 Conductor 1

موصول 2 Conductor 2

شکل 2.24: ایک عاجز کے ذریعے علیحدہ کیے ہوئے دو موصولوں

کا نظام ایک کیپیسٹر تشکیل دیتا ہے۔

$$C = \frac{Q}{V}$$

(2.38)

مستقلہ C ، کیپیسٹر کی صلاحیت (Capacitance) کہلاتی ہے۔ جیسا کہ اوپر بیان

کیا گیا ہے، C ، Q اور V کے غیر تابع ہے۔ صلاحیت C صرف دو موصولوں کے نظام کی

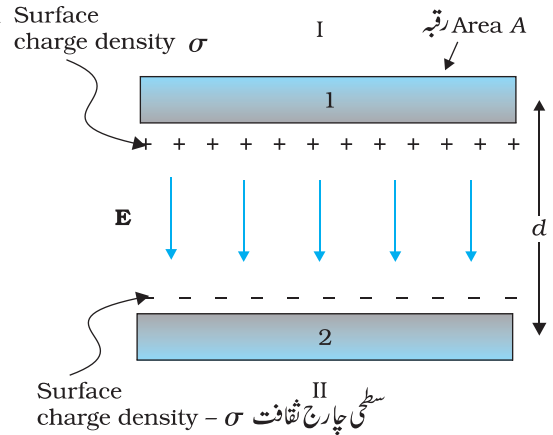
جیومیٹریائی تشکیل (شکل، سائز، دوری) کے تابع ہے۔ 1 جیسا ہم بعد میں دیکھیں گے یہ دونوں موصولوں کو علاحدہ کرنے

والے حاز (دورقی) کی طبع کے بھی تابع ہے [صلاحیت کی SI اکائی $1 \text{ farad} = 1 \text{ coulomb volt}^{-1}$ کا لمب
 - وولٹ $(1^{-1}) = 1$ فیوڈ یا $1 \text{ F} = 1 \text{ C V}^{-1}$ ہے۔ ایک متعین صلاحیت کے کپیسٹر کو علامتی طور پر $\text{—}||\text{—}$ ایسے
 دکھایا جاتا ہے جبکہ ایک متغیر صلاحیت کے کپیسٹر کو ایسے دکھایا جاتا ہے۔
 مساوات (2.38) ظاہر کرتی ہے کہ C کی بڑی قدر کے لیے، ایک دیے ہوئے Q کے لیے، V کی قدر قلیل ہوگی۔
 اس کا مطلب ہوا کہ ایک C کی بڑی قدر والا کپیسٹر، ایک مقابلاً قلیل V پر، چارج Q کی ایک بڑی قدر کو رکھ سکتا ہے۔ اس
 کی عملی اہمیت ہے۔ زیادہ مضمرفرق کا مطلب ہے کہ موصولوں کے ارد گرد طاقت ور برقی میدان ہوگا۔ ایک طاقت ور برقی
 میدان آس پاس کی ہوا کی آئن سازی کر سکتا ہے اور اس طرح پیدا ہوئے چارجوں کو مخالف چارج شدہ چادروں کی جانب
 اسراع کرا سکتا ہے اور اس طرح کپیسٹر کی چادروں کی کم از کم جزوی طور پر تعدیل کر سکتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں کپیسٹر
 کا چارج، درمیانی واسطے کی حاز جزئی طاقت میں کمی آنے کی وجہ سے، رس (Leak) سکتا ہے۔ وہ از حد برقی میدان جو ایک دو
 برقی واسطے بنا بند ہوئے (بیٹھے Break down) (اپنی حاز جزئی طاقت کے) برداشت کر سکتا ہے، اس کی دورقی
 طاقت (dielectric strength) کہلاتی ہے، ہوا کے لیے یہ تقریباً $3 \times 10^6 \text{ Vm}^{-1}$ ہے۔ موصولوں کے درمیان 1
 سینٹی میٹر یا اس کے نزدیک، کے درپے کے فاصلے کے لیے یہ میدان، موصولوں کے درمیان $3 \times 10^4 \text{ V}$ مضمرفرق
 سے مطابقت رکھتا ہے۔ اس لیے، تاکہ ایک کپیسٹر بنارسے، چارج کی ایک بڑی مقدار کو رکھ سکے، اس کی صلاحیت کی مقدار
 اتنی زیادہ ہونی چاہیے کہ مضمرفرق اور اس لیے برقی میدان، اس کی بند ہونے کی حد سے زیادہ نہ بڑھ جائے۔ دوسرے
 لفظوں میں، ایک دیئے گئے کپیسٹر میں بغیر رسے، ذخیرہ کیسے جاسکے والے چارج کی مقدار کی ایک حد ہے۔ عملی صورتوں
 میں ایک فیوڈ ایک بہت بڑی اکائی ہے، سب سے زیادہ عام اکائیاں اس کے تحت ضعف $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ ،
 $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$ ، $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ وغیرہ ہیں۔ چارج کے ذخیرہ کرنے میں استعمال ہونے کے علاوہ
 ایک کپیسٹر زیادہ تر ac سرکٹوں کا کلیدی جز ہے، جن میں یہ اہم کام انجام دیتا ہے، جیسا کہ باب 7 میں بیان کیا گیا ہے۔

2.12 : متوازی چادر کپیسٹر (The Parallel Plate Capacitor)

ایک متوازی چادر کپیسٹر دو بڑی ہموار متوازی ایصالی چادروں پر مشتمل ہوتا ہے، جن کے
 درمیان کچھ فاصلہ ہوتا ہے درمیان ایک دورقی واسطے کے اثر سے اگلے حصے میں بحث کی
 گئی ہے۔

فرض کیجیے ہر ایک چادر کا رقبہ A ہے اور ان کا درمیانی فاصلہ d ہے۔ دونوں
 چادروں پر چارج Q اور $-Q$ ہیں۔ کیونکہ d چادروں کے خطی ابعاد کے مقابلے میں بہت
 کم ہے ($d^2 \ll A$) ہم ہموار سطحی چارج کثافت کی لامتناہی سطح چادر کے برقی
 میدان کا نتیجہ استعمال کر سکتے ہیں (حصہ 1.15)۔ چادر 1 کی سطحی چارج کثافت
 $\sigma = \frac{Q}{A}$ ہے اور چادر 2 کی سطحی چارج کثافت $-\sigma$ ہے۔ مساوات (1.33) استعمال



شکل 2.25 : متوازی چادر کپیسٹر

کرتے ہوئے، مختلف علاقوں میں برقی میدان ہے:

باہری علاقہ I (چادر 1 کے اوپر کا علاقہ)

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0 \quad (2.39)$$

باہری علاقہ II (چادر 2 کے نیچے کا علاقہ)

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0 \quad (2.40)$$

چادر 1 اور چادر 2 کے درمیان، اندرونی علاقے میں، دونوں چارج شدہ چادروں کی وجہ سے پیدا ہونے والے برقی میدان آپس میں جڑ جاتے ہیں، اور اس طرح حاصل ہوتا ہے،

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (2.41)$$

برقی میدان کی سمت، مثبت چادر سے منفی چادر کی جانب ہے۔

اس لیے، برقی میدان دونوں چادروں کے درمیان مقامی طور پر محدود ہے اور اس پورے علاقے میں ہموار ہے۔
متناہی رقبے کی چادروں کے لیے، یہ چادروں کی باہری حدود کے پاس صادق نہیں ہوگا۔ کناروں پر میدانی خطوط باہر کی جانب مڑ جاتے ہیں۔ ایک اثر جو میدان کی جھال سازی (Fringing) کہلاتا ہے۔ اسی طرح، σ کی قدر پوری چادر پر بالکل درست طور پر ہموار نہیں ہوگی۔ E اور σ کے درمیان رشتہ، مساوات (2.41) سے دیا جاتا ہے [لیکن $d^2 \ll A$ کے لیے، یہ اثر کناروں سے کافی دور والے علاقوں میں نظر انداز کیے جاسکتے ہیں اور وہاں میدان مساوات (2.41) سے دیا جاتا ہے۔ اب، ہموار برقی میدان کے لیے، مضمرفرق، برقی میدان گتا چادروں کے درمیان فاصلہ ہے،
یعنی کہ

$$V = Ed = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Qd}{A} \quad (2.42)$$

اب متوازی چادر کیپیسٹر کی صلاحیت C ہے:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (2.43)$$

جو جیسا کہ امید تھی، صرف نظام کی جو میٹری کے تابع ہے۔ مخصوص قدروں کے لیے، جیسے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$C = \frac{8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \times 1 \text{ m}^2}{10^{-3} \text{ m}} = 8.85 \times 10^{-9} \text{ F} \quad (2.44)$$

[آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ: $1 \text{ F} = 1 \text{ C V}^{-1} = 1 \text{ C (NC}^{-1} \text{ m)}^{-1} = 1 \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ IF عملی طور پر استعمال کرنے کے لیے بہت بڑی اکائی ہے، جیسا کہ پہلے کہا گیا تھا۔ IF کے بہت بڑا ہونے کو دیکھنے کا ایک دوسرا طریقہ یہ ہے کہ $C = IF$ حاصل کرنے کے لیے درکار چادر کا رقبہ تحسب کیا جائے،

جبکہ چادروں کے درمیان فاصلہ، مان لیجیے 1 سینٹی میٹر ہے:

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{1F \times 10^{-2} m}{8.85 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}} = 10^9 m^2 \quad (2.45)$$

