5013CH08

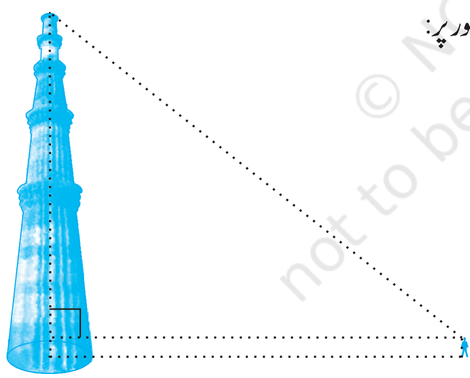
8 ٹرگنومیٹری کا تعارف
(INTRODUCTION TO TRIGONOMETRY)

شاید ایسی کوئی چیز نہیں جو ریاضی میں وہ مرکزی اہمیت رکھتی ہو جو ٹرگنو میٹری کی ہے۔

جے۔ایف۔ہربرٹ (1980)

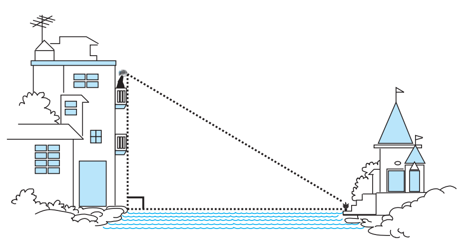
8.1 تعارف

آپ سابقہ کلاسوں میں مثلثوں اور خاص طور سے قائم مثلثوں کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔آیئے اپنے گردونواح سے کچھ ایسی مثالیں لیں جہاں قائم مثلثوں کو تصور کیا جا سکتا ہو۔مثال کے طور پر:



شکل 8.1

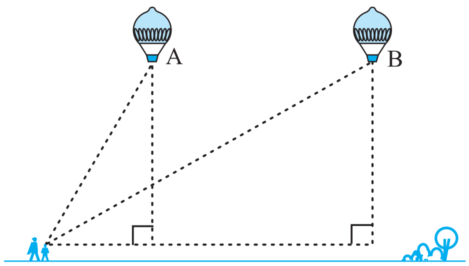
1۔ مان لیجئے اسکول کے کچھ طلباء قطب مینار گھومنے گئے،اگر کوئی طالب علم مینار کے اوپری حصہ کو دیکھتا ہے،تو ایک قائم مثلث کا تصور ابھر کر سامنے آتا ہے۔جیسا کہ شکل 8.1 میں دکھایا گیا ہے۔کیا وہ طالب علم بغیر پیائش کئے ہوئے مینار کی اونچائی معلوم کر سکتا ہے۔



شکل 8.2

2۔ فرض کیجئے ایک لڑکی دریا کے کنارے پر واقع اپنے مکان کی بالکنی میں بیٹھی ہوئی ہے۔وہ نیچے کی طرف ایک پھولوں کے گملے کو دیکھ رہی ہے جو دریا کے دوسرے کنارے پر واقع ایک مندر کی سیڑھیوں پر رکھا ہوا ہے اس صورت حال میں بھی قائم مثلث کی تشکیل تصور کی جا سکتی ہے جیسا کے شکل 8.2 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر آپ وہ

اونچائی جانتے ہوں جہاں پر وہ لڑکی بیٹھی ہے تو کیا آپ دریا کی چوڑائی معلوم کر سکتے ہیں۔



شکل 8.3

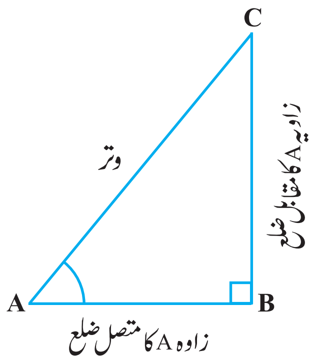
3۔ مان لیجئے گرم ہوا والا غبارہ ہوا میں اڑ رہا ہے ایک لڑکی اس غبارہ کو آسمان میں دیکھتی ہے اور اپنی ماں کے پاس دوڑ کر جاتی ہے اور اسکو اس کے بارے میں بتاتی ہے۔ اس کی ماں بھی تیزی سے مکان کے باہر آ کر اس غبارے کو دیکھتی ہے، جب لڑکی پہلے اس کو دیکھتی ہے تو وہ نقطہ A پر تھا جب وہ اپنی ماں کے ساتھ باہر آ کر اس کو دیکھتی ہے تو وہ اڑتا ہوا نقطہ B پر پہنچ جاتا ہے۔ کیا آپ B کا زمین سے ارتفاع معلوم کر سکتے ہیں؟

اوپر دی گئی تمام صورت حال میں فاصلہ اور بلندیاں کسی ریاضی کی تکنیک سے معلوم کئے جا سکتے ہیں جو ریاضی کی ایک شاخ کے تحت آتی ہے جسے ٹرگنو میٹری کہتے ہیں۔ لفظ ٹرگنو میٹری ایک یونانی لفظ ٹری (جس کا مطلب تین ہے) اور گون (جس کا مطلب اضلاع) اور میٹری (جس کا مطلب پیائش)۔ درحقیقت ٹرگنو میٹری مثلث کے اضلاع اور زاویوں کے تعلق کے مطالعہ کا نام ہے۔ ٹرگنو میٹری کے سلسلہ میں سب سے پہلے کام مصر اور بیبلو نیا میں ہوا۔ ماہر فلکیات نے اس کا استعمال زمین سے سیاروں اور ستاروں کے درمیان فاصلہ معلوم کرنے کے لئے کیا۔ اور آج بھی انجیئر نگ، فزیکل سائنس میں استعمال ہونے والے زیادہ تر تکنیکی طور پر جدید طریقوں کی بنیاد ٹرگنو میٹری کا تصور ہے۔

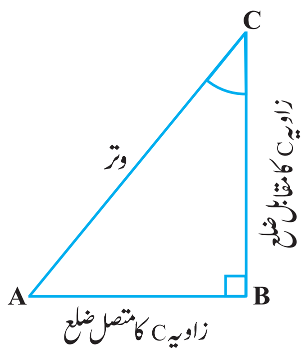
اس باب میں ہم قائم مثلث اس کے حادہ زاویوں اور اضلاع کی کچھ نسبتوں کے بارے میں پڑھیں گے جو زاویوں کی ٹرگنو میٹری نسبتیں کہلاتی ہیں۔ ہم اپنے مطالعہ کو صرف حادہ زاویوں تک محدود رکھیں گے۔ حالانکہ ان نسبتوں کی توسیع دوسرے زاویوں تک بھی ہو سکتی ہے۔ ہم $90°$ اور $0°$ کی پیائش کے زاویوں کی ٹرگنو میٹری نسبتوں کی تعریف بھی بیان کریں گے ہم کچھ مخصوص زاویوں کی ٹرگنو میٹری نسبتیں معلوم کریں گے اور ان نسبتوں پر مبنی کچھ تماثلات معلوم کریں گے جن کو ٹرگنو میٹری تماثلات کہتے ہیں۔

