4915CH09

باب 9

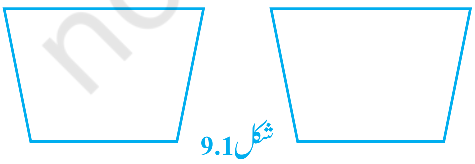
مثلث اور متوازی الاضلاع کے رقبے
(AREAS OF PARALLELOGRAMS AND TRIANGLES)

9.1 تعارف (Introduction)

باب 5 میں آپ نے دیکھا کہ جیومیٹری کی شروعات میدانوں کی حدیں اور ان کو مناسب حصوں میں بانٹنے کے لیے زمینوں کی پیمائش کے عمل سے ہوئی۔ مثال کے طور پر ایک کسان بدھیا کے پاس ایک مثلث نما کھیت ہے اور وہ اسکو اپنے ایک بیٹے اور دو بیٹیوں میں مساوی طور پر تقسیم کرنا چاہتی ہے۔ اس کھیت کا رقبہ نکالے بغیر اس نے مثلث نما کھیت کے ایک ضلع کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کیا اور تقسیم کے دو لفظوں کو مقابل راس سے ملا دیا۔ اس طرح سے کھیت تین مساوی حصوں میں منقسم ہو گیا اور اس نے ایک ایک حصہ اپنے بچوں میں تقسیم کر دیا۔ آپ کیا سوچتے ہیں کہ اس طرح سے حاصل کئے گئے تینوں حصہ مساوی رقبہ کے تھے۔؟ اس قسم کے اور اس سے متعلق مسائل کے حل کے لیے اس بات کی ضرورت ہے کہ مستوی اشکال کے رقبوں پر نظر ثانی کی جائے جن کے بارے میں آپ پچھلی کلاسوں میں پڑھ چکے ہیں۔

یاد کیجیے کہ ایک سادہ بند شکل سے گھِرا مستوی کا حصہ اس شکل سے مطابقت رکھتا ہو مستوی خطہ کہلاتا ہے، اس مستوی خطہ کی پیمائش یا قدر رقبہ کہلاتا ہے۔ اس قدر اور پیمائش کو ہمیشہ ہم ایک عدد (کسی اکائی میں) $5cm^2$, $8cm^2$ ہیکٹر وغیرہ میں ظاہر کرتے ہیں۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی شکل کا رقبہ۔ شکل سے گھرا مستوی کے حصہ سے منسلک عدد ہے۔

A B

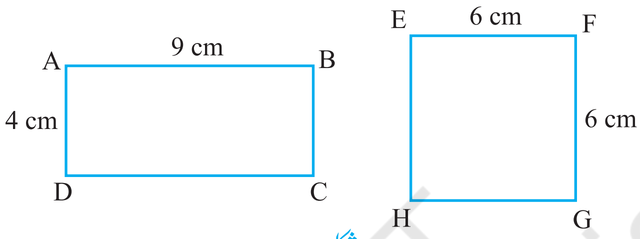


شکل 9.1

باب 7 میں اور پچھلی جماعتوں میں ہم متماثل اشکال کے تصور سے بھی واقف ہو چکے ہیں۔ دو اشکال متماثل ہوئی ہیں۔ اگر ان کی شکل اور سائز یکساں ہو۔ دوسرے لفظوں میں اگر دو اشکال A اور B متماثل ہیں (شکل 9.1 دیکھیے۔) تو ٹریسنگ

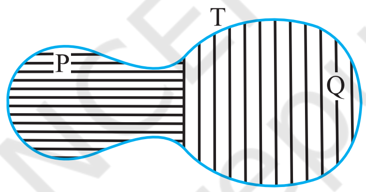
پیپر کا استعمال کرتے ہوئے آپ ایک شکل کو دوسرے پر منطبق کر سکتے ہیں تا کہ یہ دوسری شکل کو پوری طرح ڈھک لے۔

اس لیے اگر دو اشکال A اور B متماثل ہیں تو ان کا رقبہ مساوی ہوگا۔ لیکن اس بیان کا معکوس درست نہیں ہے۔ دوسرے لفظوں میں دو شکلیں جن کا رقبہ برابر ہو ضروری نہیں کہ متماثل ہوں۔ مثال کے طور پر شکل 9.2 میں مستطیل ABCD اور EFGH کے رقبہ برابر ہیں ($9 \times 4\,cm^2$ اور $6 \times 6\,cm^2$) لیکن یہ صاف ظاہر ہے کہ یہ متماثل نہیں ہیں۔ (کیوں؟)



شکل 9.2

آیئے اب شکل 9.3 دیکھیے:



شکل 9.3

آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ شکل T سے بنا مستوی حصہ دو اشکال P اور Q سے بنے دو مستوی خطوں کا بنا ہے۔ آپ آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ

شکل T کا رقبہ = شکل Q کا رقبہ + شکل P کا رقبہ

آپ شکل A کے رقبہ کو ar(A) سے اور شکل B کے رقبہ کو ar(B) اور شکل T کے رقبہ کو ar(T) سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ اس طرح سے آپ کہہ سکتے ہیں کہ کسی شکل کا رقبہ شکل سے گھرا مستوی کے حصہ سے منسلک عدد ہوتا ہے جس کی مندرجہ ذیل دو خصوصیات ہوتی ہیں۔

(1) اگر A اور B دو متماثل اشکال ہیں تب ar(A) = ar(B) اور

(2) اگر شکل T سے بنا مستوی خطہ دو اشکال P اور Q سے بنے دو غیر منطبق مستوی خطوں کی بنی ہو تو

$ar(\mathrm{T}) = ar(\mathrm{P}) + ar(\mathrm{Q})$;

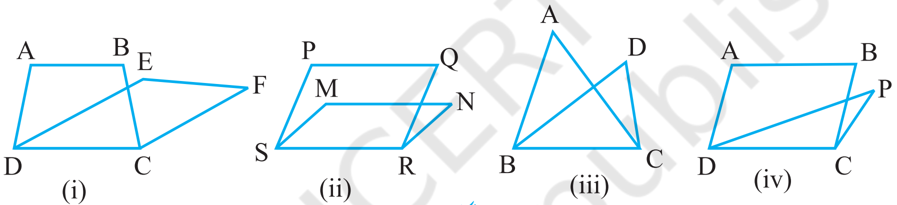
آپ اشکال جیسے مستطیل، مربع، متوازی الاضلاع اور مثلث وغیرہ کے رقبے کے فارمولوں سے پچھلی کلاسوں میں واقف ہو چکے ہیں اس باب میں ہم اپنی جیومیٹریائی اشکال کے رقبوں کے درمیان تعلق کو دی ہوئی حالت جیسے وہ اشکال جب دو متوازی خطوط کے درمیان ایک ہی قاعدہ پر بنی ہوں کا مطالعہ کرتے ہوئے ان فارمولوں کے علم کو مزید تقویت پہنچانے کی کوشش کریں گے۔