یہ ایک ایسی چادر ہے جس کی لمبائی اور چوڑائی تقریباً 30 کلومیٹر ہے

2.13 صلاحیت پر دو برقی کا اثر

(Effect of Dielectric on Capacitance)

ایک باہری میدان میں دو برقی کے برتاؤ کے بارے میں حصہ 2.10 سے حاصل کی گئی سمجھ کے ساتھ، آئیے اب دیکھتے ہیں کہ ایک دو برقی کی موجودگی میں، ایک متوازی چادر کیپیسٹر کی صلاحیت میں کیے سدھار ہوتا ہے۔ پہلے کی طرح، ہمارے پاس دو بڑی چادریں ہیں، جن میں سے ہر ایک کا رقبہ A ہے، اور ان کا درمیانی فاصلہ d ہے۔ چادروں پر چارج $\pm Q$ ہے جو چارج کثافت $\pm \sigma$ سے مطابقت رکھتا ہے ($\sigma = \frac{Q}{A}$ کے ساتھ) جب چادروں کے درمیان خلاء ہے۔

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

اور مضمرفرق V_0 ہے

$$V_0 = E_0 d$$

اس صورت میں، صلاحیت C_0 ہے

$$C_0 = \frac{Q}{V_0} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2.46)$$

اب ایک دو برقی لیجیے جسے چادروں کے درمیان اس طرح رکھ دیجیے کہ وہ پوری درمیانی جگہ گھیر لے۔ دو برقی کی میدان کے ذریعے تقطیب ہو جاتی ہے، اور جیسا کہ حصہ 2.10 میں وضاحت کی گئی ہے، یہ اثر دو چارج شدہ چادروں (دو برقی کی سطحوں پر، میدان کی عمودی سمت میں) کے معادل ہے، جن کی سطحی چارج کثافتیں σ_p اور $-\sigma_p$ ہیں۔ تب دو برقی میں برقی میدان اس صورت سے مطابقت رکھتا ہے، جب چادروں ہر کل سطحی چارج کثافت $(\sigma - \sigma_p)$ ہے، یعنی کہ

$$E = \frac{\sigma - \sigma_p}{\epsilon_0} \quad (2.47)$$

اس طرح چارجوں کے درمیان مضمرفرق ہے:

$$V = E d = \frac{\sigma - \sigma_p}{\epsilon_0} d \quad (2.48)$$

نقطی دو برقیوں کے لیے، ہم امید کرتے ہیں کہ E_0 ، σ_p کے متناسب ہے یعنی σ کے متناسب ہے۔ اس

لیے $(\sigma - \sigma_p)$ کے متناسب ہے، اور ہم لکھ سکتے ہیں:

$$\sigma - \sigma_p = \frac{\sigma}{K} \quad (2.49)$$

جہاں K، دو برقی کی ایک مستقل خاصیت ہے۔ ظاہر ہے اب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0 K} = \frac{Qd}{A\epsilon_0 K} \quad (2.50)$$

اس لیے چادروں کے درمیان دو برقی کے ساتھ، صلاحیت C ہے

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 KA}{d} \quad (2.51)$$

حاصل ضرب واسطے (Medium) کی برقی سرایت پذیری (Permittivity) کہلاتی ہے اور اسے ϵ سے

ظاہر کرتے ہیں

$$\epsilon_0 = \epsilon_0 K \quad (2.52)$$

خلاء کے لیے $K=1$ اور $\epsilon_0 = \epsilon_0$ ؛ خلاء کی برقی سرایت پذیری کہلاتی ہے۔
غیر ابعادی نسبت:

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (2.53)$$

مادی شے کا دو۔ برقی مستقل کہلاتا ہے۔ جیسا کہ پہلے بتایا جا چکا ہے، مساوات (2.49) سے

ظاہر ہو جاتا ہے کہ $k=1$ سے بڑا ہے۔ مساوات (2.46) اور مساوات (2.51) سے

$$K = \frac{C}{C_0} \quad (2.54)$$

اس لیے، ایک مادی سے کا دو برقی مستقل وہ ضربیہ (Factor) ہے، جس سے، ایک کپیسٹر کی درمیانی جگہ کو پوری طرح دو برقی سے بھر دینے سے، کپیسٹر کی صلاحیت اس کی خلاء والی قدر کے مقابلے میں بڑھ جاتی ہے۔ حالانکہ ہم نے مساوات (2.54) ایک متوازی چادر کپیسٹر لیتے ہوئے حاصل کی ہے لیکن یہ کسی بھی قسم کے کپیسٹر کے لیے درست ہے اور اسے ایک مادی شے کے دو۔ برقی مستقل کی عمومی تعریف مانا جاسکتا ہے۔

برقی نقل

ہم نے امالہ کی گئی چارج کثافت σ_p اور تقطیب $\vec{P}$ میں کوئی واضح رشتہ دیے بغیر دو۔ برقی مستقل کے تصور کو شامل کیا ہے اور مساوات (2.54) حاصل کی ہے۔

ہم بغیر ثابت کیے، مندرجہ ذیل نتیجہ لکھتے ہیں،

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

جہاں $\hat{n}$ سطح پر عمود باہری جانب، اکائی سمتیہ ہے۔ مندرجہ بالا مساوات عمومی ہے اور دو برقی کی کسی بھی شکل کے لیے صادق ہے۔ شکل 2.23

میں دکھائی گئی سل (Slab) کے لیے $\vec{P}$ دائیں سطح پر $\hat{n}$ کی سمت میں ہے اور بائیں سطح پر $\hat{n}$ کی مخالف سمت میں ہے۔ اس لیے دائیں سطح پر، امالا ہوئی چارج کثافت مثبت ہے، اور بائیں سطح پر منفی ہے، جیسا کہ ہم نے پہلے ہی اپنی کچھلی بحث میں اندازہ لگایا تھا۔ برقی میدان کی مساوات کو سمیٹہ شکل میں لکھنے پر

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{\sigma - P \cdot \hat{n}}{\epsilon_0}$$

$$(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \hat{n} = \sigma$$

مقدار $(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$ برقی نقل (Electric displacement) کہلاتی ہے اور $\vec{D}$ سے ظاہر کی جاتی ہے، یہ ایک سمتیہ مقدار ہے۔ اس لیے:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \vec{D} \cdot \hat{n} = \sigma$$

$\vec{D}$ کی اہمیت یہ ہے: خلاء میں، $\vec{E}$ آزاد چارج کثافت σ سے منسلک ہے۔ ایک دو برقی واسطہ کی موجودگی میں، $\vec{E}$ نہیں بلکہ $\vec{D}$ آزاد چارج کثافت σ سے براہ راست منسلک ہے، جیسا کہ مندرجہ بالا مساوات سے دیکھا جاسکتا ہے۔ کیونکہ $\vec{P}$ اسی سمت میں ہے، جس میں $\vec{E}$ ہے، تمام سمتیے $\vec{P}$ ، $\vec{E}$ اور $\vec{D}$ متوازی ہیں۔

$\vec{D}$ اور $\vec{E}$ کی عددی قدروں کی نسبت ہے۔

$$\frac{D}{E} = \frac{\sigma \epsilon_0}{\sigma - \sigma_p} = \epsilon_0 K$$

اس لیے

$$\vec{D} = \epsilon_0 K \vec{E}$$

اور

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 (K - 1) \vec{E}$$

اس سے مساوات (2.37) میں معرف کی گئی مقدار برقی میلان χ_e (electric susceptibility) حاصل ہوتی ہے

$$\chi_e = \epsilon_0 (K - 1)$$

مثال 2.8: ایک k دو برقی مستقلہ کے مادے سے بنی سل کارقبہ، ایک متوازی چادر کیپیسٹر کے رقبے کے مساوی ہے، لیکن اس کی موٹائی $\frac{3}{4}d$ ہے جہاں d چادروں کے درمیان دوری ہے۔ جب سل کو چادروں کے درمیان رکھا جائے گا تو صلاحیت کیسے تبدیل ہوگی؟

حل: فرض کیجیے، کسی بھی دو برقی کی غیر موجودگی میں، چادروں کے درمیان برقی میدان $\frac{V_0}{d}$ ہے، اور مضمرفرق V_0 ہے۔ اب اگر چادروں کے درمیان دو برقی رکھ دیا جائے، تو دو برقی میں برقی میدان:

$$E = \frac{E_0}{K} \text{ ہوگا۔}$$

اب مضمر فرق ہوگا۔

$$V = E_0 \left(\frac{1}{4} d \right) + \frac{E_0}{K} \left(\frac{3}{4} d \right)$$

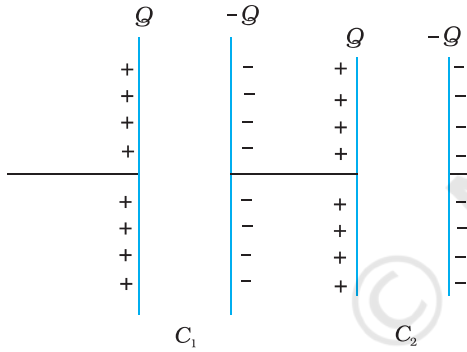
$$= E_0 d \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4K} \right) = V_0 \frac{K+3}{4K}$$

مضمر فرق، ضرب یہ $\frac{K+3}{4K}$ سے کم ہو جاتا ہے، جبکہ چادروں پر آزاد چارج Q_0 غیر تبدیل شدہ رہتا ہے۔ اس لیے صلاحیت بڑھ جاتی ہے۔