8.2 ٹرگنو میٹرک نسبتیں

سیکشن 8.1 میں آپ نے مختلف صورت حال میں تصور کئے گئے قائم مثلثوں کو دیکھا۔



شکل 8.4



شکل 8.5

آیئے ایک قائم مثلث ABC لیجیے جیسا کہ شکل 8.4 میں دکھایا گیا ہے۔

یہاں CAB ∠ (یا مختصراً زاویہ A) ایک حادہ زاویہ ہے۔ زاویہ A کی مناسبت سے ضلع BC کا مقام نوٹ کیجئے۔ یہ DA کے سامنے ہے ہم اس کو A کے مقابل ضلع کہتے ہیں۔ AC قائم مثلث کا وتر ہے۔ اور ضلع AB، کا ایک بازو ہے۔ اس لئے ہم اس کو A∠ کا متصل ضلع کہتے ہیں۔

نوٹ کیجیے کہ اضلاع کا مقام تبدیل ہو جاتا ہے جب A∠ کی جگہ C∠ پر غور کرتے ہیں (شکل 8.5)

آپ اپنے سابقہ کلاسوں میں نسبت کے تصور کے بارے میں پڑھا ہے۔ اب ہم مخصوص نسبتوں جن میں قائم زاویہ مثلث کے اضلاع ملوث ہوں، کی تعریف بیان کریں گے اور ان کو ٹرگنومیٹرک نسبتوں کا نام دیں گے۔

ٹرگنومیٹرک کی نسبتیں ایک قائم مثلث ABC کے زاویہ A کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں مندرجہ میں معرف ہیں۔

$$\text{sine کا } \angle A = \frac{\text{زاویہ A کے مقابل ضلع}}{\text{وتر}}$$

$$\text{cosine کا } \angle A = \frac{\text{زاویہ A کے متصل ضلع}}{\text{وتر}}$$

$$\text{tangent کا } \angle A = \frac{\text{زاویہ A کے مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{cosecant کا } \angle A = \frac{1}{\text{Sine کا } \angle A} \quad \frac{\text{وتر}}{\text{زاویہ} \angle A \text{ کے مقابل ضلع}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\text{secant کا } \angle A = \frac{1}{\text{Cosine کا } \angle A} \quad \frac{\text{وتر}}{\text{زاویہ} \angle A \text{ کے متصل ضلع}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\text{cotangent کا } \angle A = \frac{1}{\text{Tangent کا } \angle A} = \frac{\angle A \text{ کا متصل ضلع}}{\text{زاویہ A کا مقابل ضلع}}$$

نسبتیں جو اوپر معروف کی گئی ہیں ان کی مختصر بالترتیب شکل ہے sin A, cos A, tan A, cosec A, sec اور Cot A۔ نوٹ کیجئے کہ نسبتیں **Sec A, Cosec A** اور **cot A** بالترتیب Cos A, Sin A اور tan A کی مقلوب نسبتیں ہیں۔

مزید مشاہدہ کیجئے۔

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ اور } \tan A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

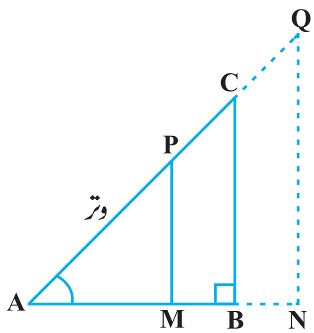
اس طرح سے قائم زاوی مثلث میں ایک حادہ زاویہ کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں زاویہ اور اس کے اضلاع کے درمیان ایک تعلق کو ظاہر کرتی ہیں۔

آپ قائم زاوی مثلث میں زاویہ C کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی تعریف بیان کرنے کی کوشش کیوں نہیں کرتے ؟ (شکل 8.5 دیکھیے)

آریہ بھٹ
A.D. 476 – 550

جس طریقہ سے '**sine**' کا استعمال اب ہم کرتے ہیں سب سے اس کا اسی طریقہ سے استعمال آریہ بھٹ کی تصنیف اریہ بھٹیم میں 500 عیسوی میں کیا گیا ہے۔ اریہ بھٹ نے نصف وتر کے لئے لفظ اردھا۔ جیا استعمال کیا ہے جو آگے چل کر مختصراً جیا اور جیوا ہو گیا جب آریہ بھٹیم کا ترجمہ عربی میں ہوا تو جیوا کا جیوا ہی ترجمہ کیا گیا۔ جب عربی کے ترجمہ کو لاطینی زبان میں ترجمہ کیا گیا تو جیوا کو sine کہا گیا۔ اور جلد ہی sinus، sine کے طور پر استعمال ہونے لگا۔ اور یوروپ میں ہر جگہ ریاضی کی کتابوں میں sine ہی استعمال ہونے لگا، انگلینڈ کے ایک ماہر فلکیات کے پروفیسر (Edmund Gunter)(1581-1626) نے سب سے پہلے اس کی مختصر شکل sin کو استعمال کیا۔

ارکان cosine اور tangent کی ابتدا بہت میں ہوئی تمتی زاویہ کا sine معلوم کرنے کے سلسلہ میں cosin تفاعل کا وجود ہوا۔ اریہ بھٹ نے اسے kotijya کہا اور Edmund نے اسے cosinus کا نام دیا۔ 1974 میں سب سے پہلے انگریز ریاضی داں سر جان موری (Sir Jonas Moore) اس کو اس کی مختصر ترین شکل 'cos' میں استعمال کیا۔



شکل 8.6

ریمارک: نوٹ کیجیے کہ علامت sinA، زاویہ A کے sine کی مختصر شکل ہے۔ sin کا A سے علیحدہ کوئی مطلب نہیں ہے۔ SinA اور Sin اور A کا حاصل ضرب نہیں ہے اسی طرح cos, Cos اور A کا حاصل ضرب نہیں ہے۔ یہی ترجمانی باقی تمام ٹرگنومیٹرک نسبتوں کے لئے ہے۔

اب اگر ہم ایک قائم مثلث کے وتر AC پر ایک نقطہ P لیں یا AC کو بڑھانے پر اس پر نقطہ Q لیں اور PM, AB پر اور QN بڑھتے ہوئے AB پر عمود ڈالیں (شکل 8.6 دیکھیں) تو Δ PAM میں ∠A کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں کس طرح مختلف ہوں گی۔ Δ CAB میں ∠A کی یا Δ QAN میں ∠A کی نسبتوں سے؟

