

# गणित

(पाठ - 1) (संबंध एवं फलन)

(कक्षा 12)

## प्रश्नावली 1.1

### प्रश्न 1:

निर्धारित कीजिए कि निम्नलिखित संबंधों में से प्रत्येक स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हैं:

(i) समुच्चय  $A = \{1, 2, 3, \dots, 13, 14\}$  में संबंध  $R$ , इस प्रकार परिभाषित है कि

$$R = \{(x, y) : 3x - y = 0\}$$

(ii) प्राकृत संख्याओं के समुच्चय  $\mathbf{N}$  में  $R = \{(x, y) : y = x + 5 \text{ तथा } x < 4\}$  द्वारा परिभाषित संबंध  $R$ .

(iii) समुच्चय  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  में  $R = \{(x, y) : y \text{ भाज्य है } x \text{ से}\}$  द्वारा परिभाषित संबंध  $R$  है।

(iv) समस्त पूर्णाकों के समुच्चय  $\mathbf{Z}$  में  $R = \{(x, y) : x - y \text{ एक पूर्णांक है}\}$  द्वारा परिभाषित संबंध  $R$ .

(v) किसी विशेष समय पर किसी नगर के निवासियों के समुच्चय में निम्नलिखित संबंध  $R$

(a)  $R = \{(x, y) : x \text{ तथा } y \text{ एक ही स्थान पर कार्य करते हैं}\}$

(b)  $R = \{(x, y) : x \text{ तथा } y \text{ एक ही मोहल्ले में रहते हैं}\}$

(c)  $R = \{(x, y) : x, y \text{ से ठीक - ठीक 7 सेमी लंबा है}\}$

(d)  $R = \{(x, y) : x, y \text{ की पत्नी है}\}$

(e)  $R = \{(x, y) : x, y \text{ के पिता है}\}$

### उत्तर 1::

(i)  $A = \{1, 2, 3 \dots 13, 14\}$

$$R = \{(x, y) : 3x - y = 0\}$$

$$\therefore R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$$

$R$  सममित नहीं है क्योंकि  $(1, 1), (2, 2) \dots (14, 14) \notin R$ .

तथा,  $R$  सममित नहीं है क्योंकि  $(1, 3) \in R$ , लेकिन  $(3, 1) \notin R$ .  $[3(3) - 1 \neq 0]$

तथा,  $R$  संक्रामक नहीं है क्योंकि  $(1, 3), (3, 9) \in R$ , लेकिन  $(1, 9) \notin R$ .  $[3(1) - 9 \neq 0]$

अतः,  $R$  न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

(ii)  $R = \{(x, y) : y = x + 5 \text{ तथा } x < 4\} = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

क्योंकि  $(1, 1) \notin R$ .  $\therefore R$  स्वतुल्य नहीं है।

तथा  $(1, 6) \in R$  लेकिन  $(1, 6) \notin R$ .  $\therefore R$  सममित नहीं है।

किसी भी युग्म के लिए संबंध  $R$  में,  $(x, y) \in R$  तथा  $(y, z) \in R$  के लिए  $(x, z) \in R$  नहीं है।

$\therefore R$  संक्रामक नहीं है।

अतः,  $R$  न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

(iii)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$R = \{(x, y) : y \text{ भाज्य है } x \text{ से}\}$$

हम जानते हैं कि प्रत्येक संख्या स्वयं से भाज्य होती है, इसलिए  $(x, x) \in R$

$\therefore R$  स्वतुल्य है।

अब,  $(2, 4) \in R$

[क्योंकि 4 भाज्य है 2 से]

लेकिन  $(4, 2) \notin R$ .

[क्योंकि 2 भाज्य नहीं है 4 से]

$\therefore R$  सममित नहीं है।

माना,  $(x, y), (y, z) \in R$ , इसलिए  $y$  भाज्य है  $x$  से और  $z$  भाज्य है  $y$  से।  $\therefore z$  भाज्य है  $x$  से,

$\Rightarrow (x, z) \in R$ ,  $\therefore R$  संक्रामक है।

अतः,  $R$  स्वतुल्य और संक्रामक है लेकिन सममित नहीं है।

(iv)  $R = \{(x, y) : x - y \text{ एक पूर्णांक है}\}$

यहाँ, प्रत्येक  $x \in \mathbf{Z}$  के लिए,  $(x, x) \in R$  क्योंकि  $x - x = 0$  एक पूर्णांक है।  $\therefore R$  स्वतुल्य है।

माना संख्याएँ  $x, y \in \mathbf{Z}$ , यदि  $(x, y) \in R$ , तब  $x - y$  एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow -(x - y)$  भी एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow (y - x)$  भी एक पूर्णांक है।

$\therefore (y, x) \in R$ , इसलिए  $R$  सममित है।

अब, माना  $(x, y)$  और  $(y, z) \in R$ , जहाँ  $x, y, z \in \mathbf{Z}$ .

$\Rightarrow (x - y)$  और  $(y - z)$  पूर्णांक हैं।  
 $\Rightarrow x - z = (x - y) + (y - z)$  पूर्णांक है।  
 $\therefore (x, z) \in R$ , इसलिए  $R$  संक्रामक है।  
 अतः,  $R$  स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है।

**(v)**

**(a)**  $R = \{(x, y): x \text{ तथा } y \text{ एक ही स्थान पर कार्य करते हैं}\}$   
 $\Rightarrow (x, x) \in R$  [क्योंकि  $x$  और  $x$  एक ही स्थान पर कार्य करते हैं]

$\therefore R$  स्वतुल्य है।

यदि  $(x, y) \in R$ , तब  $x$  और  $y$  एक ही स्थान पर कार्य करते हैं।

$\Rightarrow y$  और  $x$  एक ही स्थान पर कार्य करते हैं।

$\Rightarrow (y, x) \in R$ .

$\therefore R$  सममित है।

अब, माना  $(x, y), (y, z) \in R$

$\Rightarrow x$  और  $y$  एक ही स्थान पर कार्य करते हैं तथा  $y$  और  $z$  एक ही स्थान पर कार्य करते हैं।

$\Rightarrow x$  और  $z$  एक ही स्थान पर कार्य करते हैं।

$\Rightarrow (x, z) \in R$

$\therefore R$  संक्रामक है।

अतः,  $R$  स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है।

**(b)**  $R = \{(x, y): x \text{ तथा } y \text{ एक ही मोहल्ले में रहते हैं}\}$

यहाँ,  $(x, x) \in R$  क्योंकि  $x$  और  $x$  एक ही मोहल्ले में रहते हैं।

$\therefore R$  स्वतुल्य है।

यदि  $(x, y) \in R$ , तब  $x$  और  $y$  एक ही मोहल्ले में रहते हैं।

$\Rightarrow y$  और  $x$  एक ही मोहल्ले में रहते हैं।

$\Rightarrow (y, x) \in R$

$\therefore R$  सममित है।

अब, माना  $(x, y) \in R$  तथा  $(y, z) \in R$ .

$\Rightarrow x$  और  $y$  एक ही मोहल्ले में रहते हैं तथा  $y$  और  $z$  एक ही मोहल्ले में रहते हैं।

$\Rightarrow x$  और  $z$  एक ही मोहल्ले में रहते हैं।

$\Rightarrow (x, z) \in R$

$\therefore R$  संक्रामक है।

अतः,  $R$  स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है।

**(c)**  $R = \{(x, y): x, y \text{ से ठीक - ठीक } 7 \text{ सेमी लंबा है}\}$

यहाँ,  $(x, x) \notin R$

क्योंकि कोई भी स्वयं से ही लंबा नहीं हो सकता है।

$\therefore R$  स्वतुल्य नहीं है।

अब, माना  $(x, y) \in R. \Rightarrow x, y$  से ठीक - ठीक 7 सेमी लंबा है।

इसलिए,  $y, x$  से छोटा है अर्थात् लंबा नहीं है।  $\therefore (y, x) \notin R$

इसीप्रकार यदि  $x, y$  से ठीक 7 सेमी लंबा है तो  $y, x$  से 7 सेमी छोटा है अर्थात् लंबा नहीं है।

$\therefore R$  सममित नहीं है।

अब, माना  $(x, y)$  और  $(y, z) \in R$ .

$\Rightarrow x, y$  से ठीक 7 सेमी लंबा है तथा  $y, z$  से ठीक 7 सेमी लंबा है।

$\Rightarrow x, z$  से 14 सेमी लंबा है।  $\therefore (x, z) \notin R$

$\therefore R$  संक्रामक नहीं है।

अतः,  $R$  न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

**(d)**  $R = \{(x, y): x, y \text{ की पत्नी है}\}$

अब,  $(x, x) \notin R$ , क्योंकि कोई भी स्वयं की ही पत्नी नहीं हो सकती है।

$\therefore R$  स्वतुल्य नहीं है।

अब, माना  $(x, y) \in R \Rightarrow x, y$  की पत्नी है।

तो  $y, x$  की पत्नी नहीं है बल्कि उसका पति है।  $\therefore (y, x) \notin R$

$\therefore R$  सममित नहीं है।

माना  $(x, y)$  और  $(y, z) \in R$

$\Rightarrow x, y$  की पत्नी है तथा  $y, z$  की पत्नी है। परन्तु यह संभव नहीं है। इसलिए  $x, z$  की पत्नी नहीं है।

$\therefore (x, z) \notin R$

$\therefore R$  संक्रामक नहीं है।

अतः,  $R$  न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

**(e)**  $R = \{(x, y) : x, y \text{ के पिता है}\}$

$(x, x) \notin R$ , क्योंकि कोई इन्सान खुद का ही पिता नहीं हो सकता है।

$\therefore R$  स्वतुल्य नहीं है।

अब, माना  $(x, y) \in R$ ,

$\Rightarrow x, y$  का पिता है।

$\Rightarrow y, x$  का पिता नहीं हो सकता है बल्कि  $y, x$  का पुत्र या पुत्री है।

$\therefore (y, x) \notin R$ , इसलिए  $R$  सममित नहीं है।

अब, माना  $(x, y) \in R$  और  $(y, z) \notin R$ .

$\Rightarrow x, y$  का पिता है तथा  $y, z$  का पिता है।

$\Rightarrow x, z$  का पिता नहीं है बल्कि  $x, z$  का दादा है।

$\therefore (x, z) \notin R$ , इसलिए  $R$  संक्रामक नहीं है।

अतः,  $R$  न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

### प्रश्न 2:

सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय  $R$  में  $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$ , द्वारा परिभाषित संबंध  $R$ , न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

#### उत्तर 2:

$R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$

यहाँ,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \notin R$ , क्योंकि,  $\frac{1}{2} > (\frac{1}{2})^2$

$\therefore R$  स्वतुल्य नहीं है।

अब,  $(1, 4) \in R$  क्योंकि  $1 < 4^2$  लेकिन,  $4, 1^2$  से छोटा नहीं है।

$\therefore (4, 1) \notin R$ , इसलिए  $R$  सममित नहीं है।

यहाँ,  $(3, 2), (2, 1.5) \in R$  [क्योंकि  $3 < 2^2 = 4$  तथा  $2 < (1.5)^2 = 2.25$ ]

लेकिन,  $3 > (1.5)^2 = 2.25$

$\therefore (3, 1.5) \notin R$ , इसलिए  $R$  संक्रामक नहीं है।

अतः,  $R$  न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

### प्रश्न 3:

जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  में  $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$  द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है।

#### उत्तर 3:

माना  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

प्रश्नानुसार, संबंध  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$  इसलिए  $(a, a) \notin R$ , जहाँ  $a \in A$ .

क्योंकि,  $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) \notin R$   
 $\therefore R$  स्वतुल्य नहीं है।  
 यहाँ  $(1, 2) \in R$ , लेकिन  $(2, 1) \notin R$ , इसलिए  $R$  सममित नहीं है।  
 अब,  $(1, 2), (2, 3) \in R$  लेकिन,  $(1, 3) \notin R$ , इसलिए  $R$  संक्रामक नहीं है।  
 अतः,  $R$  न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

#### प्रश्न 4:

सिद्ध कीजिए कि  $R$  में  $R = \{(a, b) : a \leq b\}$ , द्वारा परिभाषित संबंध  $R$  स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

##### उत्तर 4:

$R = \{(a, b) : a \leq b\}$   
 यहाँ  $(a, a) \in R$  [क्योंकि  $a = a$ ]  
 $\therefore R$  स्वतुल्य है।  
 अब,  $(2, 4) \in R$  (क्योंकि  $2 < 4$ ) लेकिन,  $(4, 2) \notin R$  क्योंकि  $4 > 2$ .  
 $\therefore R$  सममित नहीं है।  
 अब, माना  $(a, b), (b, c) \in R$ , तब,  $a \leq b$  और  $b \leq c$   
 $\Rightarrow a \leq c \Rightarrow (a, c) \in R$ ,  
 इसलिए  $R$  संक्रामक है।  
 अतः,  $R$  स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

#### प्रश्न 5:

जाँच कीजिए कि क्या  $R$  में  $R = \{(a, b) : a \leq b^3\}$  द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य, सममित अथवा संक्रामक है?

##### उत्तर 5:

$R = \{(a, b) : a \leq b^3\}$   
 प्रश्नानुसार,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \notin R$ , क्योंकि,  $\frac{1}{2} > (\frac{1}{2})^3$   
 $\therefore R$  स्वतुल्य नहीं है।  
 अब,  $(1, 2) \in R$  (क्योंकि  $1 < 2^3 = 8$ ) लेकिन,  $(2, 1) \notin R$  (as  $2^3 > 1$ )  
 $\therefore R$  सममित नहीं है।  
 यहाँ,  $(3, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{6}{5}) \in R$ , क्योंकि  $3 < (\frac{3}{2})^3$  और  $\frac{3}{2} < (\frac{6}{5})^3$  लेकिन  $(3, \frac{6}{5}) \notin R$  क्योंकि  $3 > (\frac{6}{5})^3$   
 $\therefore R$  संक्रामक नहीं है।  
 अतः,  $R$  न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

#### प्रश्न 6:

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय  $\{1, 2, 3\}$  में  $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ , द्वारा प्रदत्त संबंध  $R$  सममित है किन्तु न तो स्वतुल्य है और न संक्रामक है।

##### उत्तर 6:

माना  $A = \{1, 2, 3\}$ .  
 संबंध  $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ .  
 यहाँ  $(1, 1), (2, 2), (3, 3) \notin R$ .  
 $\therefore R$  स्वतुल्य नहीं है।  
 अब, क्योंकि  $(1, 2) \in R$  और  $(2, 1) \in R$ , इसलिए  $R$  सममित है।  
 तथा,  $(1, 2)$  और  $(2, 1) \in R$ , लेकिन,  $(1, 1) \notin R$   
 $\therefore R$  संक्रामक नहीं है।  
 अतः,  $R$  सममित है लेकिन न स्वतुल्य है और न ही संक्रामक है।

**प्रश्न 7:**

सिद्ध कीजिए कि किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों के समुच्चय  $A$  में  $R = \{(x, y): x \text{ तथा } y \text{ में पेजों की संख्या समान है}\}$  द्वारा प्रदत्त संबंध  $R$  एक तुल्यता संबंध है।

**उत्तर 7:**

$A$  पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों का समुच्चय है।

$R = \{(x, y): x \text{ तथा } y \text{ में पेजों की संख्या समान है}\}$

यहाँ,  $R$  स्वतुल्य है, अर्थात्  $(x, x) \in R$  क्योंकि  $x$  और  $x$  में पेजों की संख्या समान है।

माना  $(x, y) \in R \Rightarrow x$  और  $y$  में पेजों की संख्या समान है।

$\Rightarrow y$  और  $x$  में पेजों की संख्या समान है।

$\Rightarrow (y, x) \in R$ , इसलिए  $R$  सममित है।

अब, माना  $(x, y) \in R$  और  $(y, z) \in R$ ।

$\Rightarrow x$  और  $y$  में पेजों की संख्या समान है तथा  $y$  और  $z$  में पेजों की संख्या समान है।