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{4K}{K+3} \frac{Q_0}{V_0} = \frac{4K}{K+3} C_0$$

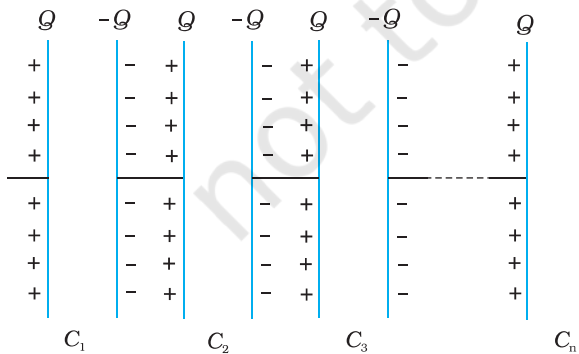
2.14 کیپیسٹروں کا اجتماع (Combination of Capacitors)

ہم مختلف صلاحیتوں: $C_1, C_2, \dots, C_n$ کے کیپیسٹروں کا اجتماع کر کے ایک ایسا نظام حاصل کر سکتے ہیں، جس کی موثر صلاحیت C ہو۔ موثر صلاحیت اس طریقے کے تابع ہے، جس سے انفرادی کیپیسٹروں کا اجتماع کیا گیا ہے۔ دوسرے ممکنہ صورتیں ذیل میں پیش کی جا رہی ہیں۔



2.14.1 سلسلہ وار طرز میں اجتماع کیے گئے کیپیسٹر (Capacitors in Series)

شکل 2.26 کیپیسٹری C اور C کا سلسلہ وار اجتماع دکھایا گیا ہے۔



شکل 2.27 دو کیپیسٹروں کا سلسلہ وار طرز میں اجتماع

C_1 کی بائیں چادر اور C_2 کی دائیں چادر کو بیٹری کے دو ٹرمینلوں سے جوڑا گیا ہے اور ان پر بالترتیب، چارج $(+Q)$ اور $(-Q)$ ہیں۔ اس کے نتیجے میں C_1 کی دائیں چادر پر $(-Q)$ چارج ہوگا۔ اور C_2 کی بائیں چادر پر $(+Q)$ چارج ہوگا۔ اگر ایسا نہ ہو تو ہر کیپیسٹر پر کل چارج صفر نہیں ہوگا۔ اس کے نتیجے میں C_1 اور C_2 کو جوڑنے والے موصل میں برقی میدان پیدا ہو جائے گا۔ چارج اس وقت تک بہتا رہے گا، جب تک کہ C_1 اور C_2 دونوں پر کل چارج صفر نہ ہو جائے اور C_1 اور C_2 کو جوڑنے والے موصل میں کوئی برقی میدان نہ رہے۔ اس لیے، سلسلہ وار اجتماع میں ہر کیپیسٹر کی دونوں چادروں پر چارج $\pm Q$ یکساں ہیں۔ اجتماع کے سروں کے درمیان کل مضمر گراؤ V ، C_1 پر مضمر گراؤ V_1 اور C_2 پر مضمر گراؤ V_2 کا حاصل جمع ہے۔

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad (2.55)$$

یعنی کہ

$$\frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (2.56)$$

اب ہم اجتماع کو ایک موثر کیپیسٹر مان سکتے ہیں، جس پر چارج Q ہے اور برقی مضمر فرق V ہے اجتماع کی موثر صلاحیت ہے:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.57)$$

ہم مساوات (2.56) اور مساوات (2.57) کا مقابلہ کرتے ہیں، اور حاصل کرتے

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (2.58)$$

یہی ثبوت اسی طرز میں لگائے گئے کیپیسٹروں کی کسی بھی تعداد کے لیے درست ہے۔ اس لیے n کیپیسٹروں کے سلسلہ وار اجتماع کے لیے، مساوات (2.58) کی عمومی شکل ہے:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} \quad (2.59)$$

انہیں اقدامات کا استعمال کرتے ہوئے جو دو کیپیسٹروں کے لیے کیے گئے تھے، ہم n کیپیسٹروں کے سلسلہ وار اجتماع کی صلاحیت کے لیے عمومی فارمولا حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (2.60)$$

2.14.2 متوازی طرز میں اجتماع کیے گئے کیپیسٹر (Capacitors in Parallel)

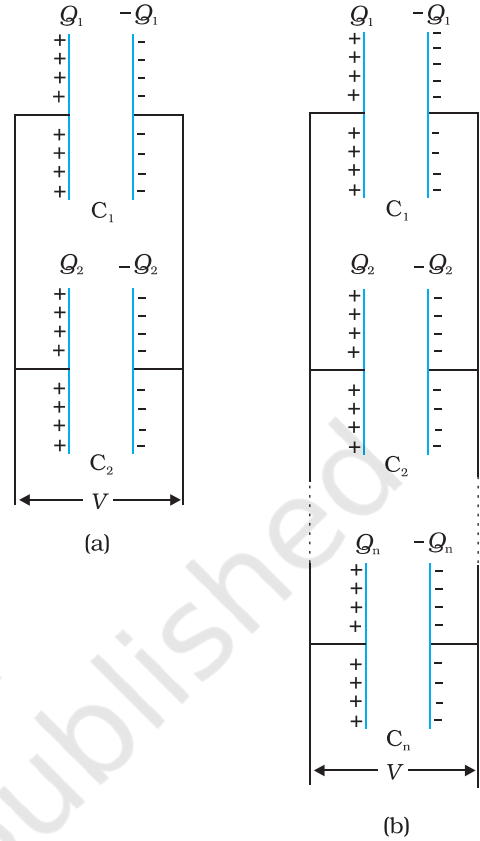
شکل (2.28) میں، متوازی طرز میں جوڑے گئے دو کیپیسٹر دکھائے گئے ہیں۔ اس صورت میں، دونوں کیپیسٹروں پر یکساں مضمر فرق لگایا جاتا ہے۔ لیکن کیپیسٹر 1 پر چارج Q_1 اور کیپیسٹر 2 پر چارج Q_2 ضروری نہیں ہے کہ یکساں ہوں:

$$Q_1 = C_1 V, \quad Q_2 = C_2 V \quad (2.61)$$

معاول کیپیسٹر وہ ہے، جس پر چارج

$$Q_1 = Q_1 + Q_2 \quad (2.62)$$

اور مضمر فرق V ہوگا۔



شکل 2.28 (a) دو کیپیسٹروں کا

(b) کیپیسٹروں کا متوازی طرز میں اجتماع

مساوات (2.63) سے موثر صلاحیت C ہے:

$$Q = CV = C_1V + C_2V \quad (2.63)$$

$$C = C_1 + C_2 \quad (2.64)$$

n کنپیسٹروں کے متوازی طرز کے اجتماع کی موثر صلاحیت کے لیے عمومی فارمولا [شکل (2.28(b))] اسی طرح

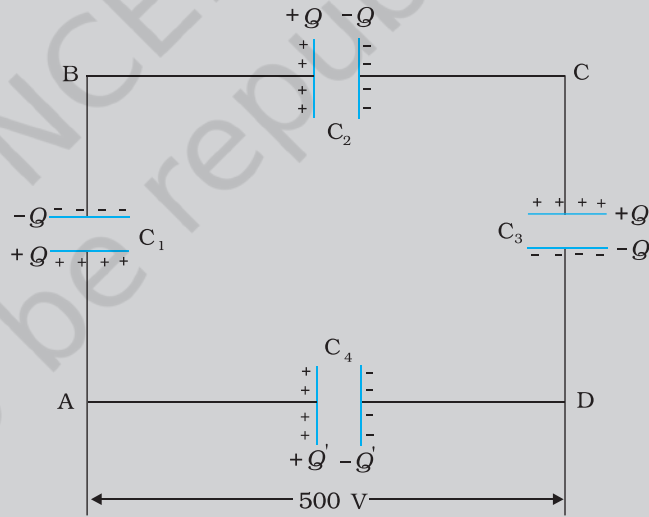
حاصل کیا جاسکتا ہے:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \quad (2.65)$$

$$CV = C_1V + C_2V + \dots + C_nV \quad (2.66)$$

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (2.67)$$

مثال 2.9: جیسا کہ شکل 2:29 میں دکھایا گیا ہے چار $10\mu F$ کے کنپیسٹروں کے ایک نیٹ ورک کو $500V$ سپلائی سے جوڑا گیا ہے۔ معلوم کیجیے: (a) نیٹ ورک کی معادل صلاحیت (b) ہر کنپیسٹر پر چارج [نوٹ کریں کہ ایک کنپیسٹر کا چارج اس کی مقابلتا زیادہ مضامولی چارور کا چادر کا چارج ہے جو مقابلتا کم مضمر والی چادر کے چارج کے مساوی اور مخالف ہے۔]



شکل 2:29

حل:

(a) دیے ہوئے نیٹ ورک میں، C_1 ، C_2 اور C_3 سلسلہ وار جڑے ہوئے ہیں۔ ان تینوں کنپیسٹروں کی موثر صلاحیت C' دی جاتی ہے۔

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$C_1 = C_2 = C_3 = 10\mu F$ کے لیے: $C' = (10/3)\mu F$ نیٹ ورک میں C' اور C_4

متوازی طرز میں جڑے ہوئے ہیں۔ نیٹ ورک کی موثر صلاحیت C ہے۔

$$C = C' + C_4 = \left(\frac{10}{3} + 10\right) \mu F = 13.3 \mu F$$

(b) شکل سے ظاہر ہے کہ C_1 ، C_2 اور C_3 تینوں کپیسٹروں میں سے ہر ایک ہر چارج یکساں ہے۔

