अध्याय 1

वास्तविक संख्याएँ

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- **यूक्लिडीय विभाजन प्रमेयिका :** दो धनात्मक पूर्णांक a और b दिए रहने पर, ऐसे अद्वितीय पूर्णांकों q और r का अस्तित्व है जो $a = bq + r, 0 \le r < b$ को संतुष्ट करते हैं।
- दो धनात्मक पूर्णांकों, मान लीजिए c और d, $c > d$ का HCF प्राप्त करने के लिए यूक्लिड की विभाजन एल्गोरिथ्म :

  चरण 1 : ऐसी पूर्ण संख्याएँ q और r प्राप्त करने के लिए कि $c = dq + r, 0 \le r < d$ हो, c और d पर यूक्लिडीय विभाजन प्रमेयिका का अनुप्रयोग कीजिए।

  चरण 2 : यदि $r = 0$ है, तो c और d का HCF संख्या d है। यदि $r \neq 0$ है, तो d और r पर विभाजन प्रमेयिका का अनुप्रयोग कीजिए।

  चरण 3 : इस प्रक्रिया को तब तक ज़ारी रखिए, जब तक कि शेषफल शून्य न प्राप्त हो जाए। इस स्तर पर भाजक ही वाँछित HCF होगा।
- **अंकगणित की आधारभूत प्रमेय :** प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्यों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तथा यह व्यंजक (गुणनखंडन), अभाज्य गुणनखंडों के आने के क्रमों पर ध्यान न देते हुए अद्वितीय होता है।
- मान लीजिए कि p एक अभाज्य संख्या है। यदि p, a^2 को विभाजित करता है तो p, a को भी विभाजित करता है, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।
- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ अपरिमेय संख्याएँ हैं।
- एक परिमेय और एक अपरिमेय संख्या का योग या अंतर एक अपरिमेय संख्या होती है।
- एक शून्येतर परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल एक अपरिमेय संख्या होती है।

- दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए HCF $(a, b) \times$ LCM $(a, b) = a \times b$ होता है।
- मान लीजिए कि $x = \frac{p}{q}$, जहाँ p और q सहअभाज्य हैं, एक परिमेय संख्या है जिसका दशमलव प्रसार सांत है। तब q का अभाज्य गुणनखंडन $2^m.5^n$ के रूप का होता है; जहाँ m, n ऋणेतर पूर्णांक हैं।
- मान लीजिए कि $x = \frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या इस प्रकार है कि q का अभाज्य गुणनखंडन $2^m.5^n$ के रूप का नहीं है; जहाँ m, n ऋणेतर पूर्णांक हैं। तब, x का असांत आवर्ती दशमलव प्रसार होता है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : परिमेय संख्या $\frac{33}{2^2.5}$ का दशमलव प्रसार निम्नलिखित के बाद समाप्त होता है

(A) एक दशमलव स्थान (B) दो दशमलव स्थान

(C) तीन दशमलव स्थान (D) तीन से अधिक दशमलव स्थान

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : यूक्लिडीय विभाजन प्रमेयिका कहती है कि दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए, ऐसे अद्वितीय पूर्णांकों q और r का अस्तित्व है कि $a = bq + r$, जहाँ r निम्नलिखित को अवश्य ही संतुष्ट करेगा

(A) $1 < r < b$ (B) $0 < r \le b$

(C) $0 \le r < b$ (D) $0 < r < b$

हल : उत्तर (C)

प्रश्नावली 1.1

निम्नलिखित प्रश्नों में, दिए हुए चार विकल्पों में सें सही उत्तर चुनिए :

1. किसी पूर्णांक m के लिए, प्रत्येक सम पूर्णांक निम्नलिखित रूप का होता है

(A) m (B) $m + 1$

(C) $2m$ (D) $2m + 1$

2. किसी पूर्णांक q के लिए, प्रत्येक विषम पूर्णांक निम्नलिखित रूप का होता है

(A) q (B) $q + 1$

(C) $2q$ (D) $2q + 1$

3. संख्या $n^2 - 1$, 8 से विभाज्य होती है , यदि n है एक

(A) पूर्णांक (B) प्राकृत संख्या

(C) विषम संख्या (D) सम संख्या

4. यदि 65 और 117 के HCF को $65m - 117$ के रूप में व्यक्त किया जा सके,तो m का मान है

(A) 4 (B) 2

(C) 1 (D) 3

5. वह सबसे बड़ी संख्या, जिससे 70 और 125 को विभाजित करने पर क्रमश: शेषफल 5 और 8 प्राप्त हों, है

(A) 13 (B) 65

(C) 875 (D) 1750

6. यदि दो धनात्मक पूर्णांकों a और b को $a = x^3y^2$ और $b = xy^3$ के रूप में व्यक्त किया जाए, जहाँ x और y अभाज्य संख्याएँ हैं, तो HCF (a, b) है

(A) xy (B) xy^2 (C) x^3y^3 (D) x^2y^2

7. यदि दो धनात्मक पूर्णांकों p और q को $p = ab^2$ और $q = a^3b$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ a और b अभाज्य संख्याएँ हैं, तो LCM (p, q) है