اس کا جواب دینے کے لئے سب سے پہلے ان مثلثوں کو دیکھئے، کیا ΔPAM، Δ CAB کے مشابہ ہے؟ یاد کیجیے آپ نے باب 6 میں AA مشابہت کی شرط کے بارے میں پڑھا تھا۔ آپ دیکھیں گے کہ مثلث PAM اور CAB مشابہ ہیں۔ اس لئے مشابہ مثلثوں کی خصوصیت کے مطابق، مثلثوں کے نظیری اضلاع متناسب ہوں گے۔

اس لئے ہمارے پاس ہے۔ $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}$

اس سے ہمیں ملتا ہے $\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A$

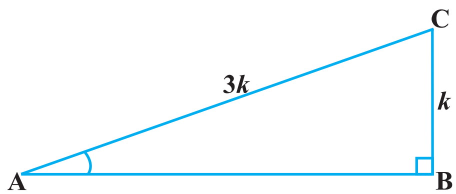
اسی طرح سے $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A, \frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$ اور یہ سلسلہ جاری رہتا ہے۔

اس سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ Δ PAM میں زاویہ A کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں مثلث Δ CAB میں زاویہ A کی نسبتوں سے مختلف نہیں ہیں۔

اسی طرح سے آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ sin A کی قدر (اور دوسری ٹرگنومیٹری نسبتیں بھی) ΔQAN میں بھی یکساں ہیں۔ اپنے مشاہدہ سے یہ واضح ہو گیا کہ مثلث کے زاویہ (حادہ) کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی قدر اس کے اضلاع کی لمبائیوں کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتیں۔ اگر زاویہ وہی ہے۔

نوٹ: اپنی آسانی کے لئے آپ $\sin^2 A$ ، $\cos^2 A$ کی جگہ $(\sin A)^2$ ، $(\cos A)^2$ وغیرہ لکھ سکتے ہیں لیکن

$\sin^{-1} A \neq (\sin A)^{-1} = \text{coses}A$ (کیونکہ یہ sine inverse A کہلاتا ہے) $\sin^{-1} A$ کا مختلف مفہوم ہے جس کو ہم آئندہ کلاسوں میں پڑھیں گے، یہی بات باقی تمام ٹرگنومیٹرک نسبتوں کے لئے درست ہے ہم حادہ زاویہ کی چھ ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی تعریف کی۔ اگر ہمیں ان میں سے ایک کا علم ہو تو کیا ہم دوسری نسبتیں معلوم کر سکتے ہیں؟ آیئے دیکھتے ہیں۔



شکل 8.7

اگر ایک قائم مثلث ABC میں $\sin A = \frac{1}{3}$, تب اس کا مطلب ہے $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$ یعنی مثلث A B C کے اضلاع BC، k کے برابر ہو تو AC، 3k ہوگا، جہاں k کوئی مثبت عدد ہے۔

زاویہ A کی دوسری ٹرگنومیٹرک نسبت معلوم کرنے کے لئے ہمیں تیسرے ضلع AB کی لمبائی معلوم کرنا ہوگی۔ کیا آپ کو فیثاغورث کا مسئلہ یاد ہے؟ آیئے اس کا استعمال کر کے مطلوبہ AB کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2}\,k)^2$$

اس لئے $AB = \pm 2\sqrt{2}\,k$

اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے $AB = 2\sqrt{2}\,k$ (کیوں $AB \neq 2\sqrt{2}\,k$?)

اب $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

اسی طرح سے آپ زاویہ A کی دوسری ٹرگنومیٹرک نسبتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

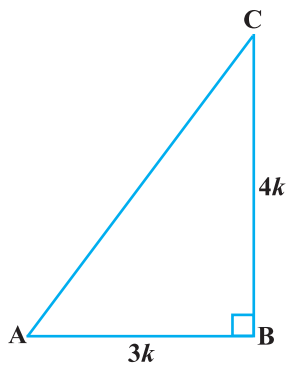
ریمارک: کیونکہ ایک قائم مثلث میں وتر سب سے بڑا ضلع ہوتا ہے اس لئے sin A اور cos A کی قدر ہمیشہ 1 سے کم ہوتی ہے (یا مخصوص حالت میں 1 کے برابر)

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں

مثال 1: $\tan A = \frac{4}{3}$ دیا ہوا ہے۔ زاویہ A کی باقی ٹرگنومیٹرک نسبتیں معلوم کیجیے۔

حل: سب سے پہلے ایک قائم زاوی مثلث ABC بنایئے (دیکھیے شکل 8.8)

اب ہم جانتے ہیں کہ $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$



شکل 8.8

اس لئے اگر $BC = 4k$ تب $AB = 3k$ جہاں k ایک مثبت عدد ہے۔

اب فیثاغورث کے مسئلے کے مطابق ہمارے پاس ہے۔

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

$$AC = 5k$$

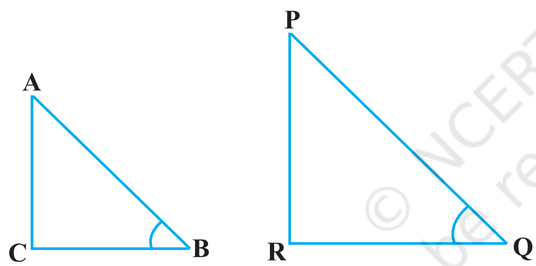
اب ہم باقی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کو ان کی تعریف استعمال کر کے لکھ سکتے ہیں۔

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

اس لئے $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$ ، $\operatorname{coses} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}$ اور $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$

مثال 2: اگر $\angle B$ اور $\angle Q$ حادہ زاویہ ہیں جب کہ $\sin B = \sin Q$ تب ثابت کیجئے کہ $\angle B = \angle Q$۔



شکل 8.9

حل: دو قائم مثلثیں ABC اور PQR پر غور کریں جہاں $\sin B = \sin Q$ (شکل 8.9 دیکھیے)

ہمارے پاس ہے

$$\sin B = \frac{AC}{AB}$$

اور
$$\sin Q = \frac{PR}{PQ}$$

تب
$$\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$$

اس لئے
$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k \qquad (1)$$

اب فیثاغورث مسئلے کو استعمال کرنے پر،

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

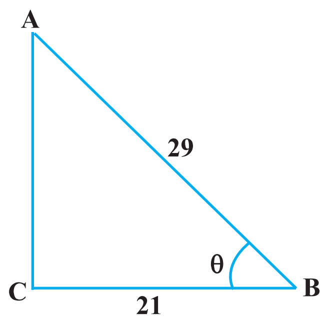
اور $QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$