$\Rightarrow x$  और  $z$  में पेजों की संख्या समान है।

$\Rightarrow (x, z) \in R$ , इसलिए  $R$  संक्रामक है।

अतः,  $R$  एक तुल्यता संबंध है।

**प्रश्न 8:**

सिद्ध कीजिए कि  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  में,  $R = \{(a, b): |a - b| \text{ सम है}\}$  द्वारा प्रदत्त संबंध  $R$  एक तुल्यता संबंध है। प्रमाणित कीजिए कि  $\{1, 3, 5\}$  के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं और समुच्चय  $\{2, 4\}$  के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं परंतु  $\{1, 3, 5\}$  का कोई भी अवयव  $\{2, 4\}$  के किसी अवयव से संबंधित नहीं है।

**उत्तर 8:**

यहाँ  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  और संबंध  $R = \{(a, b): |a - b| \text{ सम है}\}$

प्रश्न के अनुसार, सभी  $a \in A$  के लिए  $|a - a| = 0$  (जो की सम है)।

$\therefore R$  स्वतुल्य है।

माना  $(a, b) \in R \Rightarrow |a - b|$  सम है।

$\Rightarrow |-(a - b)| = |b - a|$  भी सम है  $\Rightarrow (b, a) \in R$ , इसलिए  $R$  सममित है।

अब, माना  $(a, b) \in R$  और  $(b, c) \in R$ ।

$\Rightarrow |a - b|$  सम है और  $|b - c|$  सम है।  $\Rightarrow (a - b)$  सम है और  $(b - c)$  सम है।

$\Rightarrow (a - c) = (a - b) + (b - c)$  सम है। [क्योंकि दो सम संख्याओं का योग सम होता है]

$\Rightarrow |a - b|$  सम है  $\Rightarrow (a, c) \in R$ , इसलिए  $R$  संक्रामक है।

अतः,  $R$  एक तुल्यता संबंध है।

समुच्चय  $\{1, 2, 3\}$  के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं क्योंकि इसके सभी अवयव विषम हैं। विषम संख्याओं का अंतर सदैव सम होता है।

इसीप्रकार, समुच्चय  $\{2, 4\}$  के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं क्योंकि इसके सभी अवयव सम हैं। सम संख्याओं का अंतर सदैव सम होता है।

समुच्चय  $\{1, 3, 5\}$  का कोई भी अवयव समुच्चय  $\{2, 4\}$  के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है, क्योंकि समुच्चय  $\{1, 3, 5\}$  के सभी अवयव विषम हैं तथा समुच्चय  $\{2, 4\}$  के सभी अवयव सम हैं। सम और विषम संख्याओं का अंतर सदैव विषम होता है। [जैसे  $1 - 2, 1 - 4, 3 - 2, 3 - 4, 5 - 2$  और  $5 - 4$  सभी विषम हैं।]

**प्रश्न 9:**

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय  $A = \{x \in \mathbb{Z}: 0 \leq x \leq 12\}$ , में दिए गए निम्नलिखित संबंधों  $R$  में से प्रत्येक एक तुल्यता संबंध है:

(i)  $R = \{(a, b): |a - b|, 4 \text{ का एक गुणज है}\}$ ,

(ii)  $R = \{(a, b): a = b\}$ ,

प्रत्येक दशा में 1 से संबंधित अवयवों को ज्ञात कीजिए।

### उत्तर 9:

(i)  $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 12\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$R = \{(a, b) : |a - b|, 4 \text{ का एक गुणज है}\}$

अवयव  $a \in A$  के लिए,  $(a, a) \in R$  क्योंकि  $|a - a| = 0$ , 4 का एक गुणज है।

$\therefore R$  स्वतुल्य है।

अब, माना  $(a, b) \in R \Rightarrow |a - b|, 4 \text{ का एक गुणज है।}$

$\Rightarrow |-(a - b)| = |b - a|, 4 \text{ का एक गुणज है} \Rightarrow (b, a) \in R$

$\therefore R$  सममित है।

माना  $(a, b)$  और  $(b, c) \in R$ .

$\Rightarrow |a - b|, 4 \text{ का एक गुणज है और } |b - c|, 4 \text{ का एक गुणज है।}$

$\Rightarrow (a - b), 4 \text{ का एक गुणज है और } (b - c), 4 \text{ का एक गुणज है।}$

$\Rightarrow (a - c) = (a - b) + (b - c), 4 \text{ का एक गुणज है।}$

$\Rightarrow |a - c|, 4 \text{ का एक गुणज है} \Rightarrow (a, c) \in R$

$\therefore R$  संक्रामक है।

अतः,  $R$  एक तुल्यता संबंध है।

1 से संबंधित अवयव इस प्रकार हैं:  $\{1, 5, 9\}$  क्योंकि

$|1 - 1| = 0$  जो कि 4 का एक गुणज है।

$|5 - 1| = 4$  जो कि 4 का एक गुणज है।

$|9 - 1| = 8$  जो कि 4 का एक गुणज है।

(ii)  $R = \{(a, b) : a = b\}$

किसी अवयव  $a \in A$  के लिए,  $(a, a) \in R$ , क्योंकि  $a = a$ .

$\therefore R$  स्वतुल्य है।

अब, माना  $(a, b) \in R \Rightarrow a = b \Rightarrow b = a \Rightarrow (b, a) \in R$

$\therefore R$  सममित है।

माना  $(a, b) \in R$  और  $(b, c) \in R \Rightarrow a = b$  और  $b = c \Rightarrow a = c$

$\Rightarrow (a, c) \in R$

$\therefore R$  संक्रामक है।

अतः,  $R$  एक तुल्यता संबंध है।

1 से संबंधित समुच्चय  $A$  का अवयव  $\{1\}$  है क्योंकि  $1 = 1$ .

### प्रश्न 10:

ऐसे संबंध का उदाहरण दीजिए, जो

(i) सममित हो परंतु न तो स्वतुल्य हो और न संक्रामक हो।

(ii) संक्रामक हो परंतु न तो स्वतुल्य हो और न सममित हो।

(iii) स्वतुल्य तथा सममित हो किंतु संक्रामक न हो।

(iv) स्वतुल्य तथा संक्रामक हो किंतु सममित न हो।

(v) सममित तथा संक्रामक हो किंतु स्वतुल्य न हो।

### उत्तर 10:

(i) माना  $A = \{5, 6, 7\}$ .

तथा संबंध  $R = \{(5, 6), (6, 5)\}$ .

संबंध  $R$  स्वतुल्य नहीं है क्योंकि  $(5, 5), (6, 6), (7, 7) \notin R$ .

अब, क्योंकि  $(5, 6) \in R$  और  $(6, 5) \in R$ , इसलिए  $R$  सममित है।

$\Rightarrow (5, 6), (6, 5) \in R$ , लेकिन  $(5, 5) \notin R$

$\therefore R$  संक्रामक नहीं है।

अतः, संबंध  $R$  सममित है परंतु न तो स्वतुल्य है और न ही संक्रामक है।

(ii) माना संबंध  $R$  समुच्चय  $R$  में परिभाषित है तथा  $R = \{(a, b) : a < b\}$   
 किसी अवयव  $a \in R$  के लिए,  $(a, a) \notin R$ , क्योंकि  $a$  स्वयं से छोटा नहीं हो सकता है।

$\therefore R$  स्वतुल्य नहीं है।

अब,  $(1, 2) \in R$  (क्योंकि  $1 < 2$ ) लेकिन, संख्या 2, संख्या 1 से छोटी नहीं है।

$\therefore (2, 1) \notin R$ , इसलिए  $R$  सममित नहीं है।

माना  $(a, b)$  और  $(b, c) \in R$ .

$\Rightarrow a < b$  और  $b < c \Rightarrow a < c \Rightarrow (a, c) \in R$

$\therefore R$  संक्रामक है।

अतः, संबंध  $R$  संक्रामक है परंतु न तो स्वतुल्य है और न ही सममित है।

(iii) माना  $A = \{4, 6, 8\}$ .

माना समुच्चय  $A$  पर परिभाषित संबंध  $R$  निम्नलिखित प्रकार से है।

$R = \{(4, 4), (6, 6), (8, 8), (4, 6), (6, 4), (6, 8), (8, 6)\}$

संबंध  $R$  स्वतुल्य है, क्योंकि प्रत्येक अवयव  $a \in A$  के लिए,  $(a, a) \in R$

अर्थात्  $(4, 4), (6, 6), (8, 8) \in R$ .

संबंध  $R$  सममित है, क्योंकि  $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ , सभी  $a, b \in R$  के लिए।

संबंध  $R$  संक्रामक नहीं है, क्योंकि  $(4, 6), (6, 8) \in R$ , लेकिन  $(4, 8) \notin R$ .

अतः, संबंध  $R$  स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है।

(iv) माना संबंध  $R$  समुच्चय  $R$  में परिभाषित है।

$R = \{(a, b) : a^3 \geq b^3\}$

इसलिए  $(a, a) \in R$  [क्योंकि  $a^3 = a^3$ ]

$\therefore R$  स्वतुल्य है।

यहाँ,  $(2, 1) \in R$  [क्योंकि  $2^3 \geq 1^3$ ]

लेकिन,  $(1, 2) \notin R$  [क्योंकि  $1^3 < 2^3$ ]

$\therefore R$  सममित नहीं है।

अब, माना  $(a, b)$  और  $(b, c) \in R$ .

$\Rightarrow a^3 \geq b^3$  और  $b^3 \geq c^3 \Rightarrow a^3 \geq c^3 \Rightarrow (a, c) \in R$

$\therefore R$  संक्रामक है।

अतः, संबंध  $R$  स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

(v) माना  $A = \{-5, -6\}$ .

माना, संबंध  $R$  समुच्चय  $A$  पर निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है।

$R = \{(-5, -6), (-6, -5), (-5, -5)\}$

संबंध  $R$  स्वतुल्य नहीं है क्योंकि  $(-6, -6) \notin R$ .

संबंध  $R$  सममित है क्योंकि  $(-5, -6) \in R$  और  $(-6, -5) \in R$ .

तथा, यदि  $(-5, -6)$  और  $(-6, -5) \in R$ , तब  $(-5, -5) \in R$

इसलिए, संबंध  $R$  संक्रामक है।

अतः, संबंध  $R$  सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।

### प्रश्न 11:

सिद्ध कीजिए कि किसी समतल में स्थित बिंदुओं के समुच्चय में,  $R = \{(P, Q) : \text{बिंदु } P \text{ की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु } Q \text{ की मूल बिंदु से दूरी के समान है}\}$  द्वारा प्रदत्त संबंध  $R$  एक तुल्यता संबंध है। पुनः सिद्ध कीजिए कि बिंदु  $P \neq (0, 0)$  से संबंधित सभी बिंदुओं का समुच्चय  $P$  से होकर जाने वाले एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता है, जिसका केंद्र मूलबिंदु पर है।

### उत्तर 11:

$R = \{(P, Q) : \text{बिंदु } P \text{ की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु } Q \text{ की मूल बिंदु से दूरी के समान है}\}$

यहाँ,  $(P, P) \in R$  क्योंकि बिंदु  $P$  की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु  $P$  की मूल बिंदु से दूरी के समान है।

$\therefore R$  स्वतुल्य है।

माना,  $(P, Q) \in R$ .

$\Rightarrow$  बिंदु  $P$  की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु  $Q$  की मूल बिंदु से दूरी के समान है।

$\Rightarrow$  बिंदु  $Q$  की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु  $P$  की मूल बिंदु से दूरी के समान है।

$\Rightarrow (Q, P) \in R$ , इसलिए  $R$  सममित है।

अब, माना  $(P, Q)$  और  $(Q, S) \in R$ .

$\Rightarrow$  बिंदु  $P$  की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु  $Q$  की मूल बिंदु से दूरी के समान है तथा बिंदु  $Q$  की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु  $S$  की मूल बिंदु से दूरी के समान है।

$\Rightarrow$  बिंदु  $P$  की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु  $S$  की मूल बिंदु से दूरी के समान है।

$\Rightarrow (P, S) \in R$ , इसलिए  $R$  संक्रामक है।

इसलिए, संबंध  $R$  एक तुल्यता संबंध है।

बिंदु  $P \neq (0, 0)$  से संबंधित सभी बिंदुओं के समुच्चय में वे बिंदु आते हैं जो मूल बिंदु से उतनी ही दूरी पर हैं जितना बिंदु  $P$  मूल बिंदु से दूर है। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि यदि  $O (0, 0)$  मूल बिंदु है और  $OP = k$  है, तो  $P$  से संबंधित सभी बिंदु मूल बिंदु से  $k$  दूरी पर होंगे।

अतः, बिंदु  $P \neq (0, 0)$  से संबंधित सभी बिंदुओं का समुच्चय  $P$  से होकर जाने वाले एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता है, जिसका केंद्र मूलबिंदु पर है।

### प्रश्न 12:

सिद्ध कीजिए कि समस्त त्रिभुजों के समुच्चय  $A$  में  $R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2 \text{ के समरूप है}\}$  द्वारा परिभाषित संबंध  $R$  एक तुल्यता संबंध है। भुजाओं 3, 4, 5 वाले समकोण त्रिभुज  $T_1$ , भुजाओं 5, 12, 13 वाले समकोण त्रिभुज  $T_2$  तथा भुजाओं 6, 8, 10 वाले समकोण त्रिभुज  $T_3$  पर विचार कीजिए।  $T_1, T_2$  और  $T_3$  में से कौन से त्रिभुज परस्पर संबंधित हैं?

#### उत्तर 12:

$R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2 \text{ के समरूप है}\}$

$R$  स्वतुल्य है क्योंकि प्रत्येक त्रिभुज स्वयं के समरूप होता है।

अब, यदि  $(T_1, T_2) \in R$ , तब  $T_1, T_2$  के समरूप है।  $\Rightarrow T_2, T_1$  के समरूप है।

$\Rightarrow (T_2, T_1) \in R$ , इसलिए  $R$  सममित है।

माना  $(T_1, T_2)$  और  $(T_2, T_3) \in R \Rightarrow T_1, T_2$  के समरूप है और  $T_2, T_3$  के समरूप है।

$\Rightarrow T_1, T_3$  के समरूप है।  $\Rightarrow (T_1, T_3) \in R$ , इसलिए  $R$  संक्रामक है।

इसप्रकार,  $R$  एक तुल्यता संबंध है।

अब हम देखते हैं कि  $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} \left( = \frac{1}{2} \right)$

क्योंकि त्रिभुजों  $T_1$  और  $T_3$  की संगत भुजाएँ समानुपाती हैं, इसलिए, त्रिभुज  $T_1, T_3$  के समरूप है।

अतः, त्रिभुज  $T_1, T_3$  से संबंधित है।

### प्रश्न 13:

सिद्ध कीजिए कि समस्त बहुभुजों के समुच्चय  $A$  में,  $R = \{(P_1, P_2) : P_1 \text{ तथा } P_2 \text{ की भुजाओं की संख्या समान है}\}$  प्रकार से परिभाषित संबंध  $R$  एक तुल्यता संबंध है। 3, 4 और 5 लंबाई की भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित समुच्चय  $A$  के सभी अवयवों का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

#### उत्तर 13:

$R = \{(P_1, P_2) : P_1 \text{ तथा } P_2 \text{ की भुजाओं की संख्या समान है}\}$

$R$  स्वतुल्य है, क्योंकि  $(P_1, P_1) \in R$

माना  $(P_1, P_2) \in R \Rightarrow P_1$  और  $P_2$  की भुजाओं की संख्या समान है।

$\Rightarrow P_2$  और  $P_1$  की भुजाओं की संख्या समान है।  $\Rightarrow (P_2, P_1) \in R$

$\therefore R$  सममित है।

अब, माना  $(P_1, P_2)$  और  $(P_2, P_3) \in R$ .