یہ مطالعہ مثلثوں کی مماثلت سے متعلق کچھ نتائج کو سمجھنے میں مفید ہوگا۔

9.2 ایک ہی قاعدہ اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان بنی اشکال

(Figures on the Same Base and Between the Same Parallels)

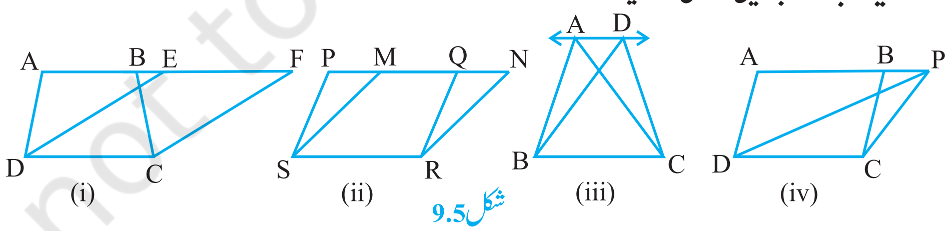
مندرجہ ذیل اشکال کو دیکھیے:



شکل 9.4

شکل 9.4(i) میں منحرف ABCD اور متوازی الاضلاع EFCD میں DC مشترک ضلع ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ منحرف ABCD اور متوازی الاضلاع EFCD ایک ہی قاعدہ DC پر بنے ہیں اسی طرح سے شکل 9.4(ii) میں متوازی الاضلاع PQRS اور MNRS ایک ہی قاعدہ SR پر بنے ہیں۔ شکل 9.4(iii) میں ΔABC اور ΔDBC ایک ہی قاعدہ BC پر بنے ہیں۔ شکل 9.4(iv) میں متوازی الاضلاع ABCD اور مثلث PDC ایک ہی قاعدہ DC پر بنے ہیں۔

آیئے اب مندرجہ ذیل اشکال کو دیکھیے۔

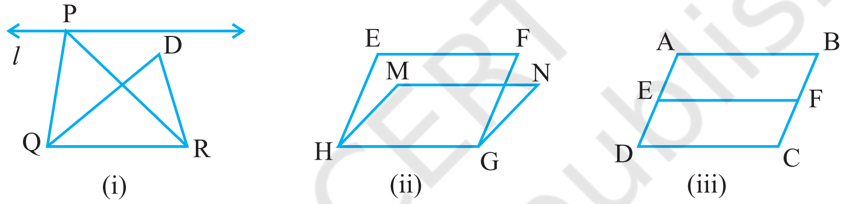


شکل 9.5

شکل 9.5(i) میں منحرف ABCD اور متوازی الاضلاع EFCD ایک ہی قاعدہ DC پر بنے ہیں اس کے علاوہ (منحرف ABCD کے) راس A، B قاعدہ DC کے مقابل ہیں اور راس E اور F (متوازی الاضلاع) قاعدہ DC کے مقابل ہیں اور خط

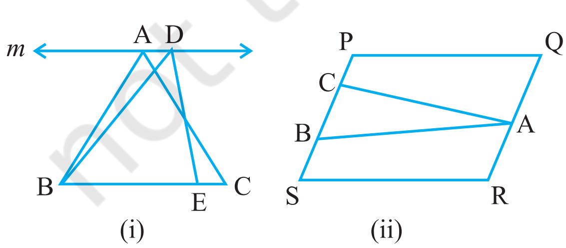
AF پر واقع ہیں جو DC کے متوازی ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ منحرف ABCD اور متوازی الاضلاع EFCD ایک ہی قاعدہ DC اور ایک ہی متوازی خطوط AF اور DC کے درمیان ہیں۔ اس طرح سے متوازی الاضلاع PQRS اور MNRS ایک ہی قاعدہ SR اور ایک ہی متوازی خطوط PN اور SR (شکل 9.5 (ii) دیکھیے) کے درمیان ہیں کیونکہ PQRS کے راس P اور Q اور MNRS کے راس M اور N خط PN پر واقع ہیں جو قاعدہ SR کے متوازی ہے۔ اس طرح سے مثلث ABC اور DBC ایک ہی قاعدہ BC اور ایک ہی متوازی خطوط AD اور BC کے درمیان واقع ہیں۔ (شکل 9.5 دیکھیے) اور متوازی الاضلاع ABCD اور مثلث PCD ایک ہی قاعدہ DC اور ایک ہی متوازی خطوط AP اور DC کے درمیان واقع ہیں۔ (شکل 9.5 (iv) دیکھیے)

اس طرح سے دو اشکال ایک ہی قاعدہ اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان کہلاتی ہیں اگر انھیں ایک ایک مشترک قاعدہ (ضلع) ہو اور ہر ایک شکل کے مشترک قاعدہ کے مقابل کے راس قاعدہ کے مقابل کے راس قاعدہ کے متوازی پر واقع ہوں۔