فرض کیا یہ یکساں چارج Q ہے۔ فرض کیجیے C_4 پر چارج Q' ہے۔ اب کیونکہ AB پر مضمر فرق $\frac{Q}{C_1}$

ہے BC پر $\frac{Q}{C_2}$ ، CD پر $\frac{Q}{C_3}$ ہے، اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = 500 V$$

اور

$$\frac{Q'}{C_4} = 500 V$$

صلاحیتوں کی دی ہوئی قدروں کے لیے، اس سے حاصل ہوتا ہے۔

$$Q = 500 V \times \frac{10}{3} \mu F = 1.7 \times 10^{-3} C$$

$$Q' = 500 V \times 10 \mu F = 5.0 \times 10^{-3} C$$

2:15 ایک کپیسٹر میں ذخیرہ توانائی (Energy Stored in a Capacitor)

ایک کپیسٹر، جیسا کہ ہم پہلے دیکھ چکے ہیں، دو موصولوں کا ایک ایسا نظام ہے جن پر چارج +Q اور -Q ہوتے ہیں۔ اس تشاکل

میں ذخیرہ توانائی کا حساب لگانے کے لیے دو موصول اور 2 لیجے، جو شروع میں بے چارج ہیں۔ پھر تصور کیجیے کہ موصول 2 سے موصول 1 پر چارج

رفتہ رفتہ منتقل ہوتا ہے، اس طرح کہ آخر میں، موصول 1 ہر چارج Q آجاتا ہے۔ چارج کی بقا سے آخر میں، موصول 2 پر چارج (-Q) ہوگا

(شکل 2.30)

موصول 2 سے موصول 1 پر مثبت چارج منتقل کرنے میں، باہری طور پر کام کیا جائے

گا، کیونکہ کسی بھی مرحلہ پر موصول 1 موصول 2 سے زیادہ مضمر پر ہے۔ کل کیے گئے کام کا حساب

لگانے کے لیے، ہم ایک چھوٹے قدم میں کیے گئے کام کا حساب لگاتے ہیں، جس میں ایک

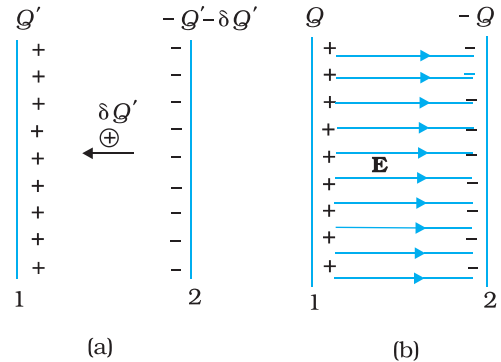
لامتناہی خفیف (یعنی کہ معدوم ہو جانے کی حد تک خفیف) چارج کی مقدار منتقل ہوتی ہے۔

ایک درمیانی صورت لیجیے، جب موصول 1 اور موصول 2 پر، بالترتیب چارج Q' اور $-Q'$ ہیں۔ اس

مرحلے پر، موصول 1 اور موصول 2 کے درمیان مضمر فرق $\frac{Q'}{C}$ ہے، جہاں C نظام کی صلاحیت ہے

۔ پھر تصور کیجیے کہ ایک خفیف چارج δQ موصول 2 سے موصول 1 کو منتقل کیا جاتا ہے۔ اس قدم

میں کیا گیا کام (δW)، جس کے نتیجے میں موصول 1 پر چارج Q' سے $Q' + \delta Q$



شکل 2.30 (a) ایک چھوٹے قدم میں موصول 1 پر چارج Q' سے $Q' + \delta Q$ کرنے میں کیا گیا کام (b) کپیسٹر کو چارج کرنے میں کئے گئے کل کام کو چاروں کے درمیان برقی میدان کی توانائی کے بطور ذخیرہ ہوا سمجھا جاسکتا ہے۔

ہو جاتا ہے، دیا جاتا ہے۔

$$\delta W = V' \delta Q' = \frac{Q'}{C} \delta Q' \quad (2.68)$$

کیونکہ $\delta Q'$ کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا لے سکتے ہیں، مساوات (2.68) لکھی جاسکتی ہے۔

$$\delta W = \frac{1}{2C} [(Q' + \delta Q')^2 - Q'^2] \quad (2.69)$$

مساوات (2.69) متماثل ہیں، کیونکہ $\delta Q'$ میں دوسرے درجہ کارکن، یعنی کہ $\frac{\delta Q'^2}{2C}$ ناقابل لحاظ ہے،

کیونکہ $\delta Q'$ جتنا چاہیں چھوٹا لیا جاسکتا ہے۔ کل کیا گیا کام W صفر سے Q' تک چارج Q' حاصل کرنے میں شامل، اقدامات کی بہت بڑی تعداد میں کیے گئے تمام قلیل کام (δW) کا حاصل جمع ہے۔

$$\begin{aligned} W &= \sum \delta W \\ &= \sum \frac{1}{2C} [(Q' + \delta Q')^2 - Q'^2] \quad (2.70) \end{aligned}$$

تمام اقدامات پر جمع

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2C} [\{\delta Q'^2 - 0\} + \{(2\delta Q')^2 - \delta Q'^2\} + \{(3\delta Q')^2 - (2\delta Q')^2\} + \dots \\ &\quad + \{Q^2 - (Q - \delta Q)^2\}] \quad (2.71) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2C} [Q^2 - 0] = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.72)$$

یہی نتیجہ مساوات (2.28) کا مکملہ کر کے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے:

$$W = \int_0^Q \frac{Q'}{C} \delta Q' = \frac{1}{C} \frac{Q'^2}{2} \Big|_0^Q = \frac{Q^2}{2C}$$

یہ کوئی تعجب کی بات نہیں ہے، کیونکہ تکملہ اور کچھ نہیں بلکہ قلیل ارکانوں کی بڑی تعداد کو جمع کرنا ہے۔ ہم آخری نتیجے

میں، مساوات (2.72) کو مختلف طریقوں سے لکھ سکتے ہیں۔

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV \quad (2.73)$$

کیونکہ برق سکونی قوت بقائی ہے، یہ کام نظام کی وضعی توانائی کی شکل میں ذخیرہ ہو جاتا ہے۔ اسی وجہ سے مضمرا توانائی کے لیے آخری نتیجہ [مساوات (2.73)] اس طریقے کے تابع نہیں ہے، جس سے کپیسٹری کی چارج تشکیل کی گئی ہے۔ جب کپیسٹر ڈسچارج (Discharge خروج) ہوتا ہے، یہ ذخیرہ ہوئی توانائی خارج ہوتی ہے۔ کپیسٹر کی وضعی توانائی کو چادروں کے درمیان برقی میدان میں ذخیرہ ہوا سمجھنا ممکن ہے۔ اسے دیکھنے کے لیے، آسانی کے لیے ایک متوازی چادر کپیسٹر لیجیے (جس کی ہر چادر کا رقبہ A ہے اور چادروں کے درمیان فاصلہ d ہے)۔

کپیسٹر میں ذخیرہ ہوئی توانائی

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{(A\sigma)^2}{2} \times \frac{d}{\epsilon_0 A} \quad (2.74)$$

سطحی چارج کثافت σ اور چادروں کے درمیان برقی میدان $\vec{E}$ میں رشتہ ہے:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.75)$$

مساوات (2.75) سے حاصل ہوتا ہے:

کیپیسٹری میں ذخیرہ ہوئی توانائی

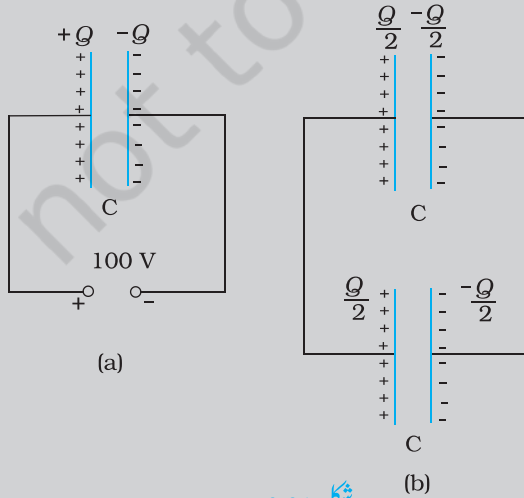
$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \times A d \quad (2.76)$$

نوٹ کریں کہ Ad چادروں کے درمیانی علاقہ کا حجم ہے (جہاں صرف برقی میدان ہی پایا جاتا ہے)۔ اگر ہم توانائی کثافت کی تعریف بہ طور ذخیرہ ہوئی توانائی فی فضا کا اکائی حجم کریں، تو مساوات (2.76) سے برقی میدان کی توانائی کثافت

$$U = (1/2) \epsilon_0 E^2 \quad (2.77)$$

حالانکہ ہم نے مساوات (2.77) کو ایک متوازی چادر کیپیسٹر کے لیے مشتق کیا ہے، برقی میدان کی توانائی کثافت کے لیے حاصل کیا گیا نتیجہ، دراصل، بالکل عمومی ہے اور چارجوں کی کسی بھی تشکیل کے برقی میدان کے لیے درست ہے۔