$\Rightarrow P_1$  और  $P_2$  की भुजाओं की संख्या समान है तथा  $P_2$  और  $P_3$  की भुजाओं की संख्या समान है।

$\Rightarrow P_1$  और  $P_3$  की भुजाओं की संख्या समान है।  $\Rightarrow (P_1, P_3) \in R$

$\therefore R$  संक्रामक है।

अतः,  $R$  एक तुल्यता संबंध है।

इसलिए, 3, 4 और 5 लंबाई की भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित समुच्चय  $A$  में वे सभी बहुभुज होंगे जिनकी भुजाएँ 3 हैं

अतः, 3, 4 और 5 लंबाई की भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित समुच्चय  $A$  में वे सभी बहुभुज त्रिभुज होंगे।

#### प्रश्न 14:

मान लीजिए कि  $XY$ -तल में स्थित समस्त रेखाओं का समुच्चय  $L$  है और  $L$  में  $R = \{(L_1, L_2) : L_1 \text{ समांतर है } L_2 \text{ के}\}$  द्वारा परिभाषित संबंध  $R$  है। सिद्ध कीजिए कि  $R$  एक तुल्यता संबंध है। रेखा  $y = 2x + 4$  से संबंधित समस्त रेखाओं का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

##### उत्तर 14:

$R = \{(L_1, L_2) : L_1 \text{ समांतर है } L_2 \text{ के}\}$

$R$  स्वतुल्य है क्योंकि कोई भी रेखा  $L_1$  स्वयं के समांतर होती है। इसलिए  $(L_1, L_1) \in R$ .

माना  $(L_1, L_2) \in R \Rightarrow L_1 \text{ समांतर है } L_2 \text{ के} \Rightarrow L_2 \text{ समांतर है } L_1 \text{ के} \Rightarrow (L_2, L_1) \in R$ , इसलिए  $R$  सममित है।

अब, माना  $(L_1, L_2)$  और  $(L_2, L_3) \in R \Rightarrow L_1 \text{ समांतर है } L_2 \text{ के तथा } L_2 \text{ समांतर है } L_3 \text{ के।}$

$\Rightarrow L_1 \text{ समांतर है } L_3 \text{ के।}$  इसलिए  $R$  संक्रामक है।

अतः,  $R$  एक तुल्यता संबंध है।

रेखा  $y = 2x + 4$  से संबंधित सभी रेखाओं का समुच्चय, रेखा  $y = 2x + 4$  के समांतर सभी रेखाओं का समुच्चय होगा।

रेखा  $y = 2x + 4$  की प्रवणता  $m = 2$

हम जानते हैं की समांतर रेखाओं की प्रवणता समान होती है। दी गई रेखा के समांतर कोई रेखा  $y = 2x + c$  के रूप में होगी, जहाँ  $c \in R$ .

अतः, दी गई रेखा से संबंधित सभी रेखाओं का समुच्चय  $y = 2x + c$  है, जहाँ  $c \in R$  है।

#### प्रश्न 15:

मान लीजिए कि समुच्चय  $\{1, 2, 3, 4\}$  में,  $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$  द्वारा परिभाषित संबंध  $R$  है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए।

(A)  $R$  स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है।

(B)  $R$  स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

(C)  $R$  सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।

(D)  $R$  एक तुल्यता संबंध है।

##### उत्तर 15:

$R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$ , यहाँ  $(a, a) \in R$ , सभी अवयवों  $a \in \{1, 2, 3, 4\}$  के लिए।

$\therefore R$  स्वतुल्य है।

यहाँ  $(1, 2) \in R$  लेकिन  $(2, 1) \notin R$ , इसलिए  $R$  सममित नहीं है।

अब, यहाँ  $(a, b)$  और  $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$  सभी अवयवों  $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$ , इसलिए  $R$  संक्रामक है।

अतः,  $R$  स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

अतः, विकल्प (B) सही है।

#### प्रश्न 16:

मान लीजिए कि समुच्चय  $N$  में,  $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$  द्वारा प्रदत्त संबंध  $R$  है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए:

(A)  $(2, 4) \in R$

(B)  $(3, 8) \in R$

(C)  $(6, 8) \in R$

(D)  $(8, 7) \in R$

##### उत्तर 16:

$R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$

यहाँ, क्योंकि  $b > 6$ , इसलिए  $(2, 4) \notin R$  तथा  $3 \neq 8 - 2, \therefore (3, 8) \notin R$  और  $8 \neq 7 - 2, \therefore (8, 7) \notin R$

अब  $(6, 8)$  के लिए,  $8 > 6$  और  $6 = 8 - 2, \therefore (6, 8) \in R$

अतः, विकल्प (C) सही है।

# गणित

(पाठ - 1) (संबंध एवं फलन)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 1.2

## प्रश्न 1:

सिद्ध कीजिए कि  $f(x) = \frac{1}{x}$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: R_* \rightarrow R_*$  एकैकी तथा आच्छादक है, जहाँ  $R_*$  सभी ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। यदि प्रांत  $R_*$  को  $N$  से बदल दिया जाए, जब कि सहप्रांत पूर्ववत्  $R_*$  ही रहे, तो भी क्या यह परिणाम सत्य होगा?

### उत्तर 1:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

एकैकी के लिए:

माना  $x, y \in R_*$  इस प्रकार हैं कि  $f(x) = f(y)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$$

$\Rightarrow x = y$ ,  $\therefore f$  एकैकी फलन है।

आच्छादक के लिए:

यहाँ  $y \in R_*$  के लिए,  $x = \frac{1}{y} \in R_*$  [क्योंकि  $y \neq 0$ ] का अस्तित्व है, जहाँ

$$f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)} = y$$

$\therefore f$  आच्छादक है।

इसप्रकार,  $f(x) = \frac{1}{x}$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: R_* \rightarrow R_*$  एकैकी तथा आच्छादक है।

अब, माना  $g(x) = \frac{1}{x}$  द्वारा परिभाषित कोई फलन  $g: N \rightarrow R_*$  है। इसलिए,

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore g$  एकैकी फलन है।

यहाँ, फलन  $g$  आच्छादक नहीं है क्योंकि  $1.2 \in R_*$  के लिए  $N$  में कोई  $x$  नहीं है जिसके लिए  $g(x) = \frac{1}{1.2}$ ।

अतः, फलन  $g$  एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है।

## प्रश्न 2:

निम्नलिखित फलनों की एकैक (Injective) तथा आच्छादि (Surjective) गुणों की जाँच कीजिए:

(i)  $f(x) = x^2$  द्वारा प्रदत्त  $f: N \rightarrow N$  फलन है।

(ii)  $f(x) = x^2$  द्वारा प्रदत्त  $f: Z \rightarrow Z$  फलन है।

(iii)  $f(x) = x^2$  द्वारा प्रदत्त  $f: R \rightarrow R$  फलन है।

(iv)  $f(x) = x^3$  द्वारा प्रदत्त  $f: N \rightarrow N$  फलन है।

(v)  $f(x) = x^3$  द्वारा प्रदत्त  $f: Z \rightarrow Z$  फलन है।

### उत्तर 2:

(i)  $f(x) = x^2$  द्वारा प्रदत्त  $f: N \rightarrow N$  फलन है।

माना, किसी  $x, y \in N$  के लिए,  $f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ .

$\therefore f$  एकैक है।

यहाँ,  $2 \in N$ , लेकिन,  $N$  में  $x$  का कोई ऐसा मान नहीं है कि  $f(x) = x^2 = 2$ .

$\therefore f$  आच्छादि नहीं है।

अतः, फलन  $f$  एकैक है परन्तु आच्छादि नहीं है।

(ii)  $f(x) = x^2$  द्वारा प्रदत्त  $f: Z \rightarrow Z$  फलन है।

यहाँ,  $-1, 1 \in Z$  के लिए  $f(-1) = f(1) = 1$ , लेकिन  $-1 \neq 1$ , इसलिए  $f$  एकैक नहीं है।

यहाँ,  $-2 \in Z$ , लेकिन,  $Z$  में  $x$  का कोई ऐसा मान नहीं है कि  $f(x) = -2$  अर्थात्  $x^2 = -2$ .

$\therefore f$  आच्छादि नहीं है।

अतः, फलन  $f$  न तो एकैक है और न ही आच्छादि है।

(iii)  $f(x) = x^2$  द्वारा प्रदत्त  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  फलन है।

यहाँ,  $-1, 1 \in \mathbf{R}$  के लिए,  $f(-1) = f(1) = 1$ , लेकिन  $-1 \neq 1$ , इसलिए  $f$  एकैक नहीं है।

यहाँ,  $-2 \in \mathbf{R}$ , लेकिन,  $\mathbf{R}$  में  $x$  का कोई ऐसा मान नहीं है कि  $f(x) = -2$  अर्थात्  $x^2 = -2$ .

$\therefore f$  आच्छादि नहीं है।

अतः, फलन  $f$  न तो एकैक और न ही आच्छादि है।

(iv)  $f(x) = x^3$  द्वारा प्रदत्त  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  फलन है।

माना, किसी  $x, y \in \mathbf{N}$  के लिए,  $f(x) = f(y) \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$ .

$\therefore f$  एकैक है।

यहाँ,  $2 \in \mathbf{N}$ , लेकिन,  $\mathbf{N}$  में  $x$  का कोई ऐसा मान नहीं है कि  $f(x) = 2$  अर्थात्  $x^3 = 2$ .

$\therefore f$  आच्छादि नहीं है।

अतः, फलन  $f$  एकैक है परन्तु आच्छादि नहीं है।

(v)  $f(x) = x^3$  द्वारा प्रदत्त  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  फलन है।

माना, किसी  $x, y \in \mathbf{Z}$  के लिए,  $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$ .

$\therefore f$  एकैक है।

यहाँ,  $2 \in \mathbf{Z}$ , लेकिन,  $\mathbf{Z}$  में  $x$  का कोई ऐसा मान नहीं है कि  $f(x) = 2$  अर्थात्  $x^3 = 2$ .

$\therefore f$  आच्छादि नहीं है।

अतः, फलन  $f$  एकैक है परन्तु आच्छादि नहीं है।

### प्रश्न 3:

सिद्ध कीजिए कि  $f(x) = [x]$  द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ  $[x]$ ,  $x$  से कम या उसके बराबर महत्तम पूर्णांक को निरूपित करता है।

#### उत्तर 3:

दिया है:  $f(x) = [x]$  द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

यहाँ,  $f(1.2) = [1.2] = 1$  और  $f(1.9) = [1.9] = 1$ , इसलिए  $f(1.2) = f(1.9)$  लेकिन  $1.2 \neq 1.9$ .

$\therefore f$  एकैकी फलन है।

हम जानते हैं कि सभी दशमलव की संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं, जैसे  $0.7 \in \mathbf{R}$ .

यहाँ,  $0.7 \in \mathbf{R}$ , लेकिन,  $\mathbf{R}$  में  $x$  का कोई ऐसा मान नहीं है कि  $f(x) = 0.7$

अतः, महत्तम पूर्णांक फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

### प्रश्न 4:

सिद्ध कीजिए कि  $f(x) = |x|$  द्वारा प्रदत्त मापांक फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ  $|x|$  बराबर  $x$ , यदि  $x$  धन या शून्य है तथा  $|x|$  बराबर  $-x$  यदि  $x$  ऋण है।

#### उत्तर 4:

फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  को पुनः व्यवस्थित करने पर  $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{यदि } x \geq 0 \\ -x, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$

यहाँ,  $f(-1) = |-1| = 1$  और  $f(1) = |1| = 1$ , इसलिए  $f(-1) = f(1)$ , लेकिन  $-1 \neq 1$ .

$\therefore f$  एकैकी फलन नहीं है।

हम जानते हैं कि  $f(x) = |x|$  सदैव धनात्मक होता है।

यहाँ  $-1 \in \mathbf{R}$  के लिए,  $x$  का कोई मान नहीं है ताकि  $f(x) = |x| = -1$ .

$\therefore f$  आच्छादक नहीं है।

अतः, मापांक फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

**प्रश्न 5:**

सिद्ध कीजिए कि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x > 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ -1, & \text{यदि } x < 0, \end{cases}$  द्वारा प्रदत्त चिह्न फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

**उत्तर 5:**

दिया है:  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x > 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ -1, & \text{यदि } x < 0, \end{cases}$

यहाँ,  $1, 2 \in \mathbf{R}$  के लिए,  $f(1) = f(2) = 1$ , लेकिन  $1 \neq 2$ .

$\therefore f$  एकैकी फलन नहीं है।

जैसा कि दिया है, फलन  $f(x)$  में केवल 3 संख्याएँ (1, 0 या -1) ही हैं, इसलिए  $-2 \in \mathbf{R}$  के लिए,  $x$  का कोई भी मान ऐसा नहीं है ताकि  $f(x) = -2$  हो।  $\therefore f$  आच्छादक नहीं है।

अतः, चिह्न फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

**प्रश्न 6:**

मान लीजिए कि  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$  तथा  $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$   $A$  से  $B$  तक एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि  $f$  एकैकी है।

**उत्तर 6:**

दिया है:  $A = \{1, 2, 3\}$  और  $B = \{4, 5, 6, 7\}$ .

फलन  $f: A \rightarrow B$  इस प्रकार परिभाषित है कि  $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ .

$\therefore f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 6$

यहाँ  $A$  के प्रत्येक अवयव के लिए  $B$  में एक अद्वितीय अवयव है। अतः, फलन  $f$  एकैकी फलन है।

**प्रश्न 7:**

निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति में बतलाइए की क्या दिए हुए फलन एकैकी, आच्छादक अथवा एकैकी आच्छादि (bijective) हैं। अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

(i)  $f(x) = 3 - 4x$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  है। (ii)  $f(x) = 1 + x^2$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  है।

**उत्तर 7:**

(i) माना  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$  इसप्रकार हैं कि  $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow 3 - 4x_1 = 3 - 4x_2 \Rightarrow -4x_1 = -4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore f$  एकैकी फलन है।

यहाँ,  $\mathbf{R}$  में किसी वास्तविक संख्या ( $y$ ) के लिए,  $\frac{3-y}{4}$  का अस्तित्व  $\mathbf{R}$  में है, इसलिए  $f\left(\frac{3-y}{4}\right) = 3 - 4\left(\frac{3-y}{4}\right) = y$

$\therefore f$  आच्छादक है।

अतः,  $f$  एकैकी आच्छादि है।

(ii) माना  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$  इसप्रकार हैं कि  $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow 1 + x_1^2 = 1 + x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

इसप्रकार  $f(x_1) = f(x_2)$  है परन्तु यह अवश्य नहीं है कि  $x_1 = x_2$  भी होगा।

जैसे कि  $f(1) = f(-1) = 2$

$\therefore f$  एकैकी फलन नहीं है।

यहाँ,  $f(x) = 1 + x^2$  सदैव धनात्मक होगा यदि  $x \in \mathbf{R}$ , इसलिए

$\mathbf{R}$  में अवयव  $-2$  के लिए,  $x$  का कोई वास्तविक मान नहीं है ताकि  $f(x) = -2$  हो।

$\therefore f$  आच्छादक नहीं है।

अतः, फलन न तो एकैकी और न ही आच्छादक हैं।

**प्रश्न 8:**

मान लीजिए कि  $A$  तथा  $B$  दो समुच्चय हैं। सिद्ध कीजिए कि  $f: A \times B \rightarrow B \times A$ , इस प्रकार कि  $f(a, b) = (b, a)$  एक एकैकी आच्छादि (bijective) फलन है।

**उत्तर 8:**

दिया है:  $f: A \times B \rightarrow B \times A$  इसप्रकार है कि  $f(a, b) = (b, a)$ .