شکل 9.6

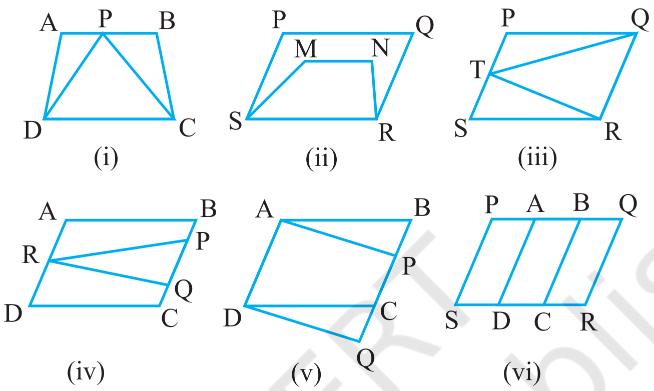
مندرجہ بالا بیان کو نظر میں رکھتے ہوئے آپ نہیں کہہ سکتے کہ شکل 9.6 (i) کے ΔPQR اور ΔDQR ایک ہی متوازی خطوط l اور QR کے درمیان واقع ہیں۔ اس طرح سے آپ نہیں کہہ سکتے کہ متوازی الاضلاع EFGH اور MNGH (شکل 9.6 (i)) ایک ہی متوازی خطوط EF اور HG کے درمیان واقع ہیں۔ اور اس طرح سے شکل 9.6 (ii) متوازی الاضلاع ABCD اور EFCD ایک ہی متوازی خطوط AB اور DC کے لیے بھی (لیکن ان کا مشترک قاعدہ DC ہے جو متوازی خطوط AD اور BC کے درمیان ہے) اس لیے یہ صاف ظاہر ہے کہ دو متوازی خطوط میں ایک خط وہ ہونا چاہئے جو قاعدہ ہو۔ نوٹ کیجیے کہ شکل 9.7 (i) کے ΔABC اور ΔDBE ایک مشترک قاعدہ پر نہیں ہیں۔ اس طرح سے شکل 9.7 (ii) ABC اور متوازی الاضلاع PQRS بھی ایک ہی قاعدہ پر واقع نہیں ہیں۔



شکل 9.7

مشق 9.1

1. مندرجہ ذیل میں کونسی اشکال ایک ہی قاعدہ اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔ایسی حالت میں مشترک قاعدہ اور دونوں متوازی خطوط کے نام لکھیے۔

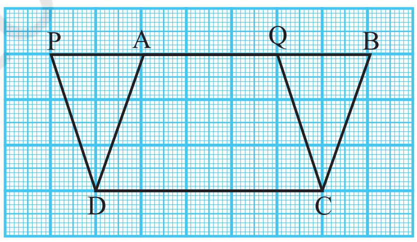


شکل 9.8

9.3 ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان بنے متوازی الاضلاع
(Parallelograms on the same Base and Between the Same Parallels)

آیئے اب ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان بنے دو متوازی الاضلاع کے رقبہ کے درمیان ایک تعلق اگر کوئی ہے تو معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں،اس کے لیے ہم مندرجہ ذیل عملی کام کرتے ہیں۔

مشغلہ 1: گراف کی ایک شیٹ لیجیے اور اس پر دو متوازی الاضلاع ABCD اور PQCD بنایئے کے شکل 9.9 میں دکھایا گیا ہے۔

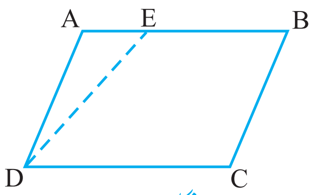


شکل 9.9

مذکورہ بالا دونوں متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدہ DC اور متوازی خطوط PB اور DC کے درمیان لیتے ہیں۔یاد کیجیے کہ

ان دونوں متوازی الاضلاع کا رقبہ نکالنے کے لیے ہم مربعوں کو گنتے ہیں۔

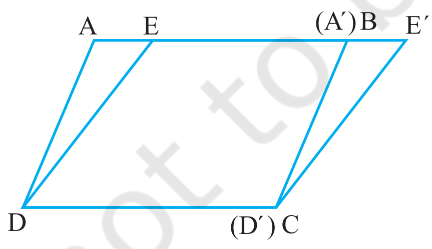
رقبہ معلوم کرنے کے لیے اس طریقہ میں ہم صرف ان مربعوں کو گنتے ہیں جو مکمل طور پر شکل سے گھرے ہوں یا آدھے سے زیادہ حصہ یا آدھا مربع ہو۔ وہ مربع جس کا آدھے سے کم حصہ شکل سے گھرا ہوا ہے تو اسے نہیں گنتے۔ آپ دیکھیں گے کہ دونوں متوازی الاضلاع کا رقبہ تقریباً $15cm^2$ ہے۔ گراف قیمت پر کچھ اور متوازی الاضلاع لے کر اس مشغلہ کو دہرائیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔؟ کیا دونوں متوازی الاضلاع کا رقبہ مساوی ہے یا مختلف ہے۔ درحقیقت یہ مساوی ہیں۔ اس سے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان متوازی الاضلاع کا رقبہ مساوی ہوتا ہے۔ اس بات کو یاد رکھیے کہ یہ صرف تصدیق ہے۔



شکل 9.10

مشغلہ 2: گتہ کی ایک شیٹ یا موٹے کاغذ کی شیٹ پر ایک متوازی الاضلاع ABCD بنائیے۔ اب ایک قطعہ خط DE بنائیے جیسا کہ شکل 9.10 میں دکھایا گیا ہے۔

ایک ٹریسنگ پیپر کی مدد سے ایک مختلف شیٹ پر ایک مثلث A'D'E' مثلث ADE کے متماثل کاٹیے۔ اور $\Delta A'D'E$ کو اس طرح رکھیے کہ AD، BC پر منطبق ہوں۔ جیسا کہ شکل 9.11 میں دکھایا گیا ہے۔ نوٹ کیجیے کہ ایک ہی قاعدہ DC اور متوازی خطوط AE اور DC کے درمیان ہے۔ دو متوازی الاضلاع ABCD اور EECD میں آپ ان کے رقبہ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں۔؟



شکل 9.11

کیونکہ $\Delta ADE \cong \Delta A'D'E'$

اس لیے $ar(ADE) = ar(A'D'E')$

اور $ar(ABCD) = ar(ADE) + ar(EBCD)$

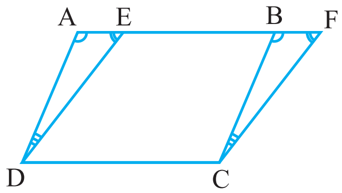
$= ar(A'D'E) + ar(EBCD)$

$= ar(EE'CD)$

اس طرح سے دونوں متوازی الاضلاع کا رقبہ مساوی ہے۔

آیئے اب ہم ایسے دو متوازی الاضلاع کے درمیان کے تعلق کو ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ 9.1: ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان کے متوازی الاضلاع بنے رقبہ برابر ہوتے ہیں۔



شکل 9.12

حل: کیونکہ ایک ہی قاعدہ DC اور متوازی خطوط AF اور DC پر بنے دو متوازی الاضلاع ABCD اور EFCD میں (شکل 9.12 دیکھیے)