مثال 2.10 (a) ایک 900PF کیپیسٹر 100V بیٹری سے چارج کیا جاتا ہے۔ [شکل (a) 2.31] کیپیسٹر کے ذریعے کتنی برق۔ سکونی توانائی ذخیرہ کی جائے گی؟ (b) کیپیسٹر کو بیٹری سے علیحدہ کر دیا جاتا ہے اور ایک دوسرے 900pf کیپیسٹر سے جوڑ دیا جاتا ہے [شکل (b) 2.31]۔ نظام کے ذریعے ذخیرہ کی گئی برق۔ سکونی توانائی کتنی ہے؟



شکل 2.31

حل: (a) کیپیسٹر پر چارج ہے:

$$Q = CV = 900 \times 10^{-12} \text{ F} \times 100 \text{ V} = 9 \times 10^{-8} \text{ C}$$

کیپیسٹر کے ذریعے ذخیرہ کی گئی توانائی ہے

$$= \left(\frac{1}{2} \right) CV^2 = \left(\frac{1}{2} \right) QV$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right) \times 9 \times 10^{-8} \text{ C} \times 100 \text{ V} = 4.5 \times 10^{-6} \text{ J}$$

(b) قائم حالت میں، دونوں کیپیسٹروں کی مثبت چادریں یکساں مضمّر پر ہوں گی اور ان کی منفی چادریں بھی یکساں مضمّر پر ہوں گی۔ فرض کیجیے مشترک مضمّر V' رفرق کا ہے۔ اب، ہر کیپیسٹر پر چارج ہوگا:

$$Q' = CV' \quad \text{چارج کی بقا سے: } Q' = \frac{Q}{2}, \text{ اس سے حاصل ہوتا ہے: } V' = \frac{V}{2}, \text{ نظام کی کل توانائی ہے:}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} Q' V' = \frac{1}{4} QV = 2.25 \times 10^{-6} \text{ J}$$

اس لیے (a) سے (b) پر جانے میں، حالانکہ کوئی چارج ضائع نہیں ہوتا، اختتامی توانی، آغازی توانائی کی صرف آدھی ہے۔ باقی توانائی کہاں چلی گئی؟

اس سے پہلے کہ نظام اپنی آخری حالت (b) میں مستقل طور پر قائم ہو، ایک درمیانی عارضی وقفہ بھی ہوتا ہے اس وقفہ میں ایک جی کرنٹ (Tronsien current) پہلے کیپیسٹر سے دوسرے کیپیسٹر کی جانب بہتا ہے۔ اس دوران توانائی، حرارت اور برق مقناطیسی اشعاع کی شکل میں ضائع ہو جاتی ہے۔

مثال 2.10

خلاصہ (SUMMARY)

1۔ برق سکونی قوت ایک بقائی قوت ہے۔ ایک باہری قوت کے ذریعے (برق-سکونی قوت کے مساوی

اور مخالف) ایک چارج q کو نقطہ R سے نقطہ P تک لانے میں کیا گیا کام، $V_P - V_R$ ہے، جو چارج q کے اختتامی اور آغازی نقاط کے درمیان وضعی توانائی کا فرق ہے۔

2۔ ایک نقطہ پر مضمّر، ایک چارج کو لا انتہا سے اس نقطہ تک لانے میں، (ایک باہری ایجنسی کے ذریعے)

کیا گیا کام Q کی چارج ہے۔ ایک نقطہ پر مضمّر، ایک جمعی مستقلہ (additive Constant) کی حد تک اختیاری ہے، کیونکہ دو نقاط کے درمیان مضمّر فرق ہی طبعی لحاظ سے اہمیت رکھتا ہے۔ اگر لا انتہا پر مضمّر کو صفر منتخب کر لیا جائے، تو ایک نقطہ پر، جس کا مقام سمتیہ $\vec{r}$ ہے، مبدے پر رکھے ہوئے ایک نقطہ چارج Q کی وجہ سے، مضمّر دیا جاتا ہے:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

3۔ ایک نقطہ پر جس کا مقام سمتیہ $\hat{r}$ ہے، دو قطبی معیار اثر $\vec{P}$ کے ایک نقطہ دو قطبیہ کی وجہ سے، جو مبدا سے،

پر رکھا ہے، برق۔ سکونی مضمر ہے:

$$V(\hat{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

یہ نتیجہ اس دو قطبیہ کے لیے بھی درست ہے، جس کے چار جوں $+q$ اور $-q$ کے درمیان فاصلہ (2a)،

اور $r \gg a$

4۔ ایک $q_1, q_2, \dots, q_n$ چارج تشکیل کے لیے، جس کے مقام سمتیہ $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ ہیں، ایک نقطہ P

پر مضمر انطباق کے اصول سے دیا جاتا ہے۔

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{1P}} + \frac{q_2}{r_{2P}} + \dots + \frac{q_n}{r_{nP}} \right)$$

جہاں q_1, r_{1P} اور P کا درمیانی فاصلہ ہے اور اسی طرح اور بھی۔

5۔ ایک مساوی مضمر سطح وہ سطح ہے، جس پر مضمر کی قدر مستقل ہوتی ہے۔ ایک نقطہ چارج کے لیے، ہم

مرکز کرے، جن کا مرکز چارج کا مقام ہو، مساوی مضمر سطحیں ہیں۔ ایک نقطہ پر برقی میدان $\vec{E}$ مساوی

مضمر سطح پر اس نقطہ سے گزرنے والے عمود کی سمت میں ہوتا ہے۔ $\vec{E}$ کی سمت وہ ہوتی ہے جس میں

مضمر کی کمی سب سے زیادہ تیزی سے ہوتی ہے۔

6۔ چار جوں کے ایک نظام میں ذخیرہ ہوئی وضعی توانائی، چار جوں کو ان کے مقامات پر اکٹھا کرنے میں (ایک

باہری ایجنسی کے ذریعے) کیا گیا کام ہے۔ دو چار جوں q_1 اور q_2 کی وضعی توانائی، جو $\vec{r}_1$ اور $\vec{r}_2$

پر ہیں، دی جاتی ہے۔

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

جہاں q_1, q_2, r_{12} کے درمیان فاصلہ ہے۔

7۔ ایک باہری مضمر $V(\vec{r})$ ایک چارج q کی وضعی توانائی $qV(\vec{r})$ ہے۔

دو قطبی معیار اثر $\vec{P}$ کے ایک دو قطبیہ کی ایک ہموار برقی میدان $\vec{E}$ میں وضعی توانائی $(-\vec{P} \cdot \vec{E})$ ہے۔

8۔ ایک موصل کے اندرونی حصے میں برق سکونی میدان $\vec{E}$ صفر ہوتا ہے، ایک چارج شدہ موصل کے فوراً

باہر، $\vec{E}$ سطح پر عمود ہوتی ہے اور دی جاتی ہے: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$ جہاں $\hat{n}$ سطح پر باہری عمود کی جانب ہے

اور σ چارج کثافت ہے۔ ایک موصل میں چارج صرف اس کی سطح پر ہی رہ سکتے ہیں۔ ایک موصل

کے اندر اور اس کی سطح پر مضمر مستقل ہوتا ہے۔ ایک موصل کے ایک جوف میں (جس میں کوئی چارج نہ

ہو)، برقی میدان صفر ہوتا ہے۔

9۔ ایک کیپیسٹر ایسے دو موصولوں کا نظام ہے جو ایک حارز کے ذریعے علیحدہ کیے ہوئے ہوتے ہیں۔ اس کی صلاحیت کی تعریف کی جاتی ہے: $C = \frac{Q}{V}$ جہاں Q اور Q، دونوں موصولوں کے چارج ہیں اور V ان کے درمیان مضمرفرق ہے۔ C خالصتاً جیومیٹریائی طور پر، یعنی دونوں موصولوں کی شکل، سائز اور اضافی مقامات کے ذریعے معین ہوتی ہے۔ صلاحیت کی اکائی فیڑڈ ہے $1F = 1CV^{-1}$ ایک متوازی چادر کیپیسٹر (جس کی چادروں کے درمیان خلاء ہو) کے لیے:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

جہاں A ہر چادر کا رقبہ ہے اور d ان کا درمیانی فاصلہ ہے۔

10۔ اگر ایک کیپیسٹر کی چادروں کی درمیانی جگہ ایک حارز شے (دو برقی) سے بھری جائے، تو چارج شدہ چادروں کی وجہ سے دو برقی میں ایک کل (غیر صفر) دو قطبی معیار اثر کا مالہ ہوتا ہے۔ یہ اثر، جو قطبیب کہلاتا ہے، مخالف سمت میں ایک میدان پیدا کرتا ہے۔ اس لیے، دو برقی کے اندر کل برقی میدان اور چادروں کے درمیان مضمرفرق، کم ہو جاتے ہیں۔ اس کے نتیجے میں، کسی واسطے کی غیر موجودگی میں (خلاء میں) صلاحیت C_0 کی اپنی قدر سے صلاحیت C میں اضافہ ہو جاتا ہے۔ $C = KC_0$ جہاں K حارز مادے کا دو۔ برقی مستقلہ ہے۔

11۔ کیپیسٹروں کے سلسلہ وار اجتماع کے لیے، کل صلاحیت C دی جاتی ہے:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$

کیپیسٹروں کے متوازی طرز کے اجتماع کے لیے، کل صلاحیت C ہے:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

جہاں $C_1, C_2, \dots, C_n$ انفرادی صلاحیتیں ہیں۔

12۔ صلاحیت C کے کیپیسٹر میں، جس پر چارج Q اور وولٹیج V ہے، ذخیرہ شدہ توانائی U ہے۔