माना  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ , इसप्रकार है कि  $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$

$$\Rightarrow (b_1, a_1) = (b_2, a_2) \quad \Rightarrow b_1 = b_2 \text{ और } a_1 = a_2 \quad \Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$

$\therefore f$  एकैकी फलन है।

अब, माना  $(b, a) \in B \times A$  कोई अवयव है।

तब,  $(a, b) \in A \times B$  इसप्रकार है कि  $f(a, b) = (b, a)$  [फलन  $f$  की परिभाषा के अनुसार]

$\therefore f$  आच्छादक है।

अतः,  $f$  एकैकी आच्छादि फलन है।

**प्रश्न 9:**

मान लीजिए कि समस्त  $n \in \mathbf{N}$  के लिए,  $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ \frac{n}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$  द्वारा परिभाषित एक फलन  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  है। बतलाइए कि क्या फलन  $f$  एकैकी आच्छादि (bijective) है। अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

**उत्तर 9:**

दिया है:  $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ \frac{n}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$  समस्त  $n \in \mathbf{N}$  के लिए

यहाँ,  $f(1) = \frac{1+1}{2} = 1$  और  $f(2) = \frac{2}{2} = 1$  [  $f(n)$  की परिभाषा के अनुसार ]

इसप्रकार,  $f(1) = f(2)$  लेकिन  $1 \neq 2$

$\therefore f$  एकैकी फलन नहीं है।

माना  $n$ , सहस्रांत  $\mathbf{N}$  में कोई प्राकृत संख्या है।

स्थिति I: जब  $n$  एक विषम संख्या है।

$\therefore n = 2r + 1$ , कुछ  $r \in \mathbf{N}$  के लिए। तब,  $4r + 1 \in \mathbf{N}$  का अस्तित्व होगा ताकि  $f(4r + 1) = \frac{4r+1+1}{2} = 2r + 1$

स्थिति II: जब  $n$  एक सम संख्या है।

$\therefore n = 2r$ , कुछ  $r \in \mathbf{N}$  के लिए। तब  $4r \in \mathbf{N}$  का अस्तित्व होगा ताकि  $f(4r) = \frac{4r}{2} = 2r$ .

$\therefore f$  आच्छादक है।

अतः, फलन  $f$  एकैकी आच्छादि है।

**प्रश्न 10:**

मान लीजिए कि  $A = \mathbf{R} - \{3\}$  तथा  $B = \mathbf{R} - \{1\}$  हैं।  $f(x) = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: A \rightarrow B$  पर विचार कीजिए। क्या  $f$  एकैकी तथा आच्छादक है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

**उत्तर 10:**

$A = \mathbf{R} - \{3\}$ ,  $B = \mathbf{R} - \{1\}$  और  $f(x) = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: A \rightarrow B$

माना  $x, y \in A$  इस प्रकार है कि  $f(x) = f(y)$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{x-3} = \frac{y-2}{y-3}$$

$$\Rightarrow (x-2)(y-3) = (y-2)(x-3)$$

$$\Rightarrow xy - 3x - 2y + 6 = xy - 2x - 3y + 6$$

$$\Rightarrow -3x - 2y = -2x - 3y \Rightarrow x = y$$

∴  $f$  एकैकी फलन है।

माना  $y \in B = \mathbf{R} - \{1\}$ , तब  $y \neq 1$ .

फलन  $f$  आच्छादक होगा यदि  $x \in A$  के लिए,  $f(x) = y$ .

इसलिए,  $f(x) = y$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{x-3} = y$$

$$\Rightarrow x - 2 = xy - 3y$$

$$\Rightarrow x(1 - y) = -3y + 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{2-3y}{1-y} \in A \quad [y \neq 1]$$

यहाँ, किसी  $y \in B$  के लिए,  $\frac{2-3y}{1-y} \in A$  का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$f\left(\frac{2-3y}{1-y}\right) = \frac{\left(\frac{2-3y}{1-y}\right) - 2}{\left(\frac{2-3y}{1-y}\right) - 3} = \frac{2-3y-2+2y}{2-3y-3+3y} = \frac{-y}{-1} = y$$

∴  $f$  आच्छादक है।

अतः, फलन  $f$  एकैकी तथा आच्छादक है।

### प्रश्न 11:

मान लीजिए कि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^4$  द्वारा परिभाषित है। सही उत्तर का चयन कीजिए।

(A)  $f$  एकैकी आच्छादक है

(B)  $f$  बहुएक आच्छादक है

(C)  $f$  एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है

(D)  $f$  न तो एकैकी है और न आच्छादक है

#### उत्तर 11:

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^4$  द्वारा परिभाषित है।

माना  $x, y \in \mathbf{R}$  के लिए,  $f(x) = f(y)$ .

$$\Rightarrow x^4 = y^4 \quad \Rightarrow x = \pm y$$

∴  $f(x) = f(y)$  से हमें  $x = y$  प्राप्त नहीं होता है।

उदाहरण के लिए  $f(1) = f(-1) = 1$

∴  $f$  एकैकी फलन नहीं है।

माना, सहस्रांत  $\mathbf{R}$  में 2 कोई अवयव है।  $\mathbf{R}$  में  $x$  का ऐसा कोई मान नहीं है कि  $f(x) = 2$ .

∴  $f$  आच्छादक नहीं है।

अतः, फलन  $f$  न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

इसलिए, विकल्प (D) सही है।

### प्रश्न 12:

मान लीजिए कि  $f(x) = 3x$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  है। सही उत्तर चुनिए:

(A)  $f$  एकैकी आच्छादक है

(B)  $f$  बहुएक आच्छादक है

(C)  $f$  एकैकी है परंतु आच्छादक नहीं है

(D)  $f$  न तो एकैकी है और न आच्छादक है

#### उत्तर 12:

$f(x) = 3x$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  है।

माना  $x, y \in \mathbf{R}$  के लिए,  $f(x) = f(y)$ .

$$\Rightarrow 3x = 3y \quad \Rightarrow x = y$$

∴  $f$  एकैकी फलन है।

तथा सहस्रांत  $\mathbf{R}$  में किस वास्तविक संख्या  $(y)$  के लिए,  $\frac{y}{3}$  का अस्तित्व इसप्रकार है कि  $f\left(\frac{y}{3}\right) = 3\left(\frac{y}{3}\right) = y$

∴  $f$  आच्छादक है।

अतः, फलन  $f$  एकैकी आच्छादक है।

इसलिए, विकल्प (A) सही है।

# गणित

(पाठ - 1) (संबंध एवं फलन)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 1.3

## प्रश्न 1:

मान लीजिए कि  $f: \{1, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 5\}$  तथा  $g: \{1, 2, 5\} \rightarrow \{1, 3\}$ ,  $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$  तथा  $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$  द्वारा प्रदत्त हैं।  $g \circ f$  ज्ञात कीजिए।

### उत्तर 1:

दिया गया फलन  $f: \{1, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 5\}$  और  $g: \{1, 2, 5\} \rightarrow \{1, 3\}$ ,

$f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$  और  $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$ .

$g \circ f(1) = g[f(1)] = g(2) = 3$  [क्योंकि  $f(1) = 2$  और  $g(2) = 3$ ]

$g \circ f(3) = g[f(3)] = g(5) = 1$  [क्योंकि  $f(3) = 5$  और  $g(5) = 1$ ]

$g \circ f(4) = g[f(4)] = g(1) = 3$  [क्योंकि  $f(4) = 1$  और  $g(1) = 3$ ]

$\therefore g \circ f = \{(1, 3), (3, 1), (4, 3)\}$

## प्रश्न 2:

मान लीजिए  $f, g$  तथा  $h: \mathbf{R}$  से  $\mathbf{R}$  तक दिए फलन हैं। सिद्ध कीजिए कि

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$$

$$(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)$$

### उत्तर 2:

सिद्ध करना है कि  $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$

बायाँ पक्ष =  $[(f + g) \circ h](x)$

$$= (f + g)[h(x)] = f[h(x)] + g[h(x)]$$

$$= (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x)$$

$$= \{(f \circ h)(x) + (g \circ h)(x)\} = \text{दायाँ पक्ष}$$

$$\therefore \{(f + g) \circ h\}(x) = \{(f \circ h) + (g \circ h)\}(x) \text{ सभी } x \in \mathbf{R} \text{ के लिए}$$

अतः,  $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$

सिद्ध करना है कि  $(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)$

बायाँ पक्ष =  $[(f \cdot g) \circ h](x)$

$$= (f \cdot g)[h(x)] = f[h(x)] \cdot g[h(x)]$$

$$= (f \circ h)(x) \cdot (g \circ h)(x)$$

$$= \{(f \circ h) \cdot (g \circ h)\}(x) = \text{दायाँ पक्ष}$$

$$\therefore [(f \cdot g) \circ h](x) = \{(f \circ h) \cdot (g \circ h)\}(x)$$

सभी  $x \in \mathbf{R}$  के लिए

अतः,  $(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)$

## प्रश्न 3:

$g \circ f$  तथा  $f \circ g$  ज्ञात कीजिए, यदि

$$(i) f(x) = |x| \text{ तथा } g(x) = |5x - 2|$$

$$(ii) f(x) = 8x^3 \text{ तथा } g(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

### उत्तर 3:

$$(i). f(x) = |x| \text{ तथा } g(x) = |5x - 2|$$

$$\therefore g \circ f(x) = g(f(x)) = g(|x|) = |5|x| - 2|$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(|5x - 2|) = ||5x - 2|| = |5x - 2|$$

$$(ii). f(x) = 8x^3 \text{ और } g(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore g \circ f(x) = g(f(x)) = g(8x^3) = (8x^3)^{\frac{1}{3}} = 2x$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^{\frac{1}{3}}) = 8(x^{\frac{1}{3}})^3 = 8x$$

**प्रश्न 4:**

यदि  $f(x) = \frac{(4x+3)}{(6x-4)}$ ,  $x \neq \frac{2}{3}$ , तो सिद्ध कीजिए कि सभी  $x \neq \frac{2}{3}$  के लिए  $f \circ f(x) = x$  है।  $f$  का प्रतिलोम फलन क्या है?

**उत्तर 4:**

दिया है कि  $f(x) = \frac{(4x+3)}{(6x-4)}$ ,  $x \neq \frac{2}{3}$ , इसलिए

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{4x+3}{6x-4}\right) = \frac{4\left(\frac{4x+3}{6x-4}\right) + 3}{6\left(\frac{4x+3}{6x-4}\right) - 4} = \frac{16x + 12 + 18x - 12}{24x + 18 - 24x + 16} = \frac{34x}{34} = x$$

$\therefore f \circ f(x) = x$ , सभी  $x \neq \frac{2}{3}$  के लिए

$$\Rightarrow f \circ f = I_x$$

अतः, दिया गया फलन  $f$  व्युत्क्रमणीय है और फलन  $f$  का व्युत्क्रम स्वयं  $f$  ही है।

**प्रश्न 5:**

कारण सहित बतलाइए कि क्या निम्नलिखित फलनों के प्रतिलोम हैं:

- (i)  $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{10\}$  जहाँ  
 $f = \{(1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10)\}$   
 (ii)  $g: \{5, 6, 7, 8\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  जहाँ  
 $g = \{(5, 4), (6, 3), (7, 4), (8, 2)\}$   
 (iii)  $h: \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{7, 9, 11, 13\}$  जहाँ  
 $h = \{(2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$

**उत्तर 5:**

(i) दिया है कि  $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{10\}$  जहाँ  $f = \{(1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10)\}$   
 फलन  $f$  की परिभाषा से स्पष्ट है कि  $f$  एक बहुएक फलन है, क्योंकि  $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 10$   
 $\therefore f$  एकैकी नहीं है।

अतः, फलन  $f$  के प्रतिलोम का अस्तित्व नहीं है।

(ii) दिया है कि  $g: \{5, 6, 7, 8\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  जहाँ  $g = \{(5, 4), (6, 3), (7, 4), (8, 2)\}$   
 फलन  $g$  की परिभाषा से स्पष्ट है कि  $g$  एक बहुएक फलन है, क्योंकि

$$g(5) = g(7) = 4.$$

$\therefore g$  एकैकी नहीं है।

अतः, फलन  $g$  के प्रतिलोम का अस्तित्व नहीं है।

(iii) दिया है कि  $h: \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{7, 9, 11, 13\}$  जहाँ  $h = \{(2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$

यहाँ,  $h(2) = 7$ ,  $h(3) = 9$ ,  $h(4) = 11$  और  $h(5) = 13$  है, इसलिए

$\therefore h$  एकैकी है।

यहाँ, सहप्रान्त के सभी अवयवों, प्रान्त के अद्वितीय अवयव के प्रतिबिम्ब हैं, इसलिए,  $h$  आच्छादक है।

इसप्रकार,  $h$  एकैकी तथा आच्छादक है।

अतः,  $h$  के प्रतिलोम का अस्तित्व है।

**प्रश्न 6:**

सिद्ध कीजिए कि  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{(x+2)}$ , द्वारा प्रदत्त फलन एकैकी है। फलन  $f: [-1, 1] \rightarrow (f$  का परिसर), का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए।

(संकेत:  $y \in$  परिसर  $f$ , के लिए,  $[-1, 1]$  के किसी  $x$  के अंतर्गत  $y = f(x) = \frac{x}{(x+2)}$ , अर्थात्  $x = \frac{2y}{(1-y)}$ )

**उत्तर 6:**

$$\text{माना } f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{y}{y+2} \Rightarrow xy + 2x = xy + 2y \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$$

$\therefore f$  एकैकी है।

$$\text{माना } y = f(x) = \frac{x}{(x+2)}, \Rightarrow x = \frac{2y}{(1-y)} \quad \dots (1)$$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{2y}{(1-y)}$$

$$\text{माना } f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow \frac{2y_1}{(1-y_1)} = \frac{2y_2}{(1-y_2)} \Rightarrow 2y_1 - 2y_1y_2 = 2y_2 - 2y_1y_2 \Rightarrow 2y_1 = 2y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

$\therefore f$  आच्छादक है।

इसप्रकार,  $f$  एकैकी तथा आच्छादक है।

अतः,  $f$  के प्रतिलोम का अस्तित्व है।

$$\text{यहाँ, } y = f(x) = \frac{x}{(x+2)}, \Rightarrow x = \frac{2y}{(1-y)}$$

$$\text{माना, } g(y) = \frac{2y}{1-y}$$

कि  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, g(y) = \frac{2y}{1-y}, y \neq 1$ , द्वारा प्रदत्त फलन है।

अब,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{x+2}\right) = \frac{2\left(\frac{x}{x+2}\right)}{1 - \left(\frac{x}{x+2}\right)} = \frac{2x}{x+2-x} = \frac{2x}{2} = x$$

और

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{2y}{1-y}\right) = \frac{\frac{2y}{1-y}}{\frac{2y}{1-y} + 2} = \frac{2y}{2y + 2 - 2y} = \frac{2y}{2} = y$$

$\therefore g \circ f = x = I_{[-1,1]}$  और  $f \circ g = y = I_f$  का परिसर

$$\therefore f^{-1} = g \quad \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{2y}{1-y}, y \neq 1$$

### प्रश्न 7:

$f(x) = 4x + 3$  द्वारा प्रदत्त फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि  $f$  व्युत्क्रमणीय है।  $f$  का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए।

#### उत्तर 7:

$$\text{माना } f(x) = f(y) \Rightarrow 4x + 3 = 4y + 3 \Rightarrow 4x = 4y \Rightarrow x = y$$

$\therefore f$  एकैकी है।

यहाँ  $y \in \mathbf{R}$  के लिए, माना  $y = 4x + 3$

$$\Rightarrow x = \frac{y-3}{4} \in \mathbf{R}$$

इसप्रकार, किसी  $y \in \mathbf{R}$  के लिए,  $x = \frac{y-3}{4} \in \mathbf{R}$ , ताकि

$$f(x) = f\left(\frac{y-3}{4}\right) = 4\left(\frac{y-3}{4}\right) + 3 = y.$$

$\therefore f$  आच्छादक है।

इसप्रकार,  $f$  एकैकी तथा आच्छादक है, इसलिए  $f^{-1}$  का अस्तित्व है।

माना, फलन  $g(x) = \frac{y-3}{4}$ , जो  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित है।

यहाँ,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4x + 3) = \frac{(4x + 3) - 3}{4} = \frac{4x}{4} = x$$

और

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{y-3}{4}\right) = 4\left(\frac{y-3}{4}\right) + 3 = y - 3 + 3 = y$$

$\therefore g \circ f = f \circ g = I_{\mathbf{R}}$

अतः, फलन  $f$  व्युत्क्रमणीय है और इसका व्युत्क्रम  $f^{-1}(y) = g(y) = \frac{y-3}{4}$  है।

**प्रश्न 8:**

$f(x) = x^2 + 4$  द्वारा प्रदत्त फलन  $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow [4, \infty)$  पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि  $f$  व्युत्क्रमणीय है तथा  $f$  का प्रतिलोम  $f^{-1}$ ,  $f^{-1}(y) = \sqrt{y-4}$ , द्वारा प्राप्त होता है, जहाँ  $\mathbf{R}_+$  सभी ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