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ رقبہ $ar(ABCD) = ar(EFCD)$

مثلث ΔADE اور ΔBCF ہیں۔

$\angle DAE = \angle CBF$ (کیونکہ $AD \parallel BC$ پر قاطع AF سے بنے نظیری زاویہ) (1)

$\angle AED = \angle BFC$ (کیونکہ $ED \parallel FC$ پر قاطع AF سے بنے نظیری زاویہ) (2)

اس لیے $\angle ADE = \angle BCF$ (مثلث کے زاویوں کی بھی خصوصیت) (3)

اور $AD = BC$ (متوازی الاضلاع ABCD کے مقابل اضلاع) (4)

اس لیے $\Delta ADE \cong \Delta BCF$ [ASA متماثلت اصول (1)، (3) اور (4) ہے۔]

اس لیے $ar(ADE) = ar(BCF)$ (متماثل اشکال کا رقبہ مساوی ہوتا ہے) (5)

اب $ar(ABCD) = ar(ADE) + ar(EDCB)$

$= ar(BCF) + ar(EDCB)$ [(3) سے]

$= ar(EFCD)$

اس لیے متوازی الاضلاع ABCD اور EFCD رقبہ میں مساوی ہیں۔

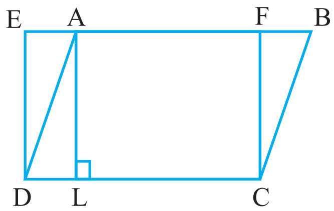
آیئے اب مندرجہ بالا مسئلہ کو واضح کرنے کے لیے کچھ مثالیں لیتے ہیں۔

مثال 1: شکل 9.13 میں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے اور EFCD ایک مستطیل ہے۔

اور $AL \perp DC$ ثابت کیجیے کہ

(i) $ar(ABCD) = ar(EFCBD)$

(ii) $ar(ABCD) = DC \times AL$



شکل 9.13

حل: (i) کیونکہ مستطیل بھی ایک متوازی الاضلاع ہے اس لیے

$ar(ABCD) = ar(EFCD)$ (مسئلہ 9.1)

(ii) مذکورہ بالا نتیجہ سے

مستطیل کا رقبہ = چوڑائی × لمبائی $ar(ABCD) = DC \times FC$ (1)

کیونکہ $AL \perp DC$ AFCL بھی ایک مستطیل ہے۔

اس لیے $AL = FC$ (2)

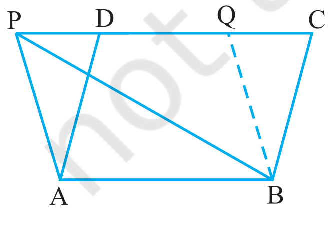
اس لیے $ar(ABCD) = DC \times AL$ [(1) اور (2) سے]

کیا آپ مذکورہ بالا نتیجہ (ii) سے دیکھ سکتے ہیں کہ متوازی الاضلاع کا رقبہ اس کے کسی ضلع اور اس کے نظیری ارتفاع کا حاصل ضرب ہے۔ کیا آپ کو یاد ہے کہ ساتویں کلاس میں آپ نے متوازی الاضلاع کے رقبہ کا یہ فارمولہ پڑھا تھا۔ اسی فارمولہ کی بنیاد پر ہم مسئلہ 9.1 کو دوبارہ اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

ایک ہی قاعدہ یا مساوی قاعدوں اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان بنے متوای الاضلاع کے رقبہ مساوی ہوتے ہیں۔۔ کیا آپ اس بیان کا معکوس لکھ سکتے ہیں؟

یہ ہے کہ ایک ہی قاعدہ (یا برابر قاعدوں) پر بنے متوازی الاضلاع جن کا رقبہ مساوی ہوتا ہے۔ ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوتے ہیں کیا یہ معکوس درست ہے؟ متوازی الاضلاع کے رقبہ کے فارمولہ کا استعمال کرتے ہوئے اس مسئلہ کے معکوس کو ثابت کیجیے۔

مثال 2: اگر ایک مثلث اور ایک متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان بنے ہوں تو ثابت کیجیے کہ مثلث کا رقبہ متوازی الاضلاع کے رقبہ کا آدھا ہوتا ہے۔



شکل 4.14

حل: مان لیجیے ΔABP اور متوازی الاضلاع ABCD ایک قاعدہ AB اور متوازی خطوط AB اور PC کے درمیان ہیں۔ (شکل 9.14 دیکھیے)

آپ کو ثابت کرنا ہے کہ $ar(BAP) = \frac{1}{2} ar\, ABCD$

ایک اور متوازی الاضلاع ABQP کو حاصل کرنے کے لیے $BQ \parallel AP$

کھینچیے اب متوازی الاضلاع ABQP اور ABCD ایک ہی قاعدہ AB اور متوازی خطوط AB اور PC کے درمیان ہیں۔

اس لیے $ar\,(ABQP) = ar\,ABCD$ (مسئلہ 9.1) (1)

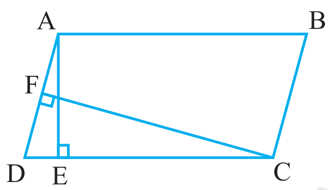
لیکن $\Delta PAB \cong \Delta BQP$ (وتر PB متوازی الاضلاع ABQP کو دو متماثل مثلثوں میں منقسم کرتا ہے۔

اس لیے $ar\,(PBA) = ar\,(BPQ)$ (2)

اس لیے $ar(PAB) = \frac{1}{2}\, ar\; ABQP$ [(2) سے] 3

اس سے حاصل ہوتا ہے $ar\; PAB = \frac{1}{2}\, ar\,(ABCD)$ [(1) اور (3) سے]

مشق 9.2



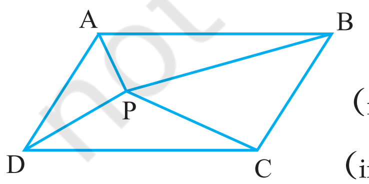
شکل 9.15

.1 شکل 9.15 میں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔
$AE \perp DC$ اور $CF \perp AD$
اگر $AB = 16cm, AE = 8cm$ اور $CF = 10cm$
ہے تو AD معلوم کیجیے۔