اس لئے $\dfrac{BC}{QR} = \dfrac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \dfrac{\sqrt{k^2PQ^2 - k^2PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \dfrac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k$ (2)

(1) اور (2) سے ہمیں ملتا ہے۔

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

تب مسئلہ 6.4 کو استعمال کرنے پر $\Delta ACB \sim \Delta PRQ$ اور اس لئے $\angle B = \angle Q$



شکل 8.10

مثال 3: مثلث ACB پر غور کیجیے جو C پر قائم ہے۔ جس میں AB

$\angle ABC = \theta$ اور $BC = 21$units، $= 29$units

(شکل 8.10 دیکھئے)۔ قدر معلوم کیجیے۔

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

حل: D ABC میں ہمارے پاس ہے

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{(29-21)(29+21)} = \sqrt{(8)(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{ units}$$

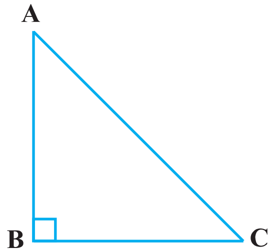
اس لئے $\sin\theta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{20}{29},\ \cos\theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{21}{29}$.

اب (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\dfrac{20}{29}\right)^2 + \left(\dfrac{21}{29}\right)^2 = \dfrac{20^2 + 21^2}{29^2} = \dfrac{400+441}{841} = 1,$

اور (ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\dfrac{21}{29}\right)^2 - \left(\dfrac{20}{29}\right)^2 = \dfrac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \dfrac{41}{841}$

مثال 4: ایک قائم مثلث ABC جو B زاویہ پر قائم ہے، میں اگر $\tan A = 1$ تب تصدیق کیجئے کہ $2\sin A\cos A = 1$

حل: Δ ABC میں $\tan A = \dfrac{BC}{AB} = 1$ (شکل 8.11 دیکھیے)



شکل 8.11

یعنی $BC = AB$

آیئے

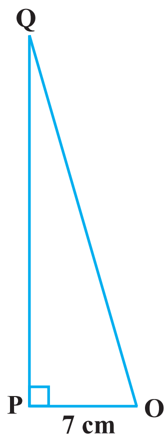
اب $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$$= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$$

اس لئے $\sin A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ اور

اس لئے $2\sin A \cos A = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1,$ جو کے مطلوبہ قدر ہے

مثال 5: $\Delta\, OPQ$ میں جو P پر قائم زاویہ ہے $OP = 7$ سینٹی میٹر اور $OQ - PQ = 1$ سینٹی میٹر (شکل 8.12 دیکھیے)۔ $\sin Q$ اور $\cos Q$ کی قدر معلوم کیجیے۔



شکل 8.12

حل: $\Delta\, OPQ$ میں ہمارے پاس ہے

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$$

یعنی $(1+PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$ (کیوں)

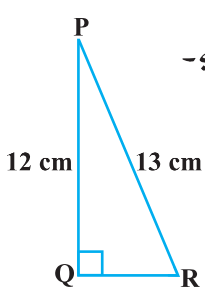
یعنی $1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

یعنی $1 + 2PQ = 7^2$ (کیوں)

یعنی $PQ = 24$ سینٹی میٹر اور $OQ = 1 + PQ = 25$ سینٹی میٹر

اس لئے $\cos Q = \dfrac{24}{25}$ اور $\sin Q = \dfrac{7}{25}$

مشق 8.1



شکل 8.13

1۔ قائم $\Delta\, ABC$ میں جو B زاویہ پر قائم ہے۔ $AB = 24$ سینٹی میٹر، $BC = 7$ سینٹی میٹر معلوم کیجیے۔

(i) $\sin A, \cos A$

(ii) $\sin C, \cos C$

2۔ شکل 8.13 میں $\tan P - \cot R$ معلوم کیجیے۔

3۔ اگر $\sin A = \dfrac{3}{4}$ تو $\cos A$ اور $\tan A$ کی قدر معلوم کیجیے۔

4۔ $15\cot A = 8$ دیا ہوا ہے، $\sin A$ اور $\sec A$ معلوم کیجیے

5۔ $\sec\theta = \frac{13}{12}$ دیا ہوا ہے، باقی تمام ٹرگنومیٹرک نسبتیں معلوم کیجیے۔

6۔ اگر $\angle A$ اور $\angle B$ حادہ زاویہ ہیں جبکہ $\cos A = \cos B$ تب دکھائیے کہ $\angle A = \angle B$

7۔ اگر $\cot\theta = \frac{7}{8}$، قدر معلوم کیجیے: (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$، (ii) $\cot^2\theta$

8۔ اگر $3\cot A = 4$ جانچ کیجیے کہ $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ ہے یا نہیں۔

9۔ مثلث ABC جو B پر قائم ہے، میں اگر، $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$، تو قدر معلوم کیجیے۔

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

10۔ ΔPQR جو Q پر قائم زاویہ ہے، میں $PR+QR=25cm$ اور $PQ=5cm$ تو $\sin P, \cos P$ اور $\tan P$ کی قدر معلوم کیجیے۔

11۔ بیان کیجیے کہ مندرجہ ذیل صحیح ہیں یا غلط۔ اپنے جواب کا جواز بھی پیش کیجیے۔

(i) $\tan A$ کی قدر ہمیشہ 1 سے کم ہوتی ہے۔

(ii) زاویہ A کی قدر کے لئے $\sec A = \frac{12}{5}$ ہے۔

(iii) $\cos A$، زاویہ A کے cosecant کی مختصر شکل ہے۔

(iv) $\cot A$، cot اور A کا حاصل ضرب ہے۔

(v) کسی زاویہ θ کے لئے $\sin\theta = \frac{4}{3}$

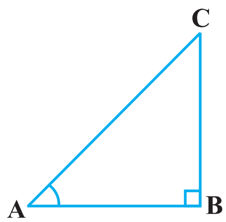
8.3 کچھ مخصوص زاویوں کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں

جیومیٹری میں آپ زاویوں °30، °45، °60 اور °90 کی تشکیل سے آپ پہلے ہی واقف ہیں ۔اس سیکشن میں آپ ان تمام زاویوں کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی قدر معلوم کریں گے اس کے علاوہ °0 کی بھی

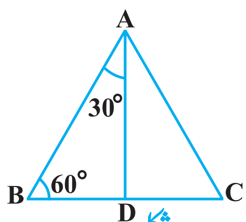
°45 کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں

ΔABC جو B پر قائم ہے۔ اگر ایک زاویہ °45 ہے تب دوسرا زاویہ بھی °45 کا ہوگا یعنی $\angle A = \angle C = 45°$ (شکل 8.14 دیکھئے)