**उत्तर 8:**

$$\text{माना } f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 + 4 = y^2 + 4 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y \quad [\text{क्योंकि } x = y \in \mathbf{R}_+]$$

$\therefore f$  एकैकी है।

किसी  $y \in [4, \infty)$  के लिए, माना  $y = x^2 + 4$

$$\Rightarrow x^2 = y - 4 \geq 0 \quad [\text{क्योंकि } y \geq 4]$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{y-4} \geq 0$$

इसलिए, किसी  $y \in [4, \infty)$  के लिए,  $x = \sqrt{y-4} \in \mathbf{R}_+$  का अस्तित्व इसप्रकार है कि

$$f(x) = f(\sqrt{y-4}) = (\sqrt{y-4})^2 + 4 = y - 4 + 4 = y$$

$\therefore f$  आच्छादक है।

इसप्रकार,  $f$  एकैकी तथा आच्छादक है, इसलिए  $f^{-1}$  का अस्तित्व है।

माना, फलन  $g(x) = \sqrt{y-4}$ , जो  $g: [4, \infty) \rightarrow \mathbf{R}_+$  द्वारा परिभाषित है।

अब,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 4) = \sqrt{(x^2 + 4) - 4} = \sqrt{x^2} = x$$

और

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(\sqrt{y-4}) = (\sqrt{y-4})^2 + 4 = y - 4 + 4 = y$$

$$\therefore g \circ f = f \circ g = I_{\mathbf{R}}$$

अतः, फलन  $f$  व्युत्क्रमणीय है और इसका व्युत्क्रम  $f^{-1}(y) = g(y) = \sqrt{y-4}$  है।

**प्रश्न 9:**

$f(x) = 9x^2 + 6x - 5$  द्वारा प्रदत्त फलन  $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow [-5, \infty)$  पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि  $f$  व्युत्क्रमणीय है तथा

$$f^{-1}(y) = \left( \frac{(\sqrt{y+6})-1}{3} \right) \text{ है।}$$

**उत्तर 9:**

माना  $y$  अन्तराल  $[-5, \infty)$  में कोई अवयव है।

$$\text{माना } y = 9x^2 + 6x - 5$$

$$\Rightarrow y = (3x+1)^2 - 1 - 5 = (3x+1)^2 - 6 \Rightarrow y+6 = (3x+1)^2$$

$$\Rightarrow 3x+1 = \sqrt{y+6} \quad [\text{क्योंकि } y \geq -5 \Rightarrow y+6 > 0]$$

$$\Rightarrow x = \frac{(\sqrt{y+6})-1}{3}$$

$\therefore f$  आच्छादक है।

माना फलन  $g(y) = \frac{(\sqrt{y+6})-1}{3}$  जो  $g: [-5, \infty) \rightarrow \mathbf{R}_+$  द्वारा परिभाषित है। इसलिए

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(9x^2 + 6x - 5) = g((3x+1)^2 - 6)$$

$$= \sqrt{(3x+1)^2 - 6 + 6} - 1 = \frac{3x+1-1}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

और

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{\sqrt{y+6}-1}{3}\right) = \left[3\left(\frac{\sqrt{y+6}-1}{3}\right) + 1\right]^2 - 6 = (\sqrt{y+6})^2 - 6 = y + 6 - 6 = y$$

$$\therefore g \circ f = x = I_{\mathbf{R}} \text{ और } f \circ g = y = I_f \text{ का परिसर}$$

अतः, फलन  $f$  व्युत्क्रमणीय है और इसका व्युत्क्रम  $f^{-1}(y) = g(y) = \left( \frac{(\sqrt{y+6})-1}{3} \right)$  है।

**प्रश्न 10:**

मान लीजिए कि  $f: X \rightarrow Y$  एक व्युत्क्रमणीय फलन है। सिद्ध कीजिए कि  $f$  का प्रतिलोम फलन अद्वितीय है। (संकेत: कल्पना कीजिए कि  $f$  के दो प्रतिलोम फलन  $g_1$  तथा  $g_2$  हैं। तब सभी  $y \in Y$  के लिए  $f \circ g_1(y) = I_Y(y) = f \circ g_2(y)$  है। अब  $f$  के एकैकी गुण का प्रयोग कीजिए)

**उत्तर 10:**

फलन  $f: X \rightarrow Y$  एक व्युत्क्रमणीय फलन है।

माना, फलन  $f$  के दो प्रतिलोम फलन  $g_1$  तथा  $g_2$  हैं। इसलिए

$$\begin{aligned} \text{सभी } y \in Y \text{ के लिए, } f \circ g_1(y) = I_Y(y) = f \circ g_2(y) &\Rightarrow f(g_1(y)) = f(g_2(y)) \\ \Rightarrow g_1(y) = g_2(y) &\quad [\text{क्योंकि } f \text{ व्युत्क्रमणीय है} \Rightarrow f \text{ एकैकी है}] \\ \Rightarrow g_1 = g_2 &\quad [\text{क्योंकि } g \text{ एकैकी है}] \end{aligned}$$

अतः,  $f$  का प्रतिलोम फलन अद्वितीय है।

**प्रश्न 11:**

$f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ ,  $f(1) = a$ ,  $f(2) = b$  तथा  $f(3) = c$  द्वारा प्रदत्त फलन  $f$  पर विचार कीजिए।  $f^{-1}$  ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि  $(f^{-1})^{-1} = f$  है।

**उत्तर 11:**

यहाँ,  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ ,  $f(1) = a$ ,  $f(2) = b$  तथा  $f(3) = c$  द्वारा प्रदत्त फलन  $f$  है।

माना,  $g: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ ,  $g(a) = 1$ ,  $g(b) = 2$  तथा  $g(c) = 3$  द्वारा प्रदत्त कोई फलन  $g$  है।

इसलिए,

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(1) = a$$

$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(2) = b$$

$$(f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(3) = c$$

और

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = 1$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = 2$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(c) = 3$$

$\therefore g \circ f = I_X$  और  $f \circ g = I_Y$ , जहाँ,  $X = \{1, 2, 3\}$  और  $Y = \{a, b, c\}$  है। अतः,  $f$  के प्रतिलोम का अस्तित्व है और  $f^{-1} = g$  है।

$\therefore f^{-1}: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  इसप्रकार है कि  $f^{-1}(a) = 1$ ,  $f^{-1}(b) = 2$ ,  $f^{-1}(c) = 3$  है।

अब,  $f^{-1}$  प्राप्त करने के लिए, हम  $g$  का प्रतिलोम प्राप्त करेंगे।

माना  $h: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$  जो  $h(1) = a$ ,  $h(2) = b$ ,  $h(3) = c$  द्वारा परिभाषित है।

यहाँ,

$$(g \circ h)(1) = g(h(1)) = g(a) = 1$$

$$(g \circ h)(2) = g(h(2)) = g(b) = 2$$

$$(g \circ h)(3) = g(h(3)) = g(c) = 3$$

और

$$(h \circ g)(a) = h(g(a)) = h(1) = a$$

$$(h \circ g)(b) = h(g(b)) = h(2) = b$$

$$(h \circ g)(c) = h(g(c)) = h(3) = c$$

$\therefore g \circ h = I_X$  और  $h \circ g = I_Y$ , जहाँ,  $X = \{1, 2, 3\}$  और  $Y = \{a, b, c\}$  है।

अतः, फलन  $g$  व्युत्क्रमणीय है और इसका व्युत्क्रम  $g^{-1} = h \Rightarrow (f^{-1})^{-1} = h$  है। यहाँ,  $h = f$  भी है। अतः,  $(f^{-1})^{-1} = f$  है।

**प्रश्न 12:**

मान लीजिए कि  $f: X \rightarrow Y$  एक व्युत्क्रमणीय फलन है सिद्ध कीजिए कि  $f^{-1}$  का प्रतिलोम  $f$  है अर्थात  $(f^{-1})^{-1} = f$  है।

**उत्तर 12:**

माना  $f: X \rightarrow Y$  एक व्युत्क्रमणीय फलन है, इसलिए

एक फलन  $g: Y \rightarrow X$  का अस्तित्व कुछ इस प्रकार होगा कि  $g \circ f = I_X$  और  $f \circ g = I_Y$  हो।

यहाँ,  $f^{-1} = g$ , इसलिए  $g \circ f = I_X$  और  $f \circ g = I_Y \Rightarrow f^{-1} \circ f = I_X$  और  $f \circ f^{-1} = I_Y$

अतः, फलन  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  व्युत्क्रमणीय है और इसका व्युत्क्रम  $f^{-1} = f \Rightarrow (f^{-1})^{-1} = f$  है।

**प्रश्न 13:**

यदि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$ , द्वारा प्रदत्त फलन है, तो  $f \circ f(x)$  बराबर है:

- (A)  $\frac{1}{x^3}$  (B)  $x^3$  (C)  $x$  (D)  $(3 - x^3)$

**उत्तर 13:**

दिया है: फलन  $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$  जो  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित है।

$$\therefore f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left((3 - x^3)^{\frac{1}{3}}\right) = \left[3 - \left((3 - x^3)^{\frac{1}{3}}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= [3 - (3 - x^3)]^{\frac{1}{3}} = (x^3)^{\frac{1}{3}} = x$$

$$\therefore f \circ f(x) = x$$

अतः, विकल्प (C) सही है।

**प्रश्न 14:**

मान लीजिए कि  $f(x) = \frac{4x}{3x+4}$  द्वारा परिभाषित एक फलन  $f: \mathbf{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \rightarrow \mathbf{R}$  है।  $f$  का प्रतिलोम, अर्थात् प्रतिचित्र  $g: \text{परिसर } f \rightarrow \mathbf{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ , निम्नलिखित में से किसके द्वारा प्राप्त होगा:

- (A)  $g(y) = \frac{3y}{3-4y}$  (B)  $g(y) = \frac{4y}{4-3y}$   
(C)  $g(y) = \frac{4y}{3-4y}$  (D)  $g(y) = \frac{3y}{4-3y}$

**उत्तर 14:**

दिया है: फलन  $f(x) = \frac{4x}{3x+4}$  जो  $f: \mathbf{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \rightarrow \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित है।

माना  $y, f$  के परिसर में कोई अवयव है।

तब,  $x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$  कोई अवयव इसप्रकार है कि  $y = f(x)$  है।

$$\Rightarrow y = \frac{4x}{3x+4}$$

$$\Rightarrow 3xy + 4y = 4x$$

$$\Rightarrow x(4 - 3y) = 4y$$

$$\Rightarrow x = \frac{4y}{4-3y}$$

यहाँ, माना फलन  $g(y) = \frac{4y}{4-3y}$  जो  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$  द्वारा परिभाषित है।

अब,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{4x}{3x+4}\right) = \frac{4\left(\frac{4x}{3x+4}\right)}{4-3\left(\frac{4x}{3x+4}\right)} = \frac{16x}{12x+16-12x} = \frac{16x}{16} = x$$

और

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{4y}{4-3y}\right) = \frac{4\left(\frac{4y}{4-3y}\right)}{3\left(\frac{4y}{4-3y}\right)+4} = \frac{16y}{12y+16-12y} = \frac{16y}{16} = y$$

$\therefore g \circ f = I_{\mathbf{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}}$  और  $f \circ g = I_f$  का परिसर

इसप्रकार,  $f$  का प्रतिलोम  $g$  है अर्थात्  $f^{-1} = g$  है।

अतः,  $f$  का प्रतिलोम, अर्थात् प्रतिचित्र  $g: \text{परिसर } f \rightarrow \mathbf{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ , जहाँ  $g(y) = \frac{4y}{4-3y}$  है।

अतः, विकल्प (B) सही है।

# गणित

(पाठ - 1) (संबंध एवं फलन)

(कक्षा 12)

## प्रश्नावली 1.4

### प्रश्न 1:

निर्धारित कीजिए कि क्या निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित प्रत्येक संक्रिया \* से एक द्विआधारी संक्रिया प्राप्त होती है या नहीं। उस दशा में जब \* एक द्विआधारी संक्रिया नहीं है, औचित्य भी बतलाइए।

(i)  $\mathbb{Z}^+$  में,  $a * b = a - b$  द्वारा परिभाषित संक्रिया \*

(ii)  $\mathbb{Z}^+$  में,  $a * b = ab$  द्वारा परिभाषित संक्रिया \*

(iii)  $\mathbb{R}$  में, संक्रिया \*,  $a * b = ab^2$  द्वारा परिभाषित

(iv)  $\mathbb{Z}^+$  में, संक्रिया \*,  $a * b = |a - b|$  द्वारा परिभाषित

(v)  $\mathbb{Z}^+$  में, संक्रिया \*,  $a * b = a$  द्वारा परिभाषित

#### उत्तर 1:

(i)  $\mathbb{Z}^+$  में,  $a * b = a - b$  द्वारा परिभाषित संक्रिया \*

ये एक द्विआधारी संक्रिया नहीं है, क्योंकि  $(1, 2)$  के लिए संक्रिया \* से  $1 * 2 = 1 - 2 = -1 \notin \mathbb{Z}^+$ ।

(ii)  $\mathbb{Z}^+$  में,  $a * b = ab$  द्वारा परिभाषित संक्रिया \*

हम जानते हैं कि दो धनात्मक  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  का गुणनफल  $ab$  सदैव धनात्मक होगा और  $\mathbb{Z}^+$  में निहित होगा।

अर्थात् संक्रिया \* से प्रत्येक युग्म  $(a, b)$  के लिए  $\mathbb{Z}^+$  में  $a * b = ab$  है।

इसलिए, \* एक द्विआधारी संक्रिया है।

(iii)  $\mathbb{R}$  में, संक्रिया \*,  $a * b = ab^2$  द्वारा परिभाषित

हम जानते हैं कि दो वास्तविक संख्याओं  $a, b \in \mathbb{R}$  के लिए  $ab^2$  भी वास्तविक होगा अर्थात्  $ab^2 \in \mathbb{R}$ ।

अतः, संक्रिया \* से प्रत्येक युग्म  $(a, b)$  के लिए  $\mathbb{R}$  में  $a * b = ab^2$  है।

इसलिए, \* एक द्विआधारी संक्रिया है।

(iv)  $\mathbb{Z}^+$  में, संक्रिया \*,  $a * b = |a - b|$  द्वारा परिभाषित

हम जानते हैं कि दो धनात्मक  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  के लिए  $|a - b|$  सदैव धनात्मक होगा और  $\mathbb{Z}^+$  में निहित होगा।

अर्थात् संक्रिया \* से प्रत्येक युग्म  $(a, b)$  के लिए  $\mathbb{Z}^+$  में  $a * b = |a - b|$  है।

इसलिए, \* एक द्विआधारी संक्रिया है।

(v)  $\mathbb{Z}^+$  में, संक्रिया \*,  $a * b = a$  द्वारा परिभाषित

हम जानते हैं कि दो धनात्मक  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  के लिए  $a$  सदैव धनात्मक होगा और  $\mathbb{Z}^+$  में निहित होगा।

अर्थात् संक्रिया \* से प्रत्येक युग्म  $(a, b)$  के लिए  $\mathbb{Z}^+$  में  $a * b = a$  है।

इसलिए, \* एक द्विआधारी संक्रिया है।

### प्रश्न 2:

निम्नलिखित परिभाषित प्रत्येक द्विआधारी संक्रिया \* के लिए निर्धारित कीजिए कि क्या \* द्विआधारी क्रमविनिमय है तथा क्या \* साहचर्य है।

(i)  $\mathbb{Z}$  में,  $a * b = a - b$  द्वारा परिभाषित

(ii)  $\mathbb{Q}$  में,  $a * b = ab + 1$  द्वारा परिभाषित

(iii)  $\mathbb{Q}$  में,  $a * b = \frac{ab}{2}$  द्वारा परिभाषित

(iv)  $\mathbb{Z}^+$  में,  $a * b = 2^{ab}$  द्वारा परिभाषित

(v)  $\mathbb{Z}^+$  में,  $a * b = a^b$  द्वारा परिभाषित

(vi)  $\mathbb{R} - \{-1\}$  में,  $a * b = \frac{a}{b+1}$  द्वारा परिभाषित

#### उत्तर 2:

(i)  $\mathbb{Z}$  में,  $a * b = a - b$  द्वारा परिभाषित

यहाँ,  $1 * 2 = 1 - 2 = -1$  और  $2 * 1 = 2 - 1 = 1$ ।

$\therefore 1 * 2 \neq 2 * 1$ , जहाँ  $1, 2 \in \mathbb{Z}$ । अतः, द्विआधारी संक्रिया \* क्रमविनिमय नहीं है।