.2 اگر E، F، G اور H بالترتیب متوازی الاضلاع ABCD کے اضلاع کے وسطی نقطے ہیں تو دکھائیے کہ
$$ar(EFGH) = \frac{1}{2}\, ar(ABCD)$$

.3 P اور Q کوئی دو نقطے ہیں جو بالترتیب متوازی الاضلاع ABCD کے اضلاع DC اور AD پر واقع ہیں۔ دکھائیے کہ
$$ar(APB) = ar(BQC)$$

.4 شکل 9.16 میں P متوازی الاضلاع ABCD کے اندرون میں ایک نقطہ ہے۔
دکھائیے کہ

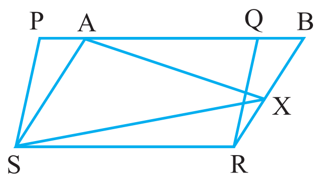


شکل 9.16

(i) $ar\,(APB) + ar\,(PCD) = \frac{1}{2}\, ar\,(ABCD)$

(ii) $ar\,(APD) + ar\,(PBC) = ar\,(APB) + ar\,(PCD)$

(اشارہ: P سے گزرتا ہوا AB کے متوازی ایک خط کھینچیے)



شکل 9.17

.5 شکل 9.17 میں PQRS اور ABRS متوازی الاضلاع ہیں

ضلع BR کوئی ایک نقطہ X ہے دکھائیے کہ

(i) $ar(PQRS) = ar(ABRS)$

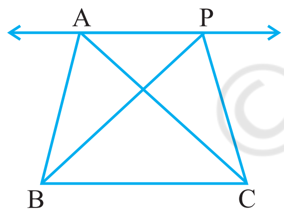
(ii) $ar(AXS) = \frac{1}{2} ar(PQRS)$

.6 ایک کسان کے پاس متوازی الاضلاع PQRS کی شکل کا ایک کھیت ہے۔ وہ RS پر ایک نقطہ A لیتا ہے اور انکو نقطہ P اور Q سے ملا دیتا ہے۔ کھیت کتنے حصوں میں بٹ گیا؟ ان حصوں کی شکل کیسی ہے؟ کسان کھیت کے مسوی حصوں میں گیہوں اور دالیں بونا چاہتا ہے۔ وہ ایسا کس طرح کرے گا؟

9.4 ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان بنے مثلث

(Triangles on the same Base and between the same Parallels)

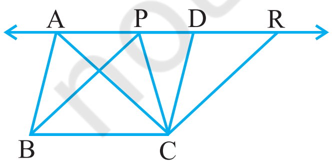
آیئے شکل 9.18 کو دیکھیں۔ اس میں ایک ہی قاعدہ BC اور متوازی خطوط BC اور AP کے درمیان بنے دو مثلث ABC اور PBC ہیں۔ ایسے مثلثوں کے رقبہ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟ اس سوال کا جواب دینے کے لیے آپ ایک مشغلہ کیجیے۔ ایک گراف پیپر پر ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان مختلف مثلثوں کے جوڑے بنائیے اور مربعوں کی گنتی کرنے کے طریقہ سے ان کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ہر مرتبہ آپ پائیں گے کہ ان کا رقبہ (تقریبا) مساوی ہوگا۔ اس مشغلہ کو ہم بورڈ کے استعمال سے بھی کر سکتے ہیں۔ آپ دوبارہ دیکھیں گے کہ ان کا رقبہ مساوی ہوگا۔



شکل 9.18

مندرجہ بالا سوال کا منطقی جواب حاصل کرنے کے لیے مندرجہ ذیل طریقہ سے آگے بڑھ سکتے ہیں۔

شکل 9.18 میں $CD \parallel BA$ اور $CR \parallel BP$ اس طرح بنائیے کہ D اور R خط AP پر واقع ہوں۔ (شکل 9.19 دیکھیے)



شکل 9.19

اس سے آپ کو دو متوازی الاضلاع PBCR اور ABCD حاصل ہوتے ہیں۔

جوایک ہی قاعدہ BC اور متوازی خطوط BC اور AR کے درمیان بنے ہیں۔

اس لیے $\text{ar (ABCD)} = \text{ar (PBCR)}$ (کیوں؟)

اب $\Delta PBC \cong \Delta CRP$ اور $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

اس لیے $\text{ar(ABC)} = \frac{1}{2}\text{ar(ABCD)}$ اور $\text{ar(PBC)} = \frac{1}{2}\text{ar(PBCR)}$ (کیوں؟)

اس لیے $\text{ar (ABC)} = \text{ar (PBC)}$

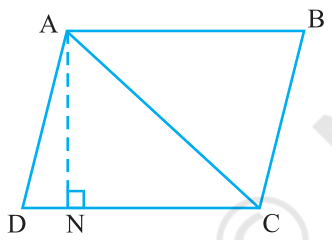
اس طرح سے آپ کو مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 9.2: ایک ہی قاعدہ (یا مساوی قاعدہ) اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان بنے مثلث رقبہ میں مساوی ہوتے ہیں۔

اب مان لیجیے ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جس کا ایک وتر AC ہے۔ شکل 9.20 دیکھیے۔

مان لیجیے $AN \perp DC$

نوٹ کیجیے کہ



شکل 9.20

$\Delta ADC \cong \Delta CBA$ (کیوں؟)

اس لیے $\text{ar (ADC)} = \text{ar (CBA)}$ (کیوں؟)

اس لیے $\text{ar (ADC)} = \frac{1}{2}\text{ar (ABCD)}$

$= \frac{1}{2}(DC \times AN)$ (کیوں؟)

اس لیے، $\Delta ADC = \frac{1}{2} \times$ قاعدہ CD × نظیری ارتفاع AN

دوسرے لفظوں میں مثلث کا رقبہ اسکے قاعدہ اور اس پر بنے ارتفاع کے (اونچائی) کے حاصل ضرب کا آدھا ہوتا ہے۔ کیا آپ کو یہ یاد ہے کہ آپ نے VII کلاس میں مثلث کے رقبہ کے اس فارمولہ کے بارے میں پڑھا تھا؟ اس فارمولہ سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک ہی قاعدہ (یا مساوی قاعدہ) اور مساوی رقبوں والے دو مثلثوں کے مساوی نظیری ارتفاع ہونگے۔