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

ایک علاقے میں، جس میں برقی میدان $\vec{E}$ ہے، برقی توانائی کثافت (توانائی فی اکائی حجم)

$$\text{ہے۔} \quad (1/2)\epsilon_0 E^2$$

طبیعی مقدار	علامت	ابعاد	اکائی	ریمارک
مضمر	ϕ یا V	$[M^1 L^2 T^{-3} A^{-1}]$	V	مضمر فرق طبعی طور پر اہمیت
صلاحیت	C	$[M^{-1} L^{-2} T^{-4} A^2]$	F	
تقطیب	$\vec{P}$	$[L^{-2} AT]$		
دو۔ برقی مستقلہ	K	[غیر ابعادی]	$C m^{-2}$	دو قطبی معیار اثر فی اکائی حجم

قابل غور نکات

- 1- برقی سکونیات، ان چارجوں کے درمیان قوتوں سے بحث کرتی ہے جو حالت سکون میں ہیں۔ لیکن اگر ایک چارج پر قوت لگ رہی ہے تو وہ حالت سکون میں کیسے ہو سکتا ہے؟ اس لیے جب ہم چارجوں کے درمیان برق۔ سکونی قوت کی بات کرتے ہیں، تو یہ سمجھنا چاہیے کہ ہر چارج کو کسی ایسی غیر معین قوت کے ذریعے حالت سکون میں رکھا جا رہا ہے جو چارج پر لگ رہی کل کولمب قوت کی مخالفت کرتی ہے۔
- 2- ایک کپیسٹر کی تشکیل اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ برقی میدانی خطوط کو فضا کے ایک چھوٹے علاقے میں محدود کر دیتا ہے۔ اس لیے، حالانکہ میدان کی طاقت قابل لحاظ ہو سکتی ہے، کپیسٹر کے دو موصولوں کے درمیان مضمر فرق کی قدر چھوٹی ہوتی ہے۔
- 3- ایک کروئی چارج شدہ خول کی سطح پر برقی میدان غیر مسلسل (discontinues) ہوتا ہے۔ یہ اندرونی حصے میں صفر اور باہر $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{r}$ ہے۔ لیکن برقی مضمر، پوری سطح پر مسلسل ہوتا ہے اور سطح پر $q/4\pi\epsilon_0 R$ کے مساوی ہے۔
- 4- ایک دو قطبیہ پر لگنے والا قوت گردش $\vec{P} \times \vec{E}$ دو قطبیہ کو $\vec{E}$ کے گرد احتراز پذیر کر دیتا ہے۔ صرف، اگر ایک اسرانی میکنازم (Dissipative mechanism) ہو تو احترازات تعری (Damped) ہو جاتے ہیں اور دو قطبیہ آخر کار $\vec{E}$ کی جانب ہو جاتا ہے۔
- 5- ایک چارج q کی وجہ سے، خود اس کے مقام پر مضمر کی تعریف نہیں کی جاسکتی۔ یہ لامحدود ہے۔
- 6- ایک چارج q کی وضعی توانائی کی عبارت: $qV(\vec{r})$ میں، $V(\vec{r})$ باہری چارجوں کی وجہ سے مضمر ہے، q کی وجہ سے مضمر نہیں ہے۔ جیسا نقطہ 5 میں دیکھا جاسکتا ہے، یہ عبارت معرف نہیں ہوگی۔ اگر $V(\vec{r})$ خود چارج q کی وجہ سے مضمر بھی شامل ہے۔
- 7- ایک موصل کے اندر ایک جوف باہری برقی اثرات سے سپر کی ہوئی (Shielded) ہوتی ہے۔ یہ نوٹ کرنے

کے قابل ہے کہ برق۔ سکونی سپر مخالف طور پر کام نہیں کرتی: یعنی کہ، اگر آپ جوف کے اندر چارج رکھ دیں، تو موصل کا باہری حصہ اندرونی چارجوں کے میدان سے سپر نہیں ہوتا۔

مشق

- 2.1 دو چارج، $5 \times 10^{-8} \text{C}$ اور $3 \times 10^{-8} \text{C}$ ایک دوسرے سے 16 سینٹی میٹر کے فاصلے پر رکھے ہوئے ہیں۔ دونوں چارجوں کو ملانے والے خط کے کسی نقطے (کن نقطوں) پر برقی مضمر صفر ہوگا؟ لا انتہا پر مضمر کو صفر مانیے۔
- 2.2 10 سینٹی میٹر ضلع کی ایک منظم چھ ضلعی (Regular hexagon) کی ہر اس پر $5 \mu\text{C}$ چارج رکھا ہے۔ چھ ضلعی کے مرکز پر مضمر کا حساب لگائیے۔
- 2.3 دو چارج $2 \mu\text{C}$ اور $2 \mu\text{C}$ نقطہ A اور پر 6 سینٹی میٹر کے فاصلے پر رکھے ہیں۔
(a) نظام کی ایک مساوی مضمر سطح شناخت کیجیے۔
(b) اس سطح کے ہر نقطہ پر برقی میدان کی سمت کیا ہے؟
- 2.4 12 سینٹی میٹر نصف قطر کے ایک کروی موصل پر $1.6 \times 10^{-7} \text{C}$ چارج ہے جو اس کی پوری سطح پر ہموار طور پر پھیلا ہوا ہے۔ برقی میدان کیا ہوگا؟
(a) کرے کے اندر
(b) کرے کے فوراً باہر
(c) کرے کے مرکز سے 18 سینٹی میٹر فاصلے پر ایک نقطہ پر
- 2.5 ایک متوازی چار کپیسٹر جس کی چادروں کے درمیان ہوا ہے، کی صلاحیت 8 PF ($1 \text{pF} = 10^{-12} \text{F}$) ہے۔ صلاحیت کتنی ہو جائے گی اگر چادروں کے درمیان جگہ کو نصف کر دیا جائے اور اسے دو برقی مستقلہ 6 کے مادے سے بھر دیا جائے۔
- 2.6 تین کپیسٹروں کو، جن میں ہر ایک کی صلاحیت 9 PF ہے، سلسلہ وار جوڑا گیا ہے
(a) اجتماع کی کل صلاحیت کیا ہے؟
(b) اگر اجتماع کو ایک 120V سپلائی سے جوڑ دیا جائے تو ہر کپیسٹر پر مضمر فرق کتنا ہوگا؟
- 2.7 تین کپیسٹرز، جن کی صلاحیتیں 2pF ، 3pF ، اور 4pF ہیں، متوازی طرز میں جوڑے گئے ہیں
(a) اجتماع کی کل صلاحیت کیا ہے؟
(b) اگر اجتماع کو 100V سپلائی سے جوڑ دیا جائے، تو ہر کپیسٹر پر چارج معلوم کیجیے۔
- 2.8 ایک متوازی چار کپیسٹر میں، جس کی چادروں کے درمیان ہوا ہے، ہر چادر کا رقبہ $6 \times 10^{-3} \text{m}^2$ ہے

- اور چادروں کے درمیان فاصلہ 3mm ہے۔ کیپیسٹر کی صلاحیت کا حساب لگائیے۔ اگر کیپیسٹر کو 100V سپلائی جوڑ دیا جائے، تو کیپیسٹر کی ہر چادر پر کتنا چارج ہوگا؟
- 2.9 وضاحت کیجیے کہ کیا ہوگا اگر مشق 2.8 میں دیے ہوئے کیپیسٹر کی چادروں کے درمیان 3mm موٹی مائیکا کی چادر (جس کا دو برقی مستقلہ 6 ہے) رکھ دی جائے:
- (a) جب کہ وولٹیج سپلائی جڑی رہے۔
- (b) سپلائی کو ہٹا دینے کے بعد
- 2.10 12PF کا ایک کیپیسٹر 50V بیٹری سے جوڑا گیا ہے۔ کیپیسٹر میں کتنی برقی سکونی توانائی ذخیرہ ہوگی؟
- 2.11 ایک 600PF کیپیسٹر کو 200V سپلائی کے ذریعے چارج کیا گیا ہے۔ اسے پھر سپلائی سے علیحدہ کر لیا جاتا ہے اور ایک دوسرے بغیر چارج کیے ہوئے 600PF کیپیسٹر سے جوڑ دیا جاتا ہے۔ اس عمل میں کتنی برقی سکونی توانائی ضائع ہوگی۔

اضافی مشقیں

- 2.12 8 mC کا ایک چارج مبدلے رکھا ہے۔ $-2 \times 10^{-9} \text{ C}$ کے ایک چارج کو نقطہ $P(0,0,3\text{cm})$ سے نقطہ $R(0,6\text{cm},9\text{cm})$ سے ہوتے ہوئے، نقطہ $Q(0,4\text{cm},0)$ تک لے جانے میں کیے گئے کام کا حساب لگائیے،
- 2.13 دو چھوٹے کرے، جن پر $1.5\mu\text{C}$ اور $2.5\mu\text{C}$ چارج ہیں، ایک دوسرے سے 30cm فاصلے پر ہیں۔ مضمر اور برقی میدان معلوم کیجیے:
- (a) دونوں چارجوں کو ملانے والے خط کے وسطی نقطہ پر
- (c) اس وسطی نقطہ سے 10cm دور ایک نقطہ پر، جو اس مستوی میں ہے جو خط پر عمود ہے اور وسطی نقطہ سے گذرتا ہے۔
- 2.15 ایک کروی ایصالی خول کا اندرونی نصف قطر r_1 اور باہری نصف قطر r_2 ہے اور اس پر چارج Q ہے۔
- (a) خول کے مرکز پر ایک چارج q رکھا جاتا ہے۔ خول کی باہری اور اندرونی سطحوں پر سطحی چارج کثافت کیا ہے؟
- (b) کیا ایک جوف (جس پر کوئی چارج نہیں ہے) کے اندر برقی میدان صفر ہوگا۔ چاہے خول کروی نہ ہو بلکہ کسی بے قاعدہ شکل کا ہو۔ وضاحت کیجیے۔
- (a) دکھائیے کہ چارج شدہ سطح کی ایک جانب سے دوسری جانب، برقی سکونی میدان کے عمودی جز میں ایک عدم تسلسل (discontinuity) ہوتا ہے، جو دیا جاتا ہے۔