और अब  $(1 * 2) * 3 = (1 - 2) * 3 = -1 * 3 = -1 - 3 = -4$

तथा  $1 * (2 * 3) = 1 * (2 - 3) = 1 * -1 = 1 - (-1) = 2$

$\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$ , जहाँ  $1, 2, 3 \in \mathbb{Z}$  अतः, द्विआधारी संक्रिया \* साहचर्य नहीं है।

(ii)  $\mathbb{Q}$  में,  $a * b = ab + 1$  द्वारा परिभाषित

हम जानते हैं कि  $ab = ba$  सभी  $a, b \in \mathbb{Q}$  के लिए

$\Rightarrow ab + 1 = ba + 1$  for all  $a, b \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow a * b = a * b$  for all  $a, b \in \mathbb{Q}$

अतः, द्विआधारी संक्रिया \* क्रमविनिमय है।

यहाँ,  $(1 * 2) * 3 = (1 \times 2 + 1) * 3 = 3 * 3 = 3 \times 3 + 1 = 10$

तथा  $1 * (2 * 3) = 1 * (2 \times 3 + 1) = 1 * 7 = 1 \times 7 + 1 = 8$

$\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$ , जहाँ  $1, 2, 3 \in \mathbf{Q}$ , अतः, द्विआधारी संक्रिया \* साहचर्य नहीं है।

(iii)  $\mathbf{Q}$  में,  $a * b = \frac{ab}{2}$  द्वारा परिभाषित

हम जानते हैं कि  $ab = ba$  सभी  $a, b \in \mathbf{Q}$  के लिए  $\Rightarrow \frac{ab}{2} = \frac{ba}{2}$  सभी  $a, b \in \mathbf{Q}$  के लिए

$\Rightarrow a * b = b * a$  सभी  $a, b \in \mathbf{Q}$  के लिए, अतः, द्विआधारी संक्रिया \* क्रमविनिमय है।

सभी  $a, b, c \in \mathbf{Q}$  के लिए,

$$(a * b) * c = \left(\frac{ab}{2}\right) * c = \frac{\left(\frac{ab}{2}\right)c}{2} = \frac{abc}{4}$$

और

$$a * (b * c) = a * \left(\frac{bc}{2}\right) = \frac{a\left(\frac{bc}{2}\right)}{2} = \frac{abc}{4}$$

$\therefore (a * b) * c = a * (b * c)$ , जहाँ  $a, b, c \in \mathbf{Q}$ , अतः, द्विआधारी संक्रिया \* साहचर्य है।

(iv)  $\mathbf{Z}^+$  में,  $a * b = 2^{ab}$  द्वारा परिभाषित

हम जानते हैं कि  $ab = ba$  सभी  $a, b \in \mathbf{Z}^+$  के लिए,  $\Rightarrow 2^{ab} = 2^{ba}$  सभी  $a, b \in \mathbf{Z}^+$  के लिए

$\Rightarrow a * b = b * a$  सभी  $a, b \in \mathbf{Z}^+$  के लिए, अतः, द्विआधारी संक्रिया \* क्रमविनिमय है।

यहाँ,  $(1 * 2) * 3 = 2^{1 \times 2} * 3 = 4 * 3 = 2^{4 \times 3} = 2^{12}$

और  $1 * (2 * 3) = 1 * 2^{2 \times 3} = 1 * 2^6 = 1 * 64 = 2^{1 \times 64} = 2^{64}$

$\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$ , जहाँ  $1, 2, 3 \in \mathbf{Z}^+$ , अतः, द्विआधारी संक्रिया \* साहचर्य नहीं है।

(v)  $\mathbf{Z}^+$  में,  $a * b = a^b$  द्वारा परिभाषित

यहाँ,  $1 * 2 = 1^2 = 1$  और  $2 * 1 = 2^1 = 2$

$\therefore 1 * 2 \neq 2 * 1$ , जहाँ  $1, 2 \in \mathbf{Z}^+$ , अतः, द्विआधारी संक्रिया \* क्रमविनिमय नहीं है।

अब,  $(2 * 3) * 4 = 2^3 * 4 = 8 * 4 = 8^4 = 2^{12}$  और  $2 * (3 * 4) = 2 * 3^4 = 2 * 81 = 2^{81}$

$\therefore (2 * 3) * 4 \neq 2 * (3 * 4)$ , जहाँ  $2, 3, 4 \in \mathbf{Z}^+$ ,

अतः, द्विआधारी संक्रिया \* साहचर्य नहीं है।

(vi)  $\mathbf{R} - \{-1\}$  में,  $a * b = \frac{a}{b+1}$  द्वारा परिभाषित

यहाँ,  $1 * 2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$  और  $2 * 1 = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

$\therefore 1 * 2 \neq 2 * 1$ , जहाँ  $1, 2 \in \mathbf{R} - \{-1\}$ , अतः, द्विआधारी संक्रिया \* क्रमविनिमय नहीं है।

अब,

$$(1 * 2) * 3 = \frac{1}{2+1} * 3 = \frac{1}{3} * 3 = \frac{\frac{1}{3}}{3+1} = \frac{1}{12}$$

और

$$1 * (2 * 3) = 1 * \frac{2}{3+1} = 1 * \frac{2}{4} = 1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$ , जहाँ  $1, 2, 3 \in \mathbf{R} - \{-1\}$ , अतः, द्विआधारी संक्रिया \* साहचर्य नहीं है।

### प्रश्न 3:

समुच्चय  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  में  $a \wedge b =$  निम्नतम  $\{a, b\}$  द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया पर विचार कीजिए। संक्रिया  $\wedge$  के लिए संक्रिया सरणी लिखिए।

### उत्तर 3:

दिया है: समुच्चय  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  में  $a \wedge b =$  निम्नतम  $\{a, b\}$  द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया है।

इसलिए, संक्रिया  $\wedge$  के लिए संक्रिया सरणी निम्नलिखित है:

| $\wedge$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|---|---|---|---|---|
| 1        | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2        | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3        | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 4        | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 5        | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

#### प्रश्न 4:

समुच्चय  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  में, निम्नलिखित संक्रिया सरणी द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया  $*$  पर विचार कीजिए तथा

(i)  $(2 * 3) * 4$  तथा  $2 * (3 * 4)$  का परिकलन कीजिए (ii) क्या  $*$  क्रमविनिमय है?

(iii)  $(2 * 3) * (4 * 5)$  का परिकलन कीजिए। (संकेत: निम्न सरणी का प्रयोग कीजिए।)

| $*$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|---|---|---|---|---|
| 1   | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2   | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3   | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 4   | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 |
| 5   | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |

#### उत्तर 4:

(i)  $(2 * 3) * 4 = 1 * 4 = 1$

और

$2 * (3 * 4) = 2 * 1 = 1$

(ii) सरणी में प्रत्येक  $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  के लिए,  $a * b = b * a$  है, अतः, द्विआधारी संक्रिया  $*$  क्रमविनिमय नहीं है।

(iii)  $(2 * 3) = 1$  और  $(4 * 5) = 1$ ,

$\therefore (2 * 3) * (4 * 5) = 1 * 1 = 1$

#### प्रश्न 5:

मान लीजिए कि समुच्चय  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  में एक द्विआधारी संक्रिया  $*$ ,  $a * b = a$  और  $b$  का H.C.F. द्वारा परिभाषित है। क्या संक्रिया  $*$  उपर्युक्त प्रश्न 4 में परिभाषित संक्रिया  $*$  के समान है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

#### उत्तर 5:

दिया है: समुच्चय  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  में एक द्विआधारी संक्रिया  $*$ ,  $a * b = a$  और  $b$  का H.C.F. द्वारा परिभाषित है।

इसलिए, संक्रिया  $*$  के लिए संक्रिया सरणी निम्नलिखित है:

| $*$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|---|---|---|---|---|
| 1   | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2   | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3   | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 4   | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 |
| 5   | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |

उपरोक्त संक्रिया सारणी से यह स्पष्ट है कि संक्रिया  $*$  और संक्रिया  $*$  दोनों का समान हैं।

अतः, संक्रिया  $*$  और संक्रिया  $*$  एक ही हैं।

#### प्रश्न 6:

मान लीजिए कि  $N$  में एक द्विआधारी संक्रिया  $*$ ,  $a * b = a$  तथा  $b$  का L.C.M. द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i)  $5 * 7, 20 * 16$

(ii) क्या संक्रिया  $*$  क्रमविनिमय है?

(iii) क्या  $*$  साहचर्य है?

(iv)  $N$  में  $*$  का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए

(v)  $N$  के कौन से अवयव  $*$  के लिए व्युत्क्रमणीय हैं?

#### उत्तर 6:

दिया है:  $N$  में एक द्विआधारी संक्रिया  $*$ ,  $a * b = a$  तथा  $b$  का L.C.M. द्वारा परिभाषित है।

(i)  $5 * 7 = 5$  और  $7$  का L.C.M. = 35, तथा  $20 * 16 = 20$  और  $16$  का L.C.M. = 80

(ii) हम जानते हैं कि  $a$  और  $b$  का L.C.M. =  $b$  और  $a$  का L.C.M., सभी  $a, b \in \mathbf{N}$  के लिए।

$$\therefore a * b = b * a$$

अतः, संक्रिया  $*$  क्रमविनिमय है।

(iii) सभी  $a, b, c \in \mathbf{N}$  के लिए,  $(a * b) * c = (a \text{ और } b \text{ का L.C.M.}) * c = a, b \text{ और } c \text{ का L.C.M.}$

$$a * (b * c) = a * (\text{LCM of } b \text{ और } c) = a, b \text{ और } c \text{ का L.C.M.}$$

$$\therefore (a * b) * c = a * (b * c)$$

अतः, संक्रिया  $*$  साहचर्य है।

(iv) हम जानते हैं कि  $a$  और 1 का L.C.M. =  $a = 1$  और  $a$  का L.C.M., सभी  $a \in \mathbf{N}$  के लिए

$$\Rightarrow a * 1 = a = 1 * a, \text{ सभी } a \in \mathbf{N} \text{ के लिए}$$

अतः, 1,  $\mathbf{N}$  में  $*$  का तत्समक अवयव है।

(v) यदि  $\mathbf{N}$  का कोई अवयव  $a, *$  के लिए व्युत्क्रमणीय है तो  $\mathbf{N}$  में एक अवयव  $b$  अवश्य होगा ताकि

$$a * b = e = b * a. \text{ यहाँ, } e = 1$$

अर्थात्  $a$  और  $b$  का L.C.M. = 1 =  $b$  और  $a$  का L.C.M., यह तभी संभव है यदि  $a$  और  $b$  दोनों समान हों और 1 के बराबर हों।

अतः, केवल अवयव 1 ही  $\mathbf{N}$  में  $*$  के लिए व्युत्क्रमणीय है।

### प्रश्न 7:

क्या समुच्चय  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  में  $a * b = a$  तथा  $b$  का L.C.M. द्वारा परिभाषित  $*$  एक द्विआधारी संक्रिया है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

#### उत्तर 7:

दिया है: समुच्चय  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  में  $a * b = a$  तथा  $b$  का L.C.M. द्वारा परिभाषित  $*$  एक संक्रिया है।

इसलिए, संक्रिया  $*$  के लिए संक्रिया सरणी निम्नलिखित है:

| * | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---|---|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  |
| 2 | 2 | 2  | 6  | 4  | 10 |
| 3 | 3 | 6  | 3  | 12 | 15 |
| 4 | 4 | 4  | 12 | 4  | 20 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 5  |

उपरोक्त सरणी से यह स्पष्ट है कि

$$3 * 2 = 2 * 3 = 6 \notin A,$$

$$5 * 2 = 2 * 5 = 10 \notin A,$$

$$3 * 4 = 4 * 3 = 12 \notin A,$$

$$3 * 5 = 5 * 3 = 15 \notin A,$$

$$4 * 5 = 5 * 4 = 20 \notin A$$

अतः, समुच्चय  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  में  $a * b = a$  तथा  $b$  का L.C.M. द्वारा परिभाषित संक्रिया  $*$  एक द्विआधारी संक्रिया नहीं है।

### प्रश्न 8:

मान लीजिए कि  $\mathbf{N}$  में  $*$ ,  $a * b = a$  तथा  $b$  का H.C.F. द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया है। क्या  $*$  क्रमविनिमय है? क्या  $*$  साहचर्य है? क्या  $\mathbf{N}$  में इस द्विआधारी संक्रिया के तत्समक का अस्तित्व है?

#### उत्तर 8:

दिया है:  $\mathbf{N}$  में  $*$ ,  $a * b = a$  तथा  $b$  का H.C.F. द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया है।

हम जानते हैं कि  $a$  और  $b$  का H.C.F. =  $b$  और  $a$  का H.C.F., सभी  $a, b \in \mathbf{N}$  के लिए

$$\therefore a * b = b * a, \text{ अतः, संक्रिया } * \text{ क्रमविनिमय है।}$$

सभी  $a, b, c \in \mathbf{N}$  के लिए,  $(a * b) * c = (a \text{ और } b \text{ का H.C.F.}) * c = a, b \text{ और } c \text{ का H.C.F.}$

$$\text{तथा } a * (b * c) = a * (b \text{ और } c \text{ का H.C.F.}) = a, b \text{ और } c \text{ का H.C.F.}$$

$$\therefore (a * b) * c = a * (b * c), \text{ अतः, संक्रिया } * \text{ साहचर्य है।}$$

अब, कोई अवयव  $e \in \mathbf{N}$ , संक्रिया  $*$  में तत्समक होगा यदि  $a * e = a = e * a$ , सभी  $a \in \mathbf{N}$  के लिए

लेकिन ये संबंध किसी भी  $a \in \mathbf{N}$  के लिए सत्य नहीं है।

अतः,  $\mathbf{N}$  में इस द्विआधारी संक्रिया  $*$  के तत्समक का अस्तित्व नहीं है।

### प्रश्न 9:

मान लीजिए कि परिमेय संख्याओं के समुच्चय  $\mathbf{Q}$  में निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित \* एक द्विआधारी संक्रिया है:

(i)  $a * b = a - b$

(ii)  $a * b = a^2 + b^2$

(iii)  $a * b = a + ab$

(iv)  $a * b = (a - b)^2$

(v)  $a * b = \frac{ab}{4}$

(vi)  $a * b = ab^2$

ज्ञात कीजिए कि इनमें से कौन सी संक्रियाएँ क्रमविनिमय हैं और कौन सी साहचर्य हैं।

### उत्तर 9:

(i)  $\mathbf{Q}$  में, संक्रिया \*,  $a * b = a - b$  से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है, इसलिए

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

और

$$\frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$\therefore \frac{1}{2} * \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3} * \frac{1}{2}, \text{ जहाँ } \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \mathbf{Q}$$

अतः, संक्रिया \* क्रमविनिमय नहीं है।

यह स्पष्ट है कि

$$\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} = \left(\frac{3-2}{6}\right) * \frac{1}{4} = \frac{1}{6} * \frac{1}{4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2-3}{12} = -\frac{1}{12}$$

और

$$\frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} * \left(\frac{4-3}{12}\right) = \frac{1}{2} * \frac{1}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{6-1}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right), \text{ जहाँ } \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \in \mathbf{Q}$$

अतः, संक्रिया \* साहचर्य नहीं है।

(ii)  $\mathbf{Q}$  में, संक्रिया \*,  $a * b = a^2 + b^2$  से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है, इसलिए