مساوی نظیری ارتفاع کے لیے مثلثوں کو متوازی خطوط کے درمیان ہونا ضروری ہے۔ اس سے آپ مسئلہ 9.2 کا مندرجہ ذیل معکوس حاصل کرتے ہیں۔

مسئلہ 9.3: دو مثلث جن کے قاعدہ ایک ہی ہوں یا مساوی قاعدہ اور رقبہ برابر ہوں دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہو نگے۔

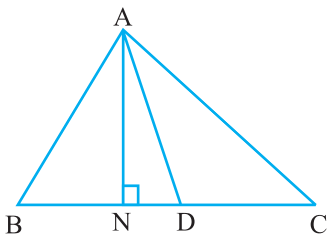
مندرجہ بالا نتیجہ کے استعمال کی مزید وضاحت کے لیے آیئے کچھ مثالیں لیتے ہیں۔

مثال 3: ثابت کیجیے کہ مثلث کا وسطانیہ مثلث کو دو مساوی رقبوں والے مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔

حل: آپ کو ثابت کرنا ہے کہ:

$$ar(ABD) = ar(ACD)$$

کیونکہ رقبہ کے فارمولہ میں ارتفاع شامل ہے اس لیے $AN \perp BC$ کھینچیے



شکل 9.21

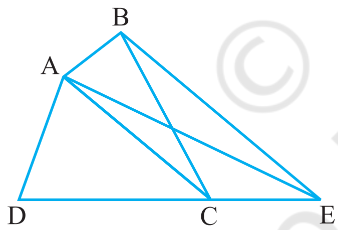
اب $ar(ABD) = \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $\times$ ارتفاع (ΔABD کا)

$= \frac{1}{2} \times BD \times AN$

$= \frac{1}{2} \times CD \times AN$ (کیونکہ $CD = BD$)

$= \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $\times$ ارتفاع (ΔACD کا)

$= ar(ACD)$



شکل 9.22

مثال 4: شکل 9.22 میں ABCD ایک چار ضلعی ہے اور $BE \parallel AC$

اور BE کو DC سے ملانے کے لئے E نقطہ لگاتے ہیں۔

دکھایئے کہ ΔADE کا رقبہ، چار ضلعی ABCD کے رقبہ کے برابر ہے۔

حل: احتیاط سے شکل کا مشاہدہ کیجیے۔

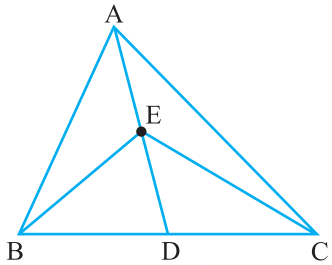
ΔBAC اور ΔEAC ایک ہی قاعدہ AC اور متوازی خطوط AC اور BE کے درمیان واقع ہیں۔

اس لیے $ar(BAC) = ar(EAC)$ (مسئلہ 9.2 سے)

اس لیے $ar(BAC) + ar(ADC) = ar(EAC) + ar(ADC)$ (دونوں طرف مساوی رقبہ جمع کرنے پر)

یا $ar(ABCD) = ar(ADE)$

مشق 9.3

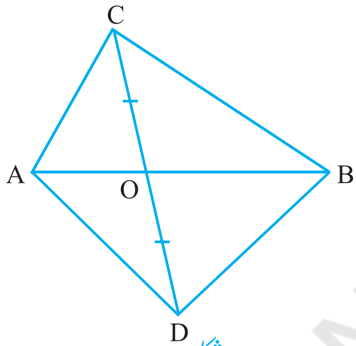


شکل 9.23

.1 شکل 9.23 میں E، ΔABC کے وسطانیہ AD پر ایک نقطہ ہے۔دکھائیے کہ $ar(ABE)=ar(ADE)$

.2 ABC میں E، وسطانیہ AD کا وسطی نقطہ ہے۔ دکھائیے $ar(BED)=\frac{1}{4}ar(ABC)$

.3 دکھائیے کہ متوازی الاضلاع کے وتر اس کو چار مساوی رقبوں والے مثلثوں میں تقسیم کرتے ہیں۔



شکل 9.24

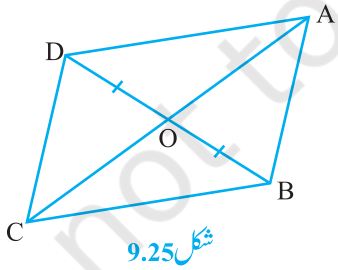
.4 شکل 9.24 میں ABC اور ABD ایک ہی قاعدہ AB پر بنے دو مثلث ہیں۔ اگر AB قطع خط CP کی نقطہ D پر تنصیف کرے تو دکھائیے $ar(ABC)=ar(ABD)$

.5 D، E اور F بالترتیب ΔABC کے اضلاع BC، CA اور AB کے وسطی نقطے ہیں۔دکھائیے۔

(i) BDEF ایک متوازی الاضلاع ہے۔ (ii) $ar(DEF)=\frac{1}{4}ar(ABC)$

(iii) $ar(BDEF)=\frac{1}{2}ar(ABC)$

.6 شکل 9.25 میں چار ضلعی ABCD کے وتر AC اور BD نقطہ O پر اس طرح قطع کرتے ہیں OB=OD اگر AB=CD ہے تب دکھائیے کہ:



شکل 9.25

(i) $ar(DOC)=ar(AOB)$

(ii) $ar(DCB)=ar(ACB)$

(iii) ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے یا $DA \parallel CB$

(اشارہ: D اور B سے AC پر عمود کھینچیں)

.7 D اور E بالترتیب ΔABC کے اضلاع AB اور AC پر دو نقطے اس طرح ہیں کہ $ar(DBC)=ar(EBC)$ ثابت

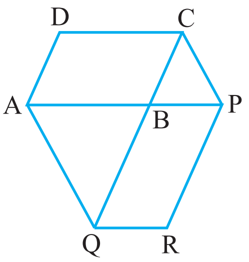
کیجیے کہ $DE \parallel BC$

.8 XY، ΔABC کے اضلاع BC کے متوازی ایک خط ہے۔ اگر $BE \parallel AC$ اور $CF \parallel AB$ ہے اور XY سے بالترتیب E اور F پر ملتے ہیں۔ دکھایئے

$$ar(ABE) = ar(ACF)$$

.9 متوازی الاضلاع ABCD کے ایک ضلع AB کو نقطہ P تک بڑھایا گیا۔ A سے گزرتا ہوا ایک خط جو CP کے متوازی ہے اور CD کو بڑھانے پر Q سے ملتا ہے۔ اس طرح سے متوازی الاضلاع PBQR مکمل ہوجاتا ہے۔ دکھایئے کہ $ar(ABCD) = ar(PBQR)$