اس لئے $BC = AB$ (کیوں؟)



شکل 8.14



شکل 8.15

اب فرض کیجیے $BC = AB = a$

تب فیثاغورث کے مسلہ کی رو سے $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

اور اس لئے $AC = a\sqrt{2}$

ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی تعریف کو استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے:

$$\sin 45° = \frac{\text{زاویہ } 45° \text{ کے مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{\text{زاویہ } 45° \text{ کا متصل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cot 45° = \frac{\text{زاویہ } 45° \text{ کا مقابل ضلع}}{\text{زاویہ } 45° \text{ کا متصل ضلع}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

مزید $\operatorname{cosec} 45° \frac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$ $\sec 45° \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$, $\cot 45° \frac{1}{\tan 45°} = 1$

30° اور 60° کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں

آیئے اب 30° اور 60° کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں معلوم کرتے ہیں۔ایک مساوی ضلعی مثلث ABC پر غور کیجئے۔کیونکہ اس کا ہر ایک زاویہ 60° کا ہے اس لئے، $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

ضلع BC پر A سے عمود D کھینچیے (شکل 8.15 دیکھیے)

اب $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (کیوں؟)

اس لئے $BD = DC$

اور $\angle BAD = \angle CAD$ (CPCT)

ΔABD ایک قائم مثلث ہے جو D پر قائم ہے جس میں $\angle BAD = 30°$ اور $\angle ABD = 60°$ (شکل 8.15 دیکھئے)

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ ٹرگنومیٹرک نسبتیں معلوم کرنے کے لئے ہمیں مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔اس لئے اب فرض کیجئے کہ $AB = 2a$۔

تب $BD = \frac{1}{2} BC = a$

اور $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$

اس لئے $AD = a\sqrt{3}$

اب ہمارے پاس ہے:

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مزید

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2, \ \sec 30^\circ \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

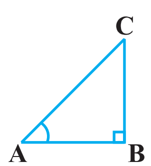
$$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$$

اسی طرح سے

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

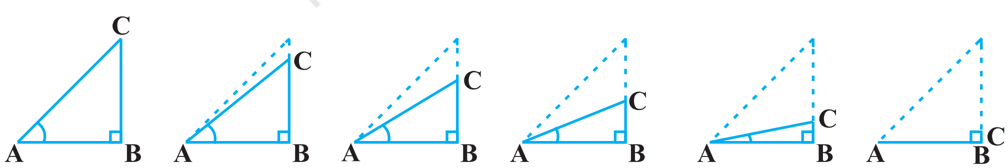
$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sec 60^\circ = 2$ اور $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

0° اور 90° کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں



شکل 8.16

آیئے اب دیکھتے ہیں کہ کسی قائم مثلث ABC میں زاویہ A کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں پر کیا اثر پڑتا ہے جب ان کو چھوٹے سے چھوٹا کیا جائے جب تک یہ صفر نہ ہو جائیں۔ کیونکہ ∠A چھوٹے سے چھوٹا ہو رہا ہے اس لئے BC کی لمبائی گھٹے گی۔ اور نقطہ C، نقطہ B کی نزدیک ہوگا، اور آخر میں جب ∠A، 0° کے بہت قریب ہو جائے گا۔ تو AC تقریباً AB کے برابر ہو جائے گا۔ (شکل 8.17 دیکھئے)



شکل 8.17

جب ∠A، 0° کے کافی نزدیک ہو تو BC، 0 کے نزدیک ہو جائے گا اس لئے $\sin A = \frac{BC}{AC}$ کی قدر 0 کے بہت قریب ہو جائے گی۔ مزید جب ∠A، 0° کے نزدیک ہو تو AC تقریباً AB کے برابر ہوگا اور اس لئے $\cos A = \frac{AB}{AC}$ کی قدر 1

کے کافی نزدیک ہوگی۔

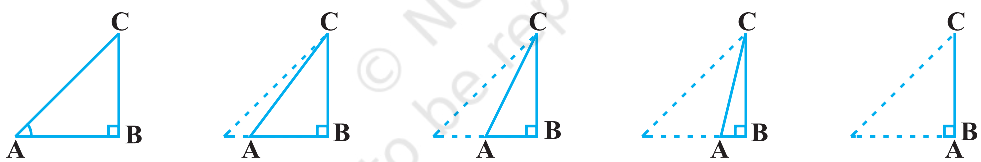
اس سے ہمیں مدد ملتی ہے کہ ہم کس طرح $\sin A$ اور $\cos A$ کی قدروں کی تعریف بیان کریں جب $A = 0^\circ$ ہم تعریف کرتے ہیں $\sin 0^\circ = 0$ اور $\cos 0^\circ = 1$

ان کو استعمال کرنے پر ہمارے پاس ہے:

$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = 0, \cot 0^\circ \frac{1}{\tan 0^\circ}$$ (جو معرف نہیں ہیں کیوں؟)

$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} \text{ اور } \text{cos es } 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ}$$ (جو معرف نہیں ہیں کیوں؟)

اب دیکھئے کہ $\angle A$ کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کا کیا ہوتا ہے جب یہ زاویہ ΔABC میں بڑے سے بڑا کر دیا جاتا ہے جب تک کہ یہ 90° کے برابر نہ ہو جائے۔ جب $\angle A$ بڑے سے بڑا ہوتا ہے۔ $\angle C$ اتنا ہی چھوٹے سے چھوٹا ہو جاتا ہے۔ اس لئے ایسی حالت میں ضلع AB کی لمبائی گھٹا دیتی ہے۔ نقطہ A، نقطہ B کے نزدیک آتا رہتا ہے۔ اور آخر میں $\angle A$ جب 90° کے بہت



شکل 8.18

نزدیک ہو جاتا ہے تو $\angle C$، 0° کے نزدیک ہو جاتا ہے۔ اور ضلع AC تقریباً ضلع BC پر منطبق ہو جاتا ہے۔ (شکل 8.18 دیکھئے)۔ جب $\angle C$، 0° کے کافی نزدیک ہو تو $\angle A$ 90° کے کافی نزدیک ہوگا۔ ضلع AC تقریباً BC کے برابر ہو جائے گی اور اس لئے $\sin A$، 1 کے کافی نزدیک ہو جائے گا۔ جب $\angle A$، 90° کے بہت نزدیک ہو تو $\angle C$، 0° کے بہت نزدیک ہوگا، اور ضلع AB تقریباً صفر ہو جائے گا۔ اس لئے $\cos A$ صفر کے بہت نزدیک ہوگا۔