सभी  $a, b \in \mathbf{Q}$  के लिए,  $a * b = a^2 + b^2 = b^2 + a^2 = b * a$ ,  $\therefore a * b = b * a$ , अतः, संक्रिया \* क्रमविनिमय है।

$$\text{अब } (1 * 2) * 3 = (1^2 + 2^2) * 3 = (1 + 4) * 3 = 5 * 3 = 5^2 + 3^2 = 34$$

$$\text{और } 1 * (2 * 3) = 1 * (2^2 + 3^2) = 1 * (4 + 9) = 1 * 13 = 1^2 + 13^2 = 170$$

$$\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3), \text{ जहाँ } 1, 2, 3 \in \mathbf{Q}, \text{ अतः, संक्रिया * साहचर्य नहीं है।}$$

(iii)  $\mathbf{Q}$  में, संक्रिया \*,  $a * b = a + ab$  से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है, इसलिए

$$\text{यहाँ, } 1 * 2 = 1 + 1 \times 2 = 1 + 2 = 3 \quad \text{और} \quad 2 * 1 = 2 + 2 \times 1 = 2 + 2 = 4$$

$$\therefore 1 * 2 \neq 2 * 1, \text{ जहाँ } 1, 2 \in \mathbf{Q}, \text{ अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय नहीं है।}$$

$$\text{अब, } (1 * 2) * 3 = (1 + 1 \times 2) * 3 = (1 + 2) * 3 = 3 * 3 = 3 + 3 \times 3 = 3 + 9 = 12$$

$$\text{और } 1 * (2 * 3) = 1 * (2 + 2 \times 3) = 1 * (2 + 6) = 1 * 8 = 1 + 1 \times 8 = 1 + 8 = 9$$

$$\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3), \text{ जहाँ } 1, 2, 3 \in \mathbf{Q},$$

अतः, संक्रिया \* साहचर्य नहीं है।

(iv)  $\mathbf{Q}$  में, संक्रिया \*,  $a * b = (a - b)^2$  से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है, इसलिए

$$\text{सभी } a, b \in \mathbf{Q} \text{ के लिए, } a * b = (a - b)^2 \text{ तथा } b * a = (b - a)^2 = [-(a - b)]^2 = (a - b)^2$$

$$\therefore a * b = b * a, \text{ अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय है।}$$

$$\text{यहाँ } (1 * 2) * 3 = (1 - 2)^2 * 3 = (-1)^2 * 3 = 1 * 3 = (1 - 3)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$\text{और } 1 * (2 * 3) = 1 * (2 - 3)^2 = 1 * (-1)^2 = 1 * 1 = (1 - 1)^2 = 0$$

$$\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3), \text{ जहाँ } 1, 2, 3 \in \mathbf{Q}$$

अतः, संक्रिया \* साहचर्य नहीं है।

(v)  $\mathbf{Q}$  में, संक्रिया  $*$ ,  $a * b = \frac{ab}{4}$  से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है, इसलिए

सभी  $a, b \in \mathbf{Q}$  के लिए,  $a * b = \frac{ab}{4} = \frac{ba}{4} = b * a$

$\therefore a * b = b * a$

अतः, संक्रिया  $*$  क्रमविनिमय है।

अवयवों  $a, b, c \in \mathbf{Q}$  के लिए,

$$(a * b) * c = \left(\frac{ab}{4}\right) * c = \frac{\left(\frac{ab}{4}\right) \cdot c}{4} = \frac{abc}{16}$$

और

$$a * (b * c) = a * \left(\frac{bc}{4}\right) = \frac{a \cdot \left(\frac{bc}{4}\right)}{4} = \frac{abc}{16}$$

$\therefore (a * b) * c = a * (b * c)$ , जहाँ  $a, b, c \in \mathbf{Q}$

अतः, संक्रिया  $*$  साहचर्य है।

(vi)  $\mathbf{Q}$  में, संक्रिया  $*$ ,  $a * b = ab^2$  से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है,

यहाँ

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

और

$$\frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$\therefore \frac{1}{2} * \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3} * \frac{1}{2}$ , जहाँ  $\frac{1}{2}$  और  $\frac{1}{3} \in \mathbf{Q}$

अतः, संक्रिया  $*$  क्रमविनिमय नहीं है।

अब

$$\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] * \frac{1}{4} = \frac{1}{18} * \frac{1}{4} = \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{18 \times 16} = \frac{1}{288}$$

और

$$\frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} * \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = \frac{1}{2} * \frac{1}{48} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{48}\right)^2 = \frac{1}{2 \times 2304} = \frac{1}{4608}$$

$\therefore \left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right)$ , जहाँ  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \in \mathbf{Q}$

अतः, संक्रिया  $*$  साहचर्य नहीं है।

अतः, (ii), (iv), (v) में परिभाषित संक्रियाएँ क्रमविनिमय हैं और (v) में परिभाषित संक्रिया साहचर्य है।

### प्रश्न 10:

प्रश्न 9 में दी गई संक्रियाओं में किसी का तत्समक है, वह बताइए।

#### उत्तर 10:

कोई अवयव  $e \in \mathbf{Q}$ , संक्रिया  $*$  में एक तत्समक अवयव होता है यदि,  $a * e = a = e * a$ , सभी  $a \in \mathbf{Q}$  के लिए परन्तु ऊपर दी गई सभी संक्रियाओं के लिए, अवयव  $e \in \mathbf{Q}$  का अस्तित्व नहीं है जो तत्समक की स्थिति को संतुष्ट कर सके।

अतः, ऊपर दी है किसी भी संक्रिया में तत्समक नहीं है।

### प्रश्न 11:

मान लीजिए कि  $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$  है तथा  $A$  में  $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$  द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है। सिद्ध कीजिए कि  $*$  क्रमविनिमय तथा साहचर्य है।  $A$  में  $*$  का तत्समक अवयव, यदि कोई है, तो ज्ञात कीजिए।

### उत्तर 11:

दिया है:  $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$  है तथा  $A$  में  $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$  द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है।

माना  $(a, b), (c, d) \in A$  जहाँ  $a, b, c, d \in \mathbf{N}$ , इसलिए  $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$

तथा  $(c, d) * (a, b) = (c + a, d + b) = (a + c, b + d)$  [प्राकृत संख्याओं का योग क्रमविनिमय होता है]

$\therefore (a, b) * (c, d) = (c, d) * (a, b)$

अतः, संक्रिया \* क्रमविनिमय है।

अब, माना  $(a, b), (c, d), (e, f) \in A$  जहाँ  $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{N}$

$[(a, b) * (c, d)] * (e, f) = (a + c, b + d) * (e, f) = (a + c + e, b + d + f)$

और  $(a, b) * [(c, d) * (e, f)] = (a, b) * (c + e, d + f) = (a + c + e, b + d + f)$

$\therefore [(a, b) * (c, d)] * (e, f) = (a, b) * [(c, d) * (e, f)]$

अतः, संक्रिया \* साहचर्य है।

माना कोई अवयव  $e = (e_1, e_2) \in A$  संक्रिया \* में तत्समक अवयव है, इसलिए

$a * e = a = e * a$  सभी  $a = (a_1, a_2) \in A$  के लिए अर्थात्  $(a_1 + e_1, a_2 + e_2) = (a_1, a_2) = (e_1 + a_1, e_2 + a_2)$

$\Rightarrow a_1 + e_1 = a_1 \Rightarrow e_1 = 0 \notin \mathbf{N}$  तथा  $a_2 + e_2 = a_2 \Rightarrow e_2 = 0 \notin \mathbf{N}$

जो  $A$  के किसी भी अवयव के लिए सत्य नहीं है क्योंकि  $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$  और 0 प्राकृत संख्या नहीं होती है।

इसलिए, संक्रिया \* में कोई तत्समक अवयव नहीं है।

### प्रश्न 12:

बतलाइए कि क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य हैं। औचित्य भी बताइए।

(i) समुच्चय  $\mathbf{N}$  में किसी भी स्वेच्छ द्विआधारी संक्रिया \* के लिए  $a * a = a, \forall a \in \mathbf{N}$

(ii) यदि  $\mathbf{N}$  में \* एक क्रमविनिमय द्विआधारी संक्रिया है, तो  $a * (b * c) = (c * b) * a$

### उत्तर 12:

(i) माना संक्रिया \*,  $\mathbf{N}$  में इस प्रकार परिभाषित है कि  $a * b = a + b \forall a, b \in \mathbf{N}$

तब, यदि  $b = a = 3$  हो तो, संक्रिया से  $3 * 3 = 3 + 3 = 6 \neq 3$ , अतः, कथन (i) असत्य है।

(ii) R.H.S. =  $(c * b) * a$

=  $(b * c) * a$  [क्योंकि संक्रिया \* क्रमविनिमय है]

=  $a * (b * c) = \text{L.H.S.}$  [क्योंकि संक्रिया \* क्रमविनिमय है]

$\therefore a * (b * c) = (c * b) * a$ , अतः, कथन (ii) सत्य है।

### प्रश्न 13:

$a * b = a^3 + b^3$  प्रकार से परिभाषित  $\mathbf{N}$  में एक द्विआधारी संक्रिया \* पर विचार कीजिए। अब निम्नलिखित में से सही उत्तर का चयन कीजिए

(A) \* साहचर्य तथा क्रमविनिमय दोनों है

(B) \* क्रमविनिमय है किन्तु साहचर्य नहीं है

(C) \* साहचर्य है किन्तु क्रमविनिमय नहीं है

(D) \* न तो क्रमविनिमय है और न साहचर्य है

### उत्तर 13:

अवयव  $a, b, \in \mathbf{N}$  के लिए,

$a * b = a^3 + b^3 = b^3 + a^3 = b * a$  [प्राकृत संख्याओं का योग क्रमविनिमय होता है]

अतः, संक्रिया \* क्रमविनिमय है।

यहाँ,  $(1 * 2) * 3 = (1^3 + 2^3) * 3 = (1 + 8) * 3 = 9 * 3 = 9^3 + 3^3 = 729 + 27 = 756$

और  $1 * (2 * 3) = 1 * (2^3 + 3^3) = 1 * (8 + 27) = 1 * 35 = 1^3 + 35^3 = 1 + 42875 = 42876$

$\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$ , जहाँ  $1, 2, 3 \in \mathbf{N}$

इसलिए, संक्रिया \* साहचर्य नहीं है।

अतः, संक्रिया \* क्रमविनिमय है किन्तु साहचर्य नहीं है।

इसलिए विकल्प (B) सही है।

# गणित

(पाठ - 1) (संबंध एवं फलन)

(कक्षा 12)

## विविध प्रश्नावली 1

### प्रश्न 1:

मान लीजिए कि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 10x + 7$  द्वारा परिभाषित फलन है। एक ऐसा फलन  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ज्ञात कीजिए जिसके लिए  $g \circ f = f \circ g = I_{\mathbf{R}}$  हो।

#### उत्तर 1:

दिया है:  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 10x + 7$  द्वारा परिभाषित फलन है।

माना  $f(x) = f(y)$ , जहाँ  $x, y \in \mathbf{R}$ .  $\Rightarrow 10x + 7 = 10y + 7 \Rightarrow x = y$

$\therefore$  फलन  $f$  एकैकी है।

सभी  $y \in \mathbf{R}$  के लिए, माना  $y = 10x + 7 \Rightarrow x = \frac{y-7}{10} \in \mathbf{R}$

इसलिए, प्रत्येक  $y \in \mathbf{R}$ ,  $x = \frac{y-7}{10} \in \mathbf{R}$  का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$f(x) = f\left(\frac{y-7}{10}\right) = 10\left(\frac{y-7}{10}\right) + 7 = y - 7 + 7 = y$$

$\therefore$  फलन  $f$  आच्छादक है।

इसप्रकार, फलन  $f$  एकैकी तथा आच्छादक है। अतः, फलन  $f$  व्युत्क्रमणीय है।

अब, माना  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  इस प्रकार है कि  $g(y) = \frac{y-7}{10}$ , इसलिए

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(10x + 7) = \frac{(10x + 7) - 7}{10} = \frac{10x}{10} = x$$

और

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{y-7}{10}\right) = 10\left(\frac{y-7}{10}\right) + 7 = y - 7 + 7 = y$$

$\therefore g \circ f = I_{\mathbf{R}}$  तथा  $f \circ g = I_{\mathbf{R}}$ .

अतः, अभीष्ट फलन  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(y) = \frac{y-7}{10}$  से परिभाषित है।

### प्रश्न 2:

मान लीजिए कि  $f: \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$ ,  $f(n) = n - 1$ , यदि  $n$  विषम है तथा  $f(n) = n + 1$ , यदि  $n$  सम है, द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि  $f$  व्युत्क्रमणीय है।  $f$  का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए। यहाँ  $\mathbf{W}$  समस्त पूर्णाकों का समुच्चय है।

#### उत्तर 2:

दिया है:

फलन  $f: \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$ ,  $f(n) = \begin{cases} n - 1, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ n + 1, & \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$  द्वारा परिभाषित है।

माना  $f(n) = f(m)$ , तब, निम्नलिखित स्थितियाँ हो सकती हैं:

यदि  $n$  विषम हो और  $m$  एक सम पूर्णांक हो, तब,  $f(n) = f(m) \Rightarrow n - 1 = m + 1 \Rightarrow n - m = 2$

जो संभव नहीं है, क्योंकि एक सम पूर्णांक और एक विषम पूर्णांक का अंतर कभी सम नहीं हो सकता है।

इसी प्रकार यदि  $n$  सम हो और  $m$  एक विषम पूर्णांक हो तो भी स्थिति संभव नहीं होगी।

यदि दोनों  $n$  और  $m$  विषम हों, तो,  $f(n) = f(m) \Rightarrow n - 1 = m - 1 \Rightarrow n = m$

यदि दोनों  $n$  और  $m$  सम हों, तो,  $f(n) = f(m) \Rightarrow n + 1 = m + 1 \Rightarrow n = m$

$\therefore$  फलन  $f$  एकैकी है।

यहाँ, सहप्रांत  $\mathbf{N}$  में, प्रत्येक अवयव  $2r + 1$  के लिए, अवयव  $2r$  प्रांत  $\mathbf{N}$  में है तथा सहप्रांत  $\mathbf{N}$  में, प्रत्येक अवयव  $2r$  के लिए अवयव  $2r + 1$  प्रांत  $\mathbf{N}$  में है।

$\therefore$  फलन  $f$  आच्छादक है।

अतः, फलन  $f$  व्युत्क्रमणीय फलन है।

माना  $g: \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$ ,  $g(m) = \begin{cases} m + 1, & \text{यदि } m \text{ सम है} \\ m - 1, & \text{यदि } m \text{ विषम है} \end{cases}$  द्वारा परिभाषित है।

जब,  $m$  विषम है, तो  $g \circ f(m) = g(f(m)) = g(m - 1) = m - 1 + 1 = m$  और

जब  $m$  सम है, तो  $gof(m) = g(f(m)) = g(m+1) = m+1-1 = m$   
 इसीप्रकार, जब  $m$  विषम है, तो  $fog(m) = f(g(m)) = f(m-1) = m-1+1 = m$  और  
 जब  $m$  सम है, तो  $fog(m) = f(g(m)) = f(m+1) = m+1-1 = m$   
 $\therefore gof = I_W$  और  $fog = I_W$   
 अतः, फलन  $f$  व्युत्क्रमणीय है और  $f$  का व्युत्क्रम  $f^{-1} = g$  है, जोकि  $f$  के समान है। इसप्रकार, फलन  $f$  का व्युत्क्रम स्वयं  $f$  ही है।

### प्रश्न 3:

यदि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  जहाँ  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  द्वारा परिभाषित है तो  $f(f(x))$  ज्ञात कीजिए।

#### उत्तर 3:

दिया है:  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  जहाँ  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  द्वारा परिभाषित है। इसलिए  
 $f(f(x)) = f(x^2 - 3x + 2) = (x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 2) + 2$   
 $= (x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 - 12x + 4x^2) + (-3x^2 + 9x - 6) + 2$   
 $= x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$

### प्रश्न 4:

सिद्ध कीजिए कि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \{x \in \mathbf{R} : -1 < x < 1\}$  जहाँ  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ,  $x \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित फलन एकैकी तथा आच्छादक है।