(A) ab (B) a^2b^2 (C) a^3b^2 (D) a^3b^3

8. एक शून्येतर परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल होता है

(A) सदैव अपरिमेय संख्या (B) सदैव परिमेय संख्या

(C) परिमेय या अपरिमेय संख्या (D) एक

9. 1 से 10 तक की संख्याओं (दोनों सम्मिलित हैं) में से सभी संख्याओं से विभाज्य न्यूनतम संख्या है

(A) 10 (B) 100 (C) 504 (D) 2520

10. परिमेय संख्या $\frac{14587}{1250}$ का दशमलव प्रसार निम्नलिखित किन दशमलव स्थानों के बाद समाप्त हो जाएगा

(A) एक (B) दो

(C) तीन (D) चार

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: जब एक धनात्मक पूर्णांक a को 3 से भाग दिया जाता है, तो शेषफल r के मान केवल 0 और 1 हो सकते हैं। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : नहीं।

यूक्लिडीय विभाजन प्रमेयिका के अनुसार,

$a = 3q + r$, जहाँ $0 \le r < 3$ है और r एक पूर्णांक है। अत: r के मान 0, 1 या 2 हो सकते हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: क्या संख्या 6^n जहाँ, n एक प्राकृत संख्या है, अंक 5 पर समाप्त हो सकती है? कारण दीजिए।

हल : नहीं, क्योंकि $6^n = (2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n$ है, अर्थात 6^n के गुणनखंडन में आने वाली अभाज्य संख्याएँ केवल 2 और 3 हैं, 5 नहीं है। अत:, यह संख्या 5 पर समाप्त नहीं हो सकती।

प्रश्नावली 1.2

1. क्या प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक $4q + 2$ के रूप का हो सकता है, जहाँ q एक पूर्णांक है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

2. "दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 2 से विभाज्य है।" क्या यह कथन सत्य है या असत्य? कारण दीजिए।

3. "तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 6 से विभाज्य है।" क्या यह कथन सत्य है या असत्य? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

4. लिखिए कि क्या किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग $3m + 2$ के रूप का हो सकता है, जहाँ m एक प्राकृत संख्या है। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

5. एक धनात्मक पूर्णांक $3q + 1$ के रूप का है, जहाँ q एक प्राकृत संख्या है। क्या इसके वर्ग को $3m + 1$ से भिन्न रूप में, अर्थात् $3m$ या $3m + 2$ के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ m कोई पूर्णांक है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

6. दोनों ही संख्याएँ 525 और 3000 केवल 3, 5, 15, 25 और 75 से विभाज्य हैं। HCF (525, 3000) क्या है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

7. स्पष्ट कीजिए कि $3 \times 5 \times 7 + 7$ एक भाज्य संख्या क्यों है।

8. क्या किन्हीं दो संख्याओं का HCF 18 और LCM 380 हो सकता है? कारण दीजिए।

9. बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया किए, ज्ञात कीजिए कि क्या $\frac{987}{10500}$ का दशमलव प्रसार सांत होगा या असांत आवर्ती होगा। अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

10. एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार 327.7081 है। जब इस संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जाएगा, तो आप q के अभाज्य गुणनखंडों के बारे में क्या कह सकते हैं? कारण दीजिए।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: यूक्लिड की विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करते हुए, ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन से संख्या-युग्म सहअभाज्य हैं:

(i) 231, 396 (ii) 847, 2160

हल : आइए, संख्याओं के प्रत्येक युग्म का HCF ज्ञात करें।

(i) $396 = 231 \times 1 + 165$

$231 = 165 \times 1 + 66$

$165 = 66 \times 2 + 33$

$66 = 33 \times 2 + 0$

अत:, HCF = 33 है। इसलिए संख्याएँ सहअभाज्य नहीं हैं।

(ii) $2160 = 847 \times 2 + 466$

$847 = 466 \times 1 + 381$

$466 = 381 \times 1 + 85$

$381 = 85 \times 4 + 41$

$85 = 41 \times 2 + 3$

$41 = 3 \times 13 + 2$

$3 = 2 \times 1 + 1$

$2 = 1 \times 2 + 0$

अत:, HCF = 1 है। इसलिए संख्याएँ सहअभाज्य हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: दर्शाइए कि किसी पूर्ण संख्या m के लिए एक विषम धनात्मक पूर्णांक का वर्ग $8m + 1$ के रूप का होता है।

हल : कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $2q + 1$ के रूप का होता है, जहाँ q एक पूर्ण संख्या है।

अत:, $(2q + 1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4q\,(q + 1) + 1$ (1)

अब q $(q + 1)$ या तो 0 या एक सम संख्या होगी, जिसे $2m$ से व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ m एक पूर्ण संख्या है।

अत:, $(2q + 1)^2 = 4.2\,m + 1 = 8\,m + 1$ [(1) से]

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

हल : आइये कल्पना करें कि $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है। मान लीजिए $\sqrt{2}+\sqrt{3} = a$, जहाँ a एक परिमेय संख्या है।

अत: , $\sqrt{2} = a-\sqrt{3}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$2 = a^2 + 3 - 2a\sqrt{3}$$