اس لئے ہم تعریف بیان کرتے ہیں: $\sin 90^\circ = 1$ اور $\cos 90^\circ = 0$

آپ اب 90° کی باقی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کو کیوں نہیں معلوم کرتے؟

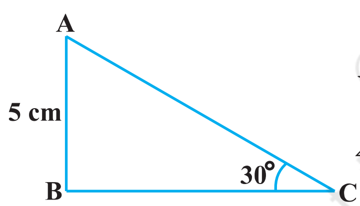
اب ہم حوالہ کے لئے جدول 8.1 میں $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ کی تمام ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی قدر دیتے ہیں۔

جدول 8.1

$\angle A$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	معرف نہیں
cosec A	معرف نہیں	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	معرف نہیں
cot A	معرف نہیں	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ریمارک: مذکورہ بالا جدول سے آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ جب $\angle A$، $0°$ سے $90°$ کی طرف بڑھتا ہے تب sin A، $0°$ سے 1 کی طرف بڑھتا ہے اور cos A، 1 سے 0 کی طرف گھٹتا ہے۔

آیئے اوپر دی گئی قدروں کے استعمال کی وضاحت کچھ مثالوں سے کرتے ہیں۔



شکل 8.19

مثال 6: ΔABC جو B زاویے پر قائم ہے، میں 5 سینٹی میٹر $=AB$ اور $\angle ACB = 30°$ (شکل 8.19 دیکھئے)۔ اضلاع BC اور AC کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

حل: ضلع BC کی لمبائی معلوم کرنے کے لئے ہم اس ٹرگنومیٹرک نسبت کو لیں گے۔ جس میں BC اور دیا ہوا ضلع AB شامل ہو۔ کیونکہ BC زاویہ C کا متصل ضلع ہے اور AB، زاویہ C کا مقابل ضلع ہے، اس لئے

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

یعنی
$$\frac{5}{BC} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

جس سے ہمیں ملتا ہے
$$BC = 5\sqrt{3}\text{cm}$$

ضلع AC کی لمبائی معلوم کرنے کے لئے ہم غور کرتے ہیں۔

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC} \quad (\text{کیوں؟})$$

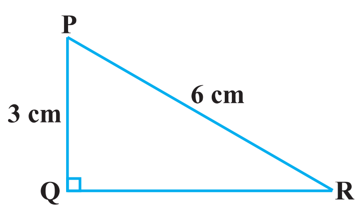
یعنی
$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

AC=30 سینٹی میٹر

نوٹ کیجیے کہ ہم متبادل طریقہ کے طور پر ہم مذکورہ بالا مثال میں تیسرا ضلع معلوم کرنے کے لئے فیثا غورث کے مسئلہ کا استعمال کر سکتے تھے،

یعنی
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10cm$$

مثال 7: قائم PQR Δ جو Q پر قائم ہے، میں (شکل 8.20 دیکھیے) PQ = 3 سینٹی میٹر اور PR = 6 سینٹی میٹر ∠QPR اور ∠PRQ معلوم کیجیے



شکل 8.20

حل: دیا ہوا ہے

$$\frac{PQ}{PR} = \sin R$$

یا
$$\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

اس لئے $\angle PRQ = 30^\circ$

اس لئے $\angle QPR = 60^\circ$ (کیوں؟)

آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ قائم مثلث کے کسی دوسرے حصہ (یا تو حادہ زاویہ یا کوئی ضلع) کا ایک ضلع معلوم ہو تو مثلث کے باقی اضلاع اور زاویہ معلوم کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 8: اگر $\sin(A-B) = \frac{1}{2}, \cos(A+B) = \frac{1}{2}, 0^\circ < A+B \le 90^\circ, A > B,$ تو A اور B معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$ اس لئے $A - B = 30^\circ$ (کیوں؟) (1)

مزید کیونکہ $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$ اس لئے $A + B = 60^\circ$ (کیوں؟) (2)

(1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے $A = 45^\circ$ اور $B = 150^\circ$

مشق 8.2

1۔ مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

(ii) $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 - \sin^2 60^\circ$

(iii) $\dfrac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$ (iv) $\dfrac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

(v) $\dfrac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

2۔ صحیح جواب کو چنئے اور اپنے انتخاب کا جواز پیش کیجیے۔

(i) $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ} =$

(A) $\sin 60^\circ$ (B) $\cos 60^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\sin 30^\circ$

(ii) $\dfrac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ} =$

(A) $\tan 90^\circ$ (B) 1 (C) $\sin 45^\circ$ (D) 0

(iii) $\sin 2A = 2\sin A$ درست جبکہ $A=$

(A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°

3۔ اگر $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ اور $\tan(A-B) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$؛ $0^\circ < A+B \le 90^\circ; A>B$ تو A اور B معلوم کیجیے۔

4۔ بیان کیجیے کہ مندرجہ ذیل صحیح ہیں یا غلط۔ آپ اپنے جواب کا جواز پیش کیجیے۔

(i) $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$

(ii) جیسے θ بڑھتا ہے $\sin\theta$ کی قدر بھی بڑھتی ہے

(iii) جیسے θ بڑھتا ہے $\cos\theta$ کی قدر بھی بڑھتی ہے

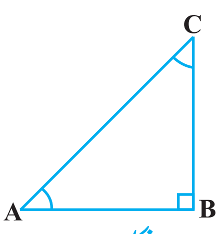
(iv) θ کی تمام قدروں کے لئے $\sin\theta = \cos\theta$

(v) $A = 0^\circ$ کے لئے $\cot A$ معرف نہیں ہے۔

8.4 تحتی زاویوں کے لئے ٹرگنومیٹرک نسبتیں

یاد کیجئے کہ دو زاویہ تکمیل کہلاتے ہیں اگر ان کا حاصل جمع 90° ہو۔ $\Delta\ ABC$ میں جو B زاویے پر قائم ہے، کیا آپ تکمیلی زاویوں کے جوڑوں کو دیکھ سکتے ہیں (شکل 8.21 کو دیکھیے)

کیونکہ $\angle A + \angle C = 90^\circ$، اس لئے یہ ایسے جوڑے میں، ہمارے پاس ہے۔



شکل 8.21

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \qquad \cos A = \frac{AB}{AC} \qquad \tan A = \frac{BC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} \qquad \sec A = \frac{AC}{AB} \qquad \cot A = \frac{AB}{BC}$$

آیئے اب $\angle C = 90^\circ - \angle A$ کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں لکھتے ہیں۔