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

جہاں ایک نقطہ پر سطح پر عمودا کائی سمتیہ ہے اور σ اس نقطہ پر چارج کثافت ہے ($\hat{n}$ کی سمت، جانب 1 سے جانب 2 کی طرف ہے)۔ پھر دکھائیے کہ ایک موصل کے فوراً باہر، برقی میدان $\frac{\sigma \cdot \hat{n}}{\epsilon_0}$ ہے۔

(b) دکھائیے کہ چارج شدہ سطح کی ایک جانب سے دوسری جانب، برق سکونی میدان کا مماسی جز مسلسل ہوتا ہے۔ [اشارہ: (a) کے لیے گاس کا قانون استعمال کیجیے۔ (b) کے لیے یہ حقیقت استعمال کیجیے کہ برق سکونی میدان کے ذریعے، ایک بند حلقے میں کیا گیا کام صفر ہے]

نقطی چارج کثافت λ (کا ایک لمبا چارج شدہ استوانہ ایک کھوکھلے ہم محوری ایصال استوانے سے گھرا ہوا ہے۔ دونوں اسطوانوں کی درمیانی جگہ پر برقی میدان کیا ہوگا؟

ہائیڈروجن ایٹم میں، الیکٹران اور پروٹان تقریباً $0.53 \text{ \AA}$ کے فاصلے پر بندھے ہوئے ہیں۔

(a) نظام کی وضعی توانائی کا ev میں تخمینہ لگائیے۔ الیکٹران کے پروٹان سے لامحدود فاصلے پر وضعی توانائی کا صفر مانیے۔

(b) الیکٹران کو آزاد کرانے کے لیے کم از کم کتنا کام درکار ہوگا؟ دیا ہوا ہے کہ مدار میں اس کی حرکی توانائی، کی عددی قدر (a) میں حاصل کی گئی وضعی توانائی کی آدھی ہے۔

(c) اوپر دیے ہوئے (a) اور (b) کے جواب کیا ہوں گے اگر وضعی توانائی کا صفر $1.06 \text{ \AA}$ فاصلے پر منتخب کیا جائے:

اگر ہائیڈروجن مایکیول کے دونوں الیکٹرانوں میں سے کوئی ایک الیکٹران نکال دیا جائے تو ہمیں مایکیولیائی آئن H_2^+ ملتا ہے۔ H_2^+ کی تہی حالت (ground state) میں دو پروٹانوں کے درمیان تقریباً فاصلہ پر ہوتا ہے۔ اور الیکٹران ہر پروٹان سے تقریباً $1 \text{ \AA}$ فاصلے پر ہوتا ہے۔ نظام کی وضعی توانائی تحسب کیجیے۔ وضعی توانائی کے اپنے منتخب صفر کی وضاحت کیجیے۔

نصف قطر a اور نصف قطر b کے دو چارج شدہ ایصال کرے ایک دوسرے سے ایک تار کے ذریعے جڑے ہوئے ہیں۔ دونوں کروں کی سطحوں پر برقی میدانوں کی کیا نسبت ہے؟ حاصل ہوئے نتیجہ کو استعمال کر کے وضاحت کیجیے کہ ایک موصل کے دھار دار اور نکیلے کناروں پر چارج کثافت اس کے چپے حصوں سے زیادہ کیوں ہوتی ہے؟

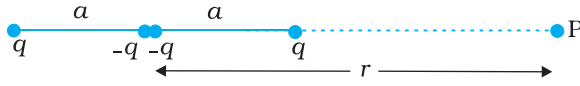
2.21 دو چارج +q اور -q بالترتیب نقاط (0,0,-a) اور (0,0,a) پر رکھے ہوئے ہیں۔

(a) نقاط (0,0,z) اور (x,y,0) پر برق سکونی مضمر کیا ہے؟

(b) مبدا سے ایک نقطہ کے فاصلے r پر مضمر کا انحصار حاصل کیجیے، جبکہ $r/a \gg 1$

(c) $-x$ محور پر نقطہ $(5,0,0)$ سے نقطہ $(-7,0,0)$ تک ایک چھوٹے ٹیسٹ چارج کو لے جانے میں کتنا کام کیا جائے گا؟ کیا جواب تبدیل ہو جائے گا اگر ٹیسٹ چارج کا راستہ انہیں دونوں نقاط کے درمیان x محور پر نہ ہو۔

2.22 شکل 2.34 میں ایک چارج تشکیل دکھائی گئی ہے جو برقی چار قطبیہ کہلاتی ہے۔ چار قطبیہ کے محور پر ایک نقطہ کے لیے، مضمر کا r پر انحصار معلوم کیجیے جبکہ $1 \gg r/a$ اور اپنے نتیجے کا موازنہ ایک برقی دو قطبیہ اور ایک برقی یک قطبیہ (monopole) (یعنی کہ واحد چارج) کے نتائج سے کیجیے۔

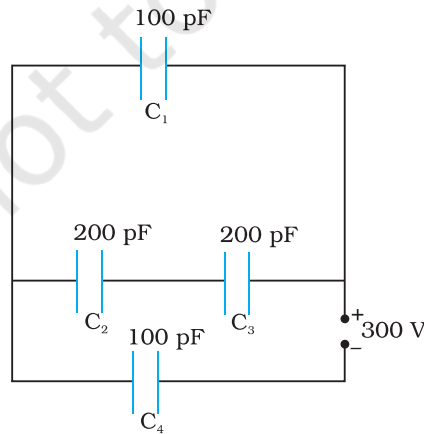


شکل 2.32

2.23 ایک بجلی کے کاریگر کو ایک سرکٹ میں $2 \mu F$ کی صلاحیت چاہیے، جبکہ مضمر فرق 1KV ہے۔ اس کے پاس $1 \mu F$ صلاحیت کے کئی کیپیسٹرز ہیں، جن میں سے ہر ایک 400V سے زائد مضمر فرق برداشت نہیں کر سکتا۔ ایک ایسی ممکنہ ترتیب تجویز کیجیے، جس میں کیپیسٹروں کی کم از کم تعداد استعمال ہو۔

2.24 ایک 2F متوازی چادر کیپیسٹر کا) چادروں کا رقبہ کیا ہوگا، دیا ہوا ہے کہ چادروں کے درمیان 5 سینٹی میٹر فاصلہ ہے۔ [آپ کو اپنے جواب سے احساس ہوگا کہ عام کیپیسٹر μF یا اس سے کم صلاحیت کی سعت میں کیوں ہوتے ہیں۔ لیکن برق پاشہ کیپیسٹروں کی صلاحیت اس سے کہیں زیادہ ہوتی ہے (0.1 F) کیونکہ موصولوں کے درمیان بہت ہی کم فاصلہ ہوتا ہے۔

2.25 شکل 2.35 میں دکھائے گئے نیٹ ورک کی معادل صلاحیت حاصل کیجیے۔ 300V کی سپلائی کے لیے ہر کیپیسٹر پر چارج اور وولٹیج معلوم کیجیے۔



شکل 2.33

2.26 ایک متوازی چادر کیپیسٹر کی ہر چادر کا رقبہ 90 cm^2 ہے اور ان کے درمیان فاصلہ ہے۔

کیپیسٹر کو ایک 400 V سپلائی سے جوڑ کر چارج کیا جاتا ہے۔

(a) کیپیسٹر کے ذریعے کتنی برق سکونی توانائی ذخیرہ ہوگی؟

(b) اس توانائی کو چادروں کے درمیان برقی میدان میں ذخیرہ ہوئی توانائی مانیے اور توانائی فی اکائی حجم U

کا حساب لگائیے۔ اور پھر U اور چادروں کے درمیان برقی میدان کی عددی قدر E کے مابین رشتہ حاصل کیجیے۔

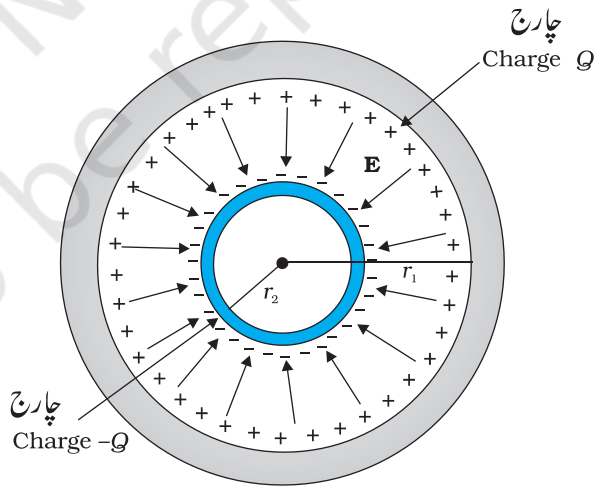
2.27 ایک $4 \mu\text{F}$ کے کیپیسٹر کو 200 V سپلائی کے ذریعے چارج کیا گیا ہے۔ اسے پھر سپلائی سے علیحدہ کر لیا جاتا ہے