(اشارہ: AC اور PQ کو ملایئے اور $ar(ACQ)$ اور $ar(ACQ)$ کا موازنہ کیجیے۔)



شکل 9.26

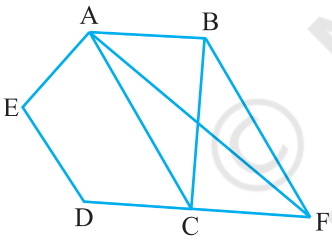
.10 منحرف ABCD میں جس میں $AB \parallel DC$ وتر AC اور BD ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کیجیے کہ

$$ar(AOD) = ar(BOC)$$

.11 شکل 9.27 میں ABCE ایک پانچ ضلعی ہے۔ B سے گزرتا ہوا خط جو AC کے متوازی ہے DC کو بڑھانے پر F پر ملتا ہے۔ دکھایئے کہ

(i) $ar(ACB) = ar(ACF)$

(ii) $ar(AEDF) = ar(ABCDE)$



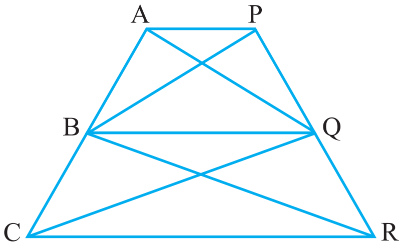
شکل 9.27

.12 ایک کسان اتواری کے پاس چار ضلعی کی شکل والا ایک زمین کا پلاٹ ہے۔ دیہات کی گرام پنچایت نے ایک ہیلتھ سینٹر بنانے کے لیے اس کے پلاٹ کے کچھ حصہ اپنے قبضے میں لینے کا فیصلہ کیا۔ اتواری اس شرط پر راضی ہوگیا کہ لیکن اس کو اسی پلاٹ سے ملے ہوئے دوسرے پلاٹ سے اتنا ہی حصہ مل جائے تا کہ اس کا پلاٹ مثلث نما ہو جائے۔ تشریح کیجیے کہ اس تجویز پر عمل درآمد کیسے ہوگا۔

.13 ABCD ایک منحرف ہے۔ جس میں $AB \parallel DC$ کے متوازی ایک خط ہے جو AB کو X پر اور BC کو Y پر قطع کرتا

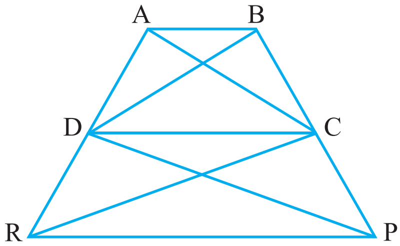
ہے یہ ثابت کیجیے کہ: $ar(ADX)=ar(ACY)$

(اشارہ: CX ملایئے۔)



شکل 9.28

14. شکل 9.28 میں $AP \parallel BQ \parallel CR$ ثابت کیجیے کہ $ar(AQC)=ar(BPR)$



شکل 9.29

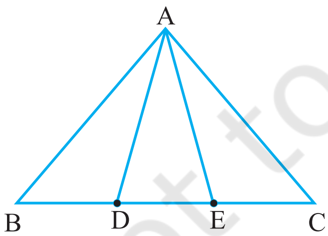
15. چار ضلعی ABCD کے وتر AC اور BD نقطہ O پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ:

$ar(AOD)=ar(BOC)$ ثابت کیجیے کہ ABCD ایک منحرف ہے۔

16. شکل: 9.29 میں دونوں چار ضلعی ABCD اور DCPR منحرف ہیں۔ $ar(DRC)=ar(DPC)$ اور $ar(BDP)=ar(ARC)$ دیکھایئے کہ

مشق 9.4 (اختیاری)*

1. متوازی الاضلاع ABCD اور مستطیل ABEF ایک ہی قاعدہ AB پر بنے ہیں اور ان کے رقبہ برابر ہیں۔ دکھایئے کہ متوازی الاضلاع کا احاطہ مستطیل کے احاطہ سے بڑا ہے۔



شکل 9.30

2. شکل 9.30 میں BC پر دو نقطہ D اور E اس طرح ہیں کہ BD=DE=EC دکھایئے کہ $ar(ABD)=ar(ADE)=ar(AEC)$

کیا آپ اب اس سوال کا جواب دے سکتے ہیں جو اس باب کے تعارف میں آپ نے چھوڑ دیا تھا۔ کہ بدھیا کا کھیت واقعی میں تین مساوی حصوں میں منقسم ہو گیا۔؟

ریمارک: نوٹ کیجیے کہ BD=DE=EC لینے پر ABC مساوی رقبوں کے تین مثلثوں ABD، ADF اور AEC میں منقسم

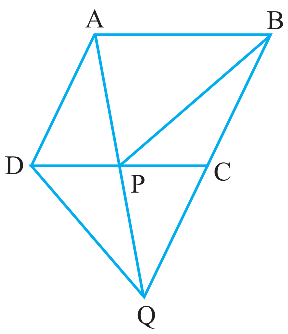
*یہ مشقیں امتحانات کے نقطۂ نظر سے نہیں ہیں۔

ہو جاتا ہے۔ اس طرح سے BC کو n مساوی حصوں میں تقسیم کرنے پر اور اس طرح سے حاصل تقسیم کے لفظوں کو BC کے مقابل راس سے ملانے پر آپ ABC کو مساوی رقبوں والے n مثلثوں میں تقسیم کر سکتے ہیں۔

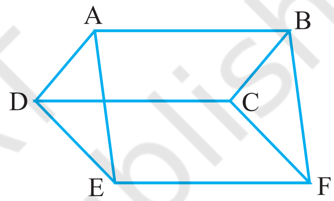
3. شکل 9.31 میں ABCD، DCEF اور ABFE متوازی الاضلاع ہیں دکھائیے کہ: $ar(ADE) = ar(BCF)$