آسانی کے لئے ہم $90^\circ - A$ لکھتے ہیں، زاویہ $90^\circ - A$ کے مقابل اور متصل اضلاع کو نسے ہوں گے؟ آپ دیکھیں گے کہ $90^\circ - A$ کا مقابل ضلع AB اور متصل ضلع BC ہوگا۔ اس لئے،

$$\left.\begin{array}{lll} \sin(90^\circ - A) = \dfrac{AB}{AC}, & \cos(90^\circ - A) = \dfrac{BC}{AC} & \tan(90^\circ - A) = \dfrac{AB}{BC} \\ \operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \dfrac{AC}{AB} \quad (1) & \sec(90^\circ - A) = \dfrac{AC}{BC} & \cot(90^\circ - A) = \dfrac{BC}{AB} \end{array}\right\} (1)$$

اب (1) اور (2) میں دی گئی نسبتوں کا موازنہ کیجئے، مشاہدہ کیجئے کہ:

$$\sin(90^\circ - A) = \frac{AB}{AC} = \cos A \quad \text{اور} \quad \cos(90^\circ - A) = \frac{BC}{AC} = \sin A$$

$$\left.\begin{array}{ll} \tan(90^\circ - A) = \dfrac{AB}{BC} = \cot A & \cot(90^\circ - A) = \dfrac{BC}{AB} = \tan A \\ \sec(90^\circ - A) = \dfrac{AC}{BC} = \operatorname{cosec} A & \operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \dfrac{AC}{AB} = \sec A \end{array}\right\} \quad (2)$$

اس لئے

$\sin(90^\circ - A) = \cos A$, $\cos(90^\circ - A) = \sin A$,

$\tan(90^\circ - A) = \cot A$, $\cot(90^\circ - A) = \tan A$,

$\sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \sec A$,

0° اور 90° کے درمیان زاویہ A کی تمام قدروں کے لئے جانچ کیجئے کہ آیا $A = 0^\circ$ یا $A = 90^\circ$ کے درست ہیں یا نہیں۔

نوٹ: $\tan 0^\circ = 0 = \cot 90^\circ$, $\sec 0^\circ = 1 = \operatorname{cosec} 90^\circ$ اور $\sec 90^\circ$, $\operatorname{cosec} 0^\circ$, $\tan 90^\circ$ اور $\cot 0^\circ$ معرف نہیں ہیں۔

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 9: قدر معلوم کیجئے $\dfrac{\tan 65^\circ}{\cot 25^\circ}$

حل: ہم جانتے ہیں: $\cot A = \tan (90° - A)$

اس لئے $\cot 25° = \tan (90° - 25°) = \tan 65°$

یعنی $$\frac{\tan 65°}{\cot 25°} = \frac{\tan 65°}{\tan 65°} = 1$$

مثال 10: اگر $\sin 3A = \cos (A - 26°)$، جہاں $3A$ ایک حادہ زاویہ ہے تو A کی قدر معلوم کیجیے۔

حل: ہمیں دیا ہوا ہے کہ $\sin 3A = \cos (A - 26°)$ (1)

کیونکہ $\sin 3A = \cos (90° - 3A)$ اس لئے ہم (1) کو لکھ سکتے ہیں

$$\cos (90° - 3A) = \cos (A - 26°)$$

کیونکہ $90° - 3A$ اور $A - 26°$ دونوں حادہ زاویہ ہیں اس لئے

$$90° - 3A = A - 26°$$

جس سے ہمیں ملتا ہے $A = 29°$

مثال 11: $\cot 85° + \cos 75°$ کو $0°$ اور $45°$ کے درمیان کی ٹرگنومیٹرک قیمتوں میں ظاہر کیجیے۔

حل: $$\cot 85° + \cos 75° = \cot (90° - 5°) + \cos (90° - 15°)$$

$$= \tan 5° + \sin 15°$$

مشق 8.3

1۔ قدر معلوم کیجیے:

(i) $\dfrac{\sin 18°}{\cos 72°}$ (ii) $\dfrac{\tan 26°}{\cot 64°}$ (iii) $\cos 48° - \sin 42°$ (iv) $\operatorname{cosec} 31° - \sec 59°$

2۔ دکھایئے کہ:

(i) $\tan 48° \tan 23° \tan 42° \tan 67° = 1$

(ii) $\cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52° = 0$

3۔ اگر $\tan 2A = \cot (A - 18°)$، جہاں $2A$ ایک حادہ زاویہ ہے، تو A کی قدر معلوم کیجیے۔

4۔ $\tan A = \cot B$ تو ثابت کیجیے کہ $A + B = 90°$۔

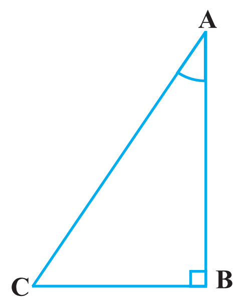
5۔ اگر $\sec 4A = \operatorname{cosec}\ (A - 20°)$، جہاں $4A$ ایک حادہ زاویہ ہے، تو A کی قدر معلوم کیجیے۔

6۔ اگر A، B اور C مثلث ABC کے داخلی زاویہ ہیں تو دکھایئے

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

7۔ $\sin 67° + \cos 75°$ کو $0°$ اور $45°$ کے درمیان زاویوں کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں میں ظاہر کیجیے۔

8.5 ٹرگنومیٹرک کے تماثلات



شکل 8.22

آپ یاد کیجیے کہ ایک مساوات تماثلہ کہلاتی ہے اگر وہ اس میں موجود متغیر کی تمام قدروں کے لئے درست ہو اسی طرح سے مساوات جس میں ٹرگنومیٹرک نسبتیں شامل ہوتی ہیں ٹرگنومیٹرک تماثل کہلاتی ہے اگر اس میں ملوث تمام زاویوں کے لئے درست ہو۔

اس سیکشن میں ہم ایک ٹرگنومیٹری کا تماثل ثابت کریں گے اور اس کا استعمال باقی دوسری مفید ٹرگنومیٹری کے تماثلات کو ثابت کرنے میں کریں گے۔

$\Delta\, ABC$ میں، جو B پر قائم ہے (شکل 8.22 دیکھئے) ہمارے پاس ہے:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

(1) کے ہر رکن کو AC^2 سے تقسیم کرنے پر ہمیں ملتا ہے،

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

یعنی $$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

یعنی $$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

یعنی $$\mathbf{\cos^2 A + \sin^2 A = 1}$$

یہ A کی تمام قدروں کے لئے درست ہے جب کہ $0° \le A \le 90°$، اس لئے یہ ٹرگنومیٹرک تماثل ہے۔

آیئے (1) کو دونوں طرف AB^2 سے تقسیم کریں، ہمیں ملتا ہے

$$\frac{AB^2}{AB^2}+\frac{BC^2}{AB^2}=\frac{AC^2}{AB^2}$$

یا

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2+\left(\frac{BC}{AB}\right)^2=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