अत:, $\sqrt{3}=\dfrac{a^2+1}{2a}$ है, जिससे एक विरोधाभास या अंतर्विरोध (contradiction) प्राप्त होता है, क्योंकि दायाँ पक्ष एक परिमेय संख्या है जबकि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। अत: , $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

प्रश्नावली 1.3

1. दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक q के लिए, या तो $4q$ या $4q + 1$ के रूप का होता है।

2. दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का घन, किसी पूर्णांक m के लिए, $4m$, $4m + 1$ या $4m + 3$ के रूप का होता है।

3. दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक q के लिए, $5q + 2$ या $5q + 3$ के रूप का नहीं हो सकता।

4. दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक m के लिए, $6m +2$ या $6m + 5$ के रूप का नहीं हो सकता।

5. दर्शाइए कि किसी पूर्णांक q के लिए, किसी विषम पूर्णांक का वर्ग $4q + 1$ के रूप का होता है।

6. यदि n एक विषम पूर्णांक है, तो दर्शाइए कि $n^2 - 1$, 8 से विभाज्य है।

7. सिद्ध कीजिए कि यदि x और y दोनों धनात्मक विषम पूर्णांक हैं, तो $x^2 + y^2$ एक सम संख्या है, परंतु 4 से विभाज्य नहीं है।

8. 441, 567 और 693 का HCF ज्ञात करने के लिए, यूक्लिड की विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए।

9. यूक्लिड की विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करते हुए, ऐसी सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 1251, 9377 और 15628 को भाग देने पर शेषफल क्रमशः 1, 2 और 3 प्राप्त हो।

10. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

11. दर्शाइए कि किसी प्राकृत संख्या n के लिए संख्या 12^n अंक 0 या 5 पर समाप्त नहीं होगी।

12. एक प्रात:कालीन सैर के समय, तीन व्यक्ति एक साथ किसी स्थान से चलना प्रारंभ करते हैं तथा उनके कदमों के माप क्रमशः 40 cm, 42 cm और 45 cm हैं। इनमें से प्रत्येक कितनी न्यूनतम दूरी चले कि वह इस दूरी को पूर्ण कदमों में तय करे?

13. परिमेय संख्या $\frac{257}{5000}$ के हर को $2^m \times 5^n$ के रूप में लिखिए, जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक है। इसके बाद, बिना वास्तविक विभाजन के इस परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार लिखिए।

14. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ एक अपरिमेय संख्या है, जहाँ p और q अभाज्य संख्याएँ हैं।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : दर्शाइए कि किसी पूर्णांक q के लिए, एक विषम धनात्मक पूर्णांक का वर्ग $6q + 1$ या $6q + 3$ के रूप का हो सकता है।

हल : हम जानते हैं कि कोई भी धनात्मक पूर्णांक, एक पूर्णांक m के लिए, $6m$, $6m + 1$, $6m + 2$, $6m + 3$, $6m + 4$ या $6m + 5$ के रूप का हो सकता है।

इसलिए एक विषम धनात्मक पूर्णांक $6m + 1$, $6m + 3$, या $6m + 5$ के रूप का हो सकता है। इस प्रकार हमें प्राप्त होते है:

$(6m+1)^2 = 36m^2 + 12m + 1 = 6(6m^2 + 2m) + 1 = 6q + 1$ है ,जहाँ q एक पूर्णांक है।

$(6m+3)^2 = 36m^2 + 36m + 9 = 6(6m^2 + 6m + 1) + 3 = 6q + 3$, जहाँ q एक पूर्णांक है।

$(6m+5)^2 = 36m^2 + 60m + 25 = 6(6m^2 + 10m + 4) + 1 = 6q + 1$, जहाँ q एक पूर्णांक है।

इस प्रकार, एक विषम धनात्मक पूर्णांक का वर्ग $6q + 1$ या $6q + 3$ के रूप का हो सकता है।

प्रश्नावली 1.4

1. दर्शाइए कि $6q + r$ के रूप के एक धनात्मक पूर्णांक का घन भी, जहाँ q एक पूर्णांक है तथा $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ हैं, $6m + r$ के रूप का होता है। जहाँ m एक पूर्णांक है।

2. सिद्ध कीजिए कि n, $n + 2$ और $n + 4$ में से एक और केवल एक ही 3 से विभाज्य है, जहाँ n कोई धनात्मक पूर्णांक है।

3. सिद्ध कीजिए कि किन्हीं तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों में से एक पूर्णांक 3 से अवश्य ही विभाज्य होना चाहिए।

4. सिद्ध कीजिए कि किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए संख्या $n^3 - n$, 6 से विभाज्य है।

5. दर्शाइए कि n, $n + 4$, $n + 8$, $n + 12$ और $n + 16$ में से एक और केवल एक ही 5 से विभाज्य है, जहाँ n कोई धनात्मक पूर्णांक है।

[**संकेत :** किसी भी धनात्मक पूर्णांक को $5q$, $5q + 1$, $5q + 2$, $5q + 3$, $5q + 4$ के रूप में लिखा जा सकता है।]