4. شکل 9.32 میں ABCD ایک چار ضلعی ہے اور BC کو نقطہ Q تک اس طرح بڑھایا جاتا ہے کہ AD=CQ اگر AQ، DC کو P پر قطع کرتا ہے دکھائیے کہ $ar(BPC) = ar(DPQ)$

(اشارہ:- AC کو ملائیے)



شکل 9.32



شکل 9.31

5. شکل 9.33 میں ABC اور BDE دو مساوی ضلعی مثلث ہیں جب کہ D، BC کا وسطی نقطہ ہے۔
اگر AE، BC کو F پر قطع کرتا تو دکھائیے کہ

(i) $ar(BDE) = \frac{1}{4} ar(ABC)$

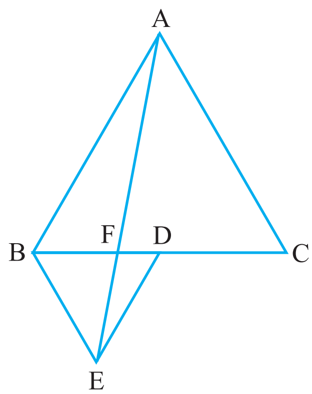
(ii) $ar(BDE) = \frac{1}{2} ar(BAE)$

(iii) $ar(ABC) = 2ar(BEC)$

(iv) $ar(BFE) = ar(AFD)$

(v) $ar(BFE) = 2ar(FED)$

(vi) $ar(FED) = \frac{1}{8} ar(AFC)$



شکل 9.33

(اشارہ: EC اور AD کو ملائیے، دکھائیے کہ $BE \parallel AC$ اور $DE \parallel AB$ وغیرہ)

.6 وتر AC اور BD ایک دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہیں دکھایئے کہ:

$$ar(APB) \times ar(CPD) = ar(APD) \times ar(BPC)$$

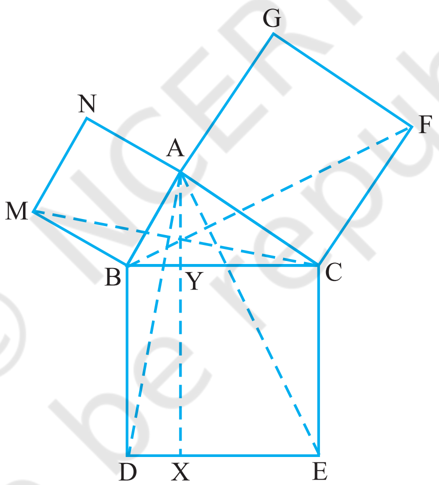
(اشارہ: A اور C سے BD پر عمود کھینچئے)

.7 P اور Q بالترتیب ABC کے اضلاع AB اور BC کے وسطی نقطہ ہیں اور R، AP کا وسطی نقطہ ہے دکھایئے کہ:

(i) $ar(PRQ) = \frac{1}{2} ar(ARC)$ (ii) $ar(RQC) = \frac{3}{8} ar(ABC)$

(iii) $ar(PBQ) = ar(ARC)$

.8 شکل 9.34 میں، ABC ایک قائم زاوی مثلث ہے جس میں A قائمہ ہے۔ BECD، ACFG اور ABMN بالترتیب اضلاع BC، CA اور AB پر مربع ہیں قطع خط $AX \perp DE$، BC سے Y پر ملتے ہیں۔ دکھایئے کہ:



شکل 9.34

(i) $\Delta MBC \cong \Delta ABD$ (ii) $ar(BYXD) = 2ar(MBC)$

(iii) $ar(BYXD) = ar(ABMN)$ (iv) $\Delta FCB \cong \Delta ACE$

(v) $ar(CYXE) = 2ar(FCB)$ (vi) $ar(CYXE) = ar(ACFG)$

(vii) $ar(BCED) = ar(ABMN) + ar(ACFG)$

نوٹ: نتیجہ (vii) فیثا غورث کا مشہور مسئلہ ہے۔ اس کا آسان ثبوت آپ دسویں کلاس میں پڑھیں گے۔

9.5 خلاصہ (Summary)

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل چیزیں پڑھیں

1. کسی شکل کا رقبہ وہ عدد (کسی اکائی میں) ہے جو اس شکل سے گھرے مستوی کے حصہ سے جڑا ہے

2. دو متماثل اشکال کا رقبہ مساوی ہوتا ہے لیکن اس کا معکوس درست نہیں ہے۔

3. اگر شکل T سے بنا مستوی خطہ، اشکال P اور Q سے بنے غیر متماثل مستوی خطوں کا بنا ہو تو $ar(T) = ar(P) + ar(Q)$ جہاں $ar(X)$ شکل X کے رقبہ کو ظاہر کرتا ہے۔

4. دو اشکال ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان کہلاتی ہیں اگر ان کا قاعدہ مشترک ہو اور ہر ایک شکل کے مشترک قاعدہ کا مقابل راس قاعدہ کے متوازی خط پر واقع ہو۔

5. ایک ہی قاعدہ (یا مساوی قاعدہ) اور متوازی خطوط کے درمیان بنے متوازی الاضلاع کے رقبہ برابر ہوتے ہیں۔

6. متوازی الاضلاع کا رقبہ اس کا قاعدہ اور اس کے نظیری ارتفاع کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔

7. مساوی رقبہ والے متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ (یا مساوی قاعدہ) پر بنے ہوں متوازی خطوط کے درمیان ہوتے ہیں۔

8. اگر ایک متوازی الاضلاع اور ایک مثلث ایک ہی قاعدہ اور متوازی خطوط کے درمیان ہوں تو مثلث کا رقبہ متوازی الاضلاع کے رقبہ کا آدھا ہوتا ہے۔

9. وہ مثلث جو ایک ہی قاعدہ (یا مساوی قاعدہ) اور متوازی خطوط کے درمیان بنے ہوں ان کا رقبہ برابر ہوتا ہے۔

10. مثلث کا رقبہ اس کے قاعدہ اور نظیری ارتفاع (اونچائی) کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔

11. مساوی رقبہ والے مثلث جو ایک ہی قاعدہ (یا مساوی قاعدہ) پر بنے ہوں متوازی خطوط کے درمیان ہوتے ہیں۔

12. مثلث کا وسطانیہ اس کو مساوی رقبوں والے دو مثلثوں میں منقسم کرتا ہے۔