یعنی

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A \qquad (3)$$

کیا یہ مساوات $A = 0°$ کے لئے درست ہے؟ ہاں، یہ ہے $A = 90°$ کے بارے کیا خیال ہے۔ہم جانتے ہیں کہ $A=90°$ کے لئے A اور A معرف نہیں ہیں اس لئے (3) درست ہے تمام A کے لئے $0° \le A < 90°$

آیئے دیکھتے ہیں کہ ہم (1) BC^2 سے تقسیم کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{BC^2}{BC^2}=\frac{AC^2}{BC^2}$$

یعنی

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2+\left(\frac{BC}{BC}\right)^2=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

یعنی

$$\cot^2 A+1=\operatorname{cosec}^2 A \qquad (4)$$

نوٹ کیجئے کہ $A = 0°$ کے لئے cosec A اور cot A معرف نہیں ہیں اس لئے (4) تمام A کے درست ہے جب کہ $0° < A \le 90°$

ان تماثلات کا استعمال کر کے ہم ہر ٹرگنومیٹرک نسبت کو دوسری نسبت کی شکل میں بدل سکتے ہیں یعنی اگر کوئی سی نسبت ایک نسبت آپ کو معلوم ہے تو ہم دوسری ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی قدر معلوم کر سکتے ہیں۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ ہم ان تماثلات کو استعمال کر کے ایسا کس طرح کر سکتے ہیں۔ فرض کیجئے ہم جانتے ہیں کہ $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$، تب $\cot A = \sqrt{3}$

کیونکہ $\sec^2 A = 1+\tan^2 A = 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$، $\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$ اور $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

دوبارہ $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$ اس لئے $\operatorname{cosec} A = 2$

مثال 12: نسبتوں cos A، tan A اور sec A کو sin A کی شکل میں لکھیے۔

حل: کیونکہ $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ اس لئے

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A, \text{ i.e.,} \cos A = \pm\sqrt{1-\sin^2 A}$$

اس سے ہمیں ملتا ہے $\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A}$ (کیوں؟)

کیونکہ $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$ اور $\sec A = \dfrac{1}{\cos A} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$

مثال 13: ثابت کیجیے کہ $\sec A\,(1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = 1$۔

حل:

$$\text{LHS} = \sec A\,(1-\sin A)(\sec A + \tan A) = \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1-\sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(1-\sin A)(1+\sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{RHS}$$

مثال 14: ثابت کیجیے کہ $\dfrac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \dfrac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

حل:

$$\text{LHS} = \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\dfrac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\dfrac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$$

$$= \frac{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sin A} - 1\right)}{\left(\dfrac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \text{RHS}$$

مثال 15: ثابت کیجیے کہ $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$، تماثل $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ کو استعمال کیجیے۔

حل: کیونکہ ہمیں وہ تماثل استعمال کرنا ہے جس میں $\sec\theta$ اور $\tan\theta$ شامل ہیں۔ اس لئے پہلے ہم LHS کو (اس تماثل کو جس کو ہمیں ثابت کرنا ہے) $\sec\theta$ اور $\tan\theta$ کی شکل میں بدلیں گے، ایسا کرنے کے لئے ہم شمار کنندہ اور نسب نما کو $\cos\theta$

سے تقسیم کریں گے۔

$$\text{LHS} = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1} = \frac{\{(\tan\theta + \sec\theta) - 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}{\{(\tan\theta - \sec\theta) + 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{\{\tan\theta - \sec\theta + 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta},$$

جو کے مطلوبہ تماثل کی RHS ہے جس کو ہمیں ثابت کرنا تھا۔

مشق 8.4

1۔ ٹرگنومیٹری نسبتیں $\sin A$، $\sec A$ اور $\tan A$ کو $\cot A$ کی شکل میں لکھیے۔

2۔ $\angle A$ کی $\sec A$ کی شکل میں تمام ٹرگنومیٹرک نسبتوں کو لکھیے۔

3۔ قدر معلوم کیجیے:

(i) $\dfrac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$

(ii) $\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

4۔ صحیح جواب کو چنئے اور اپنے انتخاب کا جواز پیش کیجیے۔

(i) $9\sec^2 A - 9\tan^2 A =$

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \text{cssec}\,\theta) =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) –1

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) =$

(A) sec A (B) sin A (C) cosec A (D) cos A

(iv) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} =$

(A) $\sec^2 A$ (B) -1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

5۔ مندرجہ ذیل تماثلات کو ثابت کیجیے، اس میں ملوث تمام زاویہ حادہ ہیں جن کے لئے عبارتیں معرف ہیں۔

(i) $(\cos\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ (ii) $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\ \mathrm{cosec}\,\theta$

[اشارہ: عبارت کو $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ کی شکل میں لکھیے)

(iv) $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ [اشارہ: LHS اور RHS کو علیحدہ علیحدہ مختصر کیجیے)

(v) $\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \mathrm{cosec}\,A + \cot A,$

تماثل $\mathrm{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ کو استعمال کر ثابت کیجیے۔

(vi) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ (vii) $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \mathrm{cosec}\,A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\mathrm{cosec}\,A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

[اشارہ: LHS اور RHS کو علیحدہ علیحدہ مختصر کیجیے]

(x) $\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

8.6 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں۔

1۔ ایک قائم مثلث ABC جو B پر قائم ہے، میں

$\sin A = \frac{\text{زاویہ A کا مقابل ضلع}}{\text{وتر}}$ $\cos A = \frac{\text{زاویہ A کا مقابل ضلع}}{\text{وتر}}$ $\tan A = \frac{\text{زاویہ A کا مقابل ضلع}}{\text{زاویہ A کا متصل ضلع}}$

2۔ $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}; \sec A = \frac{1}{\cos A}; \tan A = \frac{1}{\cot A}, \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

3۔ اگر کبھی حادہ زاویہ کی ایک ٹرگنومیٹرک نسبت معلوم ہے تو ہم باقی نسبتیں آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں۔

4۔ زاویہ $0°$، $30°$، $45°$، $60°$، $90°$ کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں

5۔ sin A اور cos A کی قدر 1 گنے زیادہ نہیں ہو سکتی جب کہ sec A یا cosec A کی قدر ہمیشہ 1 کے برابر یا اس سے زیادہ نہیں ہے۔

6۔ $\sin(90° - A) = \cos A, \cos(90° - A) = \sin A;$

$\tan(90° - A) = \cot A, \cot(90° - A) = \tan A;$

$\sec(90° - A) = \operatorname{cosec} A, \operatorname{cosec}(90° - A) = \sec A.$

7۔ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ $0° \le A < 90°$ کے لئے

$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ $0° < A \le 90°$ کے لئے