اور ایک دوسرے غیر چارج شدہ $2 \mu\text{F}$ کیپیسٹر سے جوڑ دیا جاتا ہے۔ پہلے کیپیسٹر کی کتنی برق سکونی توانائی، حرارت اور برق مقناطیسی اشعاع کی شکل میں ضائع ہوگی۔

2.28 دکھائیے کہ ایک متوازی چادر کیپیسٹر کی ہر چادر پر قوت کی عددی قدر $\frac{1}{2}QE$ کے مساوی ہے جہاں

Q کیپیسٹر پر چارج ہے اور E چادروں کے درمیان برقی میدان کی عددی قدر ہے۔ ضرب یہ $\frac{1}{2}$ کہاں سے آتا ہے، وضاحت کیجیے۔

2.29 ایک کروئی کیپیسٹر دو ہم مرکز کردی موصولوں پر مشتمل ہے، جسے مناسب حاجز سہاروں کے ذریعے ایک حالت



شکل 2.34 چارج (-Q)

میں قائم رکھا جاتا ہے (شکل 2.26)۔ دکھائیے کہ کروئی کیپیسٹر کی صلاحیت دی جاتی ہے:

جہاں r_1 اور r_2 بالترتیب باہری اور اندرونی کروں کے نصف قطر ہیں۔

2.30 ایک کروئی کپیسٹر میں 12 cm نصف قطر کا ایک اندرونی کرہ ہے اور 13 cm نصف قطر کا ایک باہری کرہ ہے۔ باہری کرہ کو زمین گیر (earth) کر دیا جاتا ہے۔ اور اندرونی کرہ کو $2.5 \mu\text{C}$ چارج دیا جاتا ہے۔ ہم مرکز کردوں کی درمیانی جگہ کو دو برقی مستقلہ 32 کے ایک رقیق سے بھر دیا جاتا ہے۔
(a) کپیسٹر کی صلاحیت معلوم کیجیے۔

(b) اس کپیسٹر کی صلاحیت کا مقابلہ 12 cm نصف قطر کے ایک علیحدہ کیے ہوئے کرہ کی صلاحیت سے کیجیے وضاحت کیجیے کہ بعد والی صلاحیت اتنی کم کیوں ہوں۔

2.31 سوچ کر جواب دیجیے:

(a) دو بڑے ایصالی کرے، جن پر چارج Q_1 اور Q_2 ہیں، ایک دوسرے کے نزدیک لائے گئے۔ کیا ان کے درمیان برق سکونی قوت کی عددی قدر بالکل درست طور پر $\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ سے دی جاتی ہے جبکہ r ان کے مراکز کے درمیان فاصلہ ہے۔

(b) اگر کولمب کے قانون میں $\frac{1}{r^3}$ انحصار (کی جگہ) $\frac{1}{r^2}$ کی جگہ) شامل ہوتا، تو کیا گاس کا قانون تب بھی صادق آتا؟

(c) ایک برق سکونی میدان تشکیل میں ایک نقطہ پر ایک چھوٹے ٹیسٹ چارج کو رکھا گیا۔ کیا وہ اس نقطہ سے گذر رہے میدان خط پر حرکت کرے گا۔

(d) ایک الیکٹرون کے مکمل دائری مدار میں نیوکلئس کے برقی میدان کے ذریعے کیا گیا کام کتنا ہوگا؟ کیا ہوگا اگر مدار بیضوی ہو؟

(e) ہم جانتے ہیں کہ ایک چارج شدہ موصل کی سطح پر برقی میدان غیر مسلسل ہوتا ہے۔ کیا وہاں برقی مضمر بھی غیر مسلسل ہوتا ہے؟

(f) آپ ایک واحد موصل کی صلاحیت کو کیا معنی پہناتیں گے؟

(g) پانی کے دو برقی مستقلہ کی بہت بڑی قدر (6=80) جیسے مائیکا (6=6) کے مقابلے میں، ہونے کی کوئی ایک ممکنہ وجہ سوچیے۔

2.32 ایک استوانی کپیسٹر میں دو ہم محوری استوانے ہیں، جن کی لمبائی 12 سینٹی میٹر ہے اور نصف قطر 1.5 سینٹی میٹر اور 1.4 سینٹی میٹر ہیں۔ باہری استوانے کو زمین گیر کر دیا جاتا ہے اور اندرونی استوانے کو $3.5 \mu\text{C}$ کا چارج دیا جاتا ہے۔ نظام کی صلاحیت اور اندرونی استوانے پر مضمر معلوم کیجیے۔ کنارہ اثرات (کناروں پر میدان خطوط کا مڑنا) نظر انداز کر دیجیے۔

2.33 ایک ایسا متوازی چادر کپیسٹر ڈیزائن کرنا ہے، جس کی وولٹیج 1kV ہو، دو برقی مستقلہ 3 کا مادہ استعمال کیا جائے

اور دو۔ برقی طاقت 10^7 Vm^{-1} کے قریب ہو (دو برقی طاقت، وہ از حد برقی میدان ہے جو ایک مادہ بغیر ٹوٹے برداشت کر سکتا ہے، یعنی کہ بغیر، جزوی آئن کاری کے ذریعے برقی ایصال شروع کیے)۔ تحفظ کے خیال سے، ہم چاہیں گے کہ میدان کبھی بھی دو۔ برقی طاقت کے 10% سے زیادہ نہ ہو۔ تو چادروں کا کم از کم رقبہ کتنا درکار ہوگا کہ $50 \mu\text{F}$ صلاحیت حاصل ہو سکے۔

مندرجہ ذیل سے مطابقت رکھنے والی مساوی مضمرا سطحوں کی تصویر پیش کیجیے۔ 2.34

z سمت میں ایک مستقل برقی میدان

(b) ایک میدان جس کی عددی قدر ہموار طور پر بڑھتی رہتی ہے لیکن رہتا یکساں سمت (فرض کیجیے z) میں ہے۔

(c) مبدے پر رکھا ہوا ایک واحد مثبت چارج

(d) ایک ہموار گرڈ (Grid)، جو ایک مستوی میں، یکساں فاصلوں پر متوازی چارج شدہ تاروں پر مشتمل ہے۔

2.35 نصف قطرہ r_1 اور چارج q_1 کا ایک چھوٹا کرہ نصف قطرہ r_2 اور چارج q_2 کرہ خول سے گھرا ہوا ہے۔ دکھائیے کہ اگر مثبت ہے، تو چارج لازمی طور پر کرہ سے خول کی جانب بہے گا (جب دونوں کو ایک تار سے جوڑ دیا جائے) چاہے خول پر چارج q_2 کی قدر کچھ بھی ہو۔

مندرجہ ذیل کے جواب دیجیے۔ 2.36

(a) ایک ارتقاع کے ساتھ کم ہونے والے برقی میدان کے مطابق، فضا کا اوپری حصہ سطح زمین کے لحاظ سے تقریباً 400KV پر ہے۔ سطح زمین کے قریب میدان تقریباً 100 Vm^{-1} ہے۔ پھر جب ہم گھر سے باہر کھلی فضا میں نکلتے ہیں تو ہمیں برقی جھٹکا کیوں نہیں لگتا۔ (ہم مان لیتے ہیں کہ گھر ایک فولادی پنجرہ ہے، اس لیے کوئی برقی میدان نہیں ہے)

(b) ایک آدمی نے ایک روز شام کو اپنے گھر کے باہر ایک دو میٹر اونچا حازر سلیب لگایا، جس کے اوپری حصے پر ایک المونیم کی بڑی چادر، 100 Vm^{-1} رقبہ کی، لگی تھی۔ اگر وہ اگلی صبح دھاتی چادر کو چھوئے، تو کیا اسی برقی جھٹکا لگے گا؟

(c) ہوا کی قلیل ایصالیت کی وجہ سے فضا میں، پورے کرہ ارض پر اوسطاً 1800 A کا ڈسچارج کرنٹ ہوتا ہے۔ پھر فضا اپنے آپ کو وقت کے ساتھ مکمل طور پر ڈسچارج کیوں نہیں کر لیتی اور برقی طور پر تعدیلی کیوں نہیں ہو جاتی؟ دوسرے لفظوں میں، فضا کو کیا چیز چارج شدہ رکھتی ہے۔

(d) بجلی کڑکنے کے دوران، فضا کی برقی توانائی کا اصراف توانائی کی کن کن شکلوں میں ہوتا ہے؟

[اشارہ : زمین کی سطح پر نیچے کی جانب تقریباً 100 Vm^{-1} برقی میدان ہوتا ہے۔ جو سطحی چارج کثافت:

$-10^{-9} \text{ C m}^{-2}$ سے مطابقت رکھتا ہے۔ 50 Km کی بلندی تک فضا کی معمولی ایصالیت کی وجہ سے

(اس سے اوپر یہ اچھا موصول ہوتی ہے)، زمین پر مجموعی طور پر ہر سکند میں تقریباً $1800 +$ چارج داخل ہوتا ہے۔ لیکن زمین پھر بھی ڈسچارج نہیں ہوتی، کیونکہ طوفان باد و باران اور بجلی کا کڑکنا، جو پورے کرہ ارض پر لگا تار ظہور پذیر ہوتے رہتے ہیں۔ زمین کو مساوی مقدار کا منفی چارج مہیا کر دیتے ہیں۔]

© NCERT
not to be republished