#### उत्तर 4:

दिया है:  $f: \mathbf{R} \rightarrow \{x \in \mathbf{R} : -1 < x < 1\}$  जहाँ  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ,  $x \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित फलन है।

माना  $f(x) = f(y)$ , जहाँ  $x, y \in \mathbf{R}$ .

$$\Rightarrow \frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|}$$

यहाँ, कई स्थितियाँ संभव हैं, जैसे कि यदि  $x$  धनात्मक हो तथा  $y$  ऋणात्मक हो। तब

$$\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1-y} \Rightarrow 2xy = x - y$$

क्योंकि,  $x$  धनात्मक है और  $y$  ऋणात्मक है, इसलिए  $x > y \Rightarrow x - y > 0$ , लेकिन,  $2xy$  भी ऋणात्मक होगा।

अतः,  $2xy \neq x - y$

इसीप्रकार,  $x$  ऋणात्मक तथा  $y$  धनात्मक भी संभव नहीं है।

अब, यदि  $x$  और  $y$  दोनों धनात्मक हैं। तो

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \Rightarrow x + xy = y + xy \Rightarrow x = y$$

तथा यदि  $x$  और  $y$  दोनों ही ऋणात्मक हों, तो

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x - xy = y - xy \Rightarrow x = y$$

$\therefore$  फलन  $f$  एकैकी है।

अब, माना  $y \in \mathbf{R}$  इस प्रकार है कि  $-1 < y < 1$ , यदि  $y$  ऋणात्मक है, तो  $x = \frac{y}{1+y} \in \mathbf{R}$  का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$f(x) = f\left(\frac{y}{1+y}\right) = \frac{\left(\frac{y}{1+y}\right)}{1 + \left|\frac{y}{1+y}\right|} = \frac{\frac{y}{1+y}}{1 + \left(\frac{-y}{1+y}\right)} = \frac{y}{1+y-y} = y$$

और यदि  $y$  धनात्मक है, तो  $x = \frac{y}{1-y} \in \mathbf{R}$  का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$f(x) = f\left(\frac{y}{1-y}\right) = \frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)}{1 + \left|\frac{y}{1-y}\right|} = \frac{\frac{y}{1-y}}{1 + \left(\frac{y}{1-y}\right)} = \frac{y}{1-y+y} = y$$

$\therefore$  फलन  $f$  आच्छादक है।

अतः, फलन  $f$  एकैकी तथा आच्छादक है।

**प्रश्न 5:**

सिद्ध कीजिए कि  $f(x) = x^3$  द्वारा प्रदत्त फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  एकैकी है।

**उत्तर 5:**

दिया है:  $f(x) = x^3$  द्वारा प्रदत्त एक फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  है।

माना  $f(x) = f(y)$ , जहाँ  $x, y \in \mathbf{R}$ .  $\Rightarrow x^3 = y^3$  ... (1)

अब, हमें  $x = y$  सिद्ध करना है। माना  $x \neq y$ , तब उनके घन भी बराबर नहीं होंगे।  $\Rightarrow x^3 \neq y^3$

लेकिन ये समीकरण (1) का विरोधाभास है।  $\therefore x = y$ , अतः, फलन  $f$  एकैकी है।

**प्रश्न 6:**

दो फलनों  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$  तथा  $g: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  के उदाहरण दीजिए जो इस प्रकार हों कि,  $g \circ f$  एकैकी है परन्तु  $g$  एकैकी नहीं है।  
(संकेत:  $f(x) = x$  तथा  $g(x) = |x|$  पर विचार कीजिए)

**उत्तर 6:**

माना फलन  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$  जो  $f(x) = x$  द्वारा परिभाषित है तथा फलन  $g: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  जो  $g(x) = |x|$  द्वारा परिभाषित है।

सबसे पहले हम सिद्ध करेंगे कि  $g$  एकैकी नहीं है।

यहाँ,  $g(-1) = |-1| = 1$  तथा  $g(1) = |1| = 1$

$\therefore g(-1) = g(1)$ , लेकिन  $-1 \neq 1$ .  $\therefore g$  एकैकी नहीं है।

अब,  $g \circ f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$  के लिए  $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x) = |x|$ .

माना  $x, y \in \mathbf{N}$  इस प्रकार हैं कि  $g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow |x| = |y|$

क्योंकि  $x, y \in \mathbf{N}$ , अतः, दोनों धनात्मक होंगे।  $\therefore |x| = |y| \Rightarrow x = y$

अतः,  $g \circ f$  एकैकी है।

**प्रश्न 7:**

दो फलनों  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  तथा  $g: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  के उदाहरण दीजिए, जो इस प्रकार हों कि  $g \circ f$  आच्छादक है किन्तु  $f$  आच्छादक नहीं है।  
(संकेत:  $f(x) = x + 1$  तथा  $g(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{if } x > 1 \\ 1, & \text{if } x = 1 \end{cases}$  पर विचार कीजिए।)

**उत्तर 7:**

माना, फलन  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  जहाँ  $f(x) = x + 1$  तथा फलन  $g: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  जहाँ  $g(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{if } x > 1 \\ 1, & \text{if } x = 1 \end{cases}$  है।

सबसे पहले हम सिद्ध करेंगे कि  $g$  आच्छादक नहीं है।

यहाँ, सहप्रांत  $\mathbf{N}$  में अवयव 1 के लिए प्रांत  $\mathbf{N}$  में किसी भी अवयव का अस्तित्व नहीं है।  $\therefore f$  आच्छादक नहीं है।

अब,  $g \circ f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  के लिए,  $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = x + 1 - 1 = x$   $[x \in \mathbf{N} \Rightarrow x + 1 > 1]$

इसप्रकार, ये स्पष्ट हिया कि  $y \in \mathbf{N}$  के लिए,  $x = y \in \mathbf{N}$  ताकि  $g \circ f(x) = y$  हो। अतः,  $g \circ f$  आच्छादक है।

**प्रश्न 8:**

एक अरिक्त समुच्चय  $X$  दिया हुआ है।  $P(X)$  जो कि  $X$  के समस्त उपसमुच्चयों का समुच्चय है, पर विचार कीजिए। निम्नलिखित तरह से  $P(X)$  में एक संबंध  $R$  परिभाषित कीजिए:

$P(X)$  में उपसमुच्चयों  $A, B$  के लिए,  $ARB$ , यदि और केवल यदि  $A \subset B$  है। क्या  $R, P(X)$  में एक तुल्यता संबंध है? अपने उत्तर का औचित्य भी लिखिए।

**उत्तर 8:**

क्योंकि प्रत्येक समुच्चय स्वयं का ही उपसमुच्चय होता है, इसलिए  $ARA$  सभी  $A \in P(X)$  के लिए। अतः,  $R$  स्वतुल्य है।

माना  $ARB \Rightarrow A \subset B$  परन्तु ये आवश्यक नहीं है कि  $B \subset A$  भी हो। जैसे: यदि  $A = \{1, 2\}$  और  $B = \{1, 2, 3\}$  हो।

$\therefore R$  सममित नहीं है।

अब, यदि  $ARB$  तथा  $BRC$  है तो  $A \subset B$  और  $B \subset C$ .  $\Rightarrow A \subset C \Rightarrow ARC$

$\therefore R$  संक्रामक है। अतः,  $R$  एक तुल्यता संबंध नहीं है क्योंकि  $R$  स्वतुल्य, संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है।

### प्रश्न 9:

किसी प्रदत्त अरिक्त समुच्चय  $X$  के लिए एक द्विआधारी संक्रिया  $*$ :  $P(X) \times P(X) \rightarrow P(X)$  पर विचार कीजिए, जो  $A * B = A \cap B$   $\forall A, B \in P(X)$  द्वारा परिभाषित है, जहाँ  $P(X)$  समुच्चय  $X$  का घात समुच्चय है। सिद्ध कीजिए कि इस संक्रिया का तत्समक अवयव  $X$  है तथा संक्रिया  $*$  के लिए  $P(X)$  में केवल  $X$  व्युत्क्रमणीय अवयव है।

### उत्तर 9:

दिया है: द्विआधारी संक्रिया  $*$ :  $P(X) \times P(X) \rightarrow P(X)$ , जो  $A * B = A \cap B$   $\forall A, B \in P(X)$  द्वारा परिभाषित है, जहाँ  $P(X)$  समुच्चय  $X$  का घात समुच्चय है।

हम जानते हैं कि  $A \cap X = A = X \cap A$  सभी  $A \in P(X)$  के लिए  $\Rightarrow A * X = A = X * A$  सभी  $A \in P(X)$  के लिए इस प्रकार,  $X$  इस संक्रिया का तत्समक अवयव है।

अब, कोई अवयव  $A \in P(X)$  व्युत्क्रमणीय होगा यदि  $B \in P(X)$  का अस्तित्व इस प्रकार हो कि

$$A * B = X = B * A \quad [\text{क्योंकि } X \text{ तत्समक अवयव है}]$$

$$\text{अर्थात् } A \cap B = X = B \cap A$$

$$\text{यह तभी संभव है जब } A = X = B.$$

इस प्रकार, संक्रिया  $*$  के लिए  $P(X)$  में केवल  $X$  व्युत्क्रमणीय अवयव है। अतः, यह सिद्ध होता है।

### प्रश्न 10:

समुच्चय  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या ज्ञात कीजिए।

### उत्तर 10:

समुच्चय  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या वास्तव में,  $1, 2, \dots, n$  के कुल क्रमचर्यों की संख्या के बराबर है।

समुच्चय  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या  $= 1, 2, \dots, n$  के कुल क्रमचर्यों की संख्या  $= n$

### प्रश्न 11:

मान लीजिए कि  $S = \{a, b, c\}$  तथा  $T = \{1, 2, 3\}$  है।  $S$  से  $T$  तक के निम्नलिखित फलनों  $F$  के लिए  $F^{-1}$  ज्ञात कीजिए, यदि उसका अस्तित्व है:

(i)  $F = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$

(ii)  $F = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$

### उत्तर 11:

$$S = \{a, b, c\}, \quad T = \{1, 2, 3\}$$

(i) यहाँ,  $F: S \rightarrow T$ ,  $F = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$  द्वारा परिभाषित है।  $\Rightarrow F(a) = 3, F(b) = 2, F(c) = 1$

इसलिए,  $F^{-1}: T \rightarrow S$ , जो  $F^{-1} = \{(3, a), (2, b), (1, c)\}$  द्वारा परिभाषित है।

(ii) यहाँ,  $F: S \rightarrow T$ , जो  $F = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$  द्वारा परिभाषित है।

क्योंकि  $F(b) = F(c) = 1$ , इसलिए  $F$  एकैकी नहीं है।

अतः,  $F$  व्युत्क्रमणीय नहीं है अर्थात्  $F^{-1}$  का अस्तित्व नहीं है।

### प्रश्न 12:

$a * b = |a - b|$  तथा  $a \circ b = a$ ,  $\forall a, b \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रियाओं  $*$ :  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  तथा  $\circ$ :  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि  $*$  क्रमविनिमय है परन्तु साहचर्य नहीं है,  $\circ$  साहचर्य है परन्तु क्रमविनिमय नहीं है। पुनः सिद्ध कीजिए कि सभी  $a, b, c \in \mathbf{R}$  के लिए,  $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$  है। [यदि ऐसा होता है, तो हम कहते हैं कि संक्रिया  $*$  संक्रिया  $\circ$  पर वितरित होती है।] क्या  $\circ$  संक्रिया  $*$  पर वितरित होती है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

### उत्तर 12:

दिया है:  $a * b = |a - b|$  तथा  $a \circ b = a$ ,  $\forall a, b \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रियाएँ  $*$ :  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  तथा  $\circ$ :  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  हैं।

अवयव  $a, b \in \mathbf{R}$  के लिए,  $a * b = |a - b|$  और  $b * a = |b - a| = |-(a - b)| = |a - b|$ ,

$$\therefore a * b = b * a$$

अतः, संक्रिया  $*$  क्रमविनिमय है।

यहाँ,  $(1 * 2) * 3 = (|1 - 2|) * 3 = 1 * 3 = |1 - 3| = 2$  और  $1 * (2 * 3) = 1 * (|2 - 3|) = 1 * 1 = |1 - 1| = 0$   
 $\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$  जहाँ  $1, 2, 3 \in \mathbf{R}$ .

अतः, संक्रिया  $*$  साहचर्य नहीं है।

अब, संक्रिया  $\circ$  के लिए,  $1 \circ 2 = 1$  और  $2 \circ 1 = 2$ ,  $\therefore 1 \circ 2 \neq 2 \circ 1$  जहाँ  $1, 2 \in \mathbf{R}$ .

अतः, संक्रिया  $\circ$  क्रमविनिमय नहीं है।

माना, अवयव  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , तब,  $(a \circ b) \circ c = a \circ c = a$  और  $a \circ (b \circ c) = a \circ b = a$

$\therefore a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ , जहाँ  $a, b, c \in \mathbf{R}$

अतः, संक्रिया  $\circ$  साहचर्य है।

अब, माना अवयव  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , तो  $a * (b \circ c) = a * b = |a - b|$  और  $(a * b) \circ (a * c) = (|a - b|) \circ (|a - c|) = |a - b|$

अतः,  $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$ .

अब,  $1 \circ (2 * 3) = 1 \circ (|2 - 3|) = 1 \circ 1 = 1$  और  $(1 \circ 2) * (1 \circ 3) = 1 * 1 = |1 - 1| = 0$

$\therefore 1 \circ (2 * 3) \neq (1 \circ 2) * (1 \circ 3)$  जहाँ  $1, 2, 3 \in \mathbf{R}$

अतः, संक्रिया  $\circ$  संक्रिया  $*$  पर वितरित नहीं होती है।

### प्रश्न 13:

किसी प्रदत्त अरिक्त समुच्चय  $X$  के लिए मान लीजिए कि  $*$ :  $P(X) \times P(X) \rightarrow P(X)$ , जहाँ  $A * B = (A - B) \cup (B - A)$ ,  $\forall A, B \in P(X)$  द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि रिक्त समुच्चय  $\phi$ , संक्रिया  $*$  का तत्समक है तथा  $P(X)$  के समस्त अवयव  $A$  व्युत्क्रमणीय है, इस प्रकार कि  $A^{-1} = A$ . (संकेत:  $(A - \phi) \cup (\phi - A) = A$  तथा  $(A - A) \cup (A - A) = A * A = \phi$ ).

#### उत्तर 13:

दिया है कि  $*$ :  $P(X) \times P(X) \rightarrow P(X)$ , जहाँ  $A * B = (A - B) \cup (B - A)$ ,  $\forall A, B \in P(X)$  द्वारा परिभाषित है।

माना  $A \in P(X)$ . तब,  $A * \phi = (A - \phi) \cup (\phi - A) = A \cup \phi = A$  और  $\phi * A = (\phi - A) \cup (A - \phi) = \phi \cup A = A$

$\therefore A * \phi = A = \phi * A$  सभी  $A \in P(X)$  के लिए

इस प्रकार, समुच्चय  $\phi$  संक्रिया  $*$  का तत्समक है।

अब, कोई अवयव  $A \in P(X)$  व्युत्क्रमणीय होगा यदि  $B \in P(X)$  का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$A * B = \phi = B * A$ . [क्योंकि समुच्चय  $\phi$  संक्रिया का तत्समक है]

यहाँ,  $A * A = (A - A) \cup (A - A) = \phi \cup \phi = \phi$  सभी  $A \in P(X)$ .

अतः,  $P(X)$  का अवयव  $A$  व्युत्क्रमणीय है और  $A^{-1} = A$  है।

### प्रश्न 14:

निम्नलिखित प्रकार से समुच्चय  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  में एक द्विआधारी संक्रिया  $*$  परिभाषित कीजिए

$$a * b = \begin{cases} a + b, & \text{यदि } a + b < 6 \\ a + b - 6, & \text{यदि } a + b \geq 6 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि शून्य इस संक्रिया का तत्समक है तथा समुच्चय का प्रत्येक अवयव  $a \neq 0$  व्युत्क्रमणीय है, इस प्रकार कि  $6 - a$ ,  $a$  का प्रतिलोम है।

#### उत्तर 14:

माना  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

यहाँ, समुच्चय  $X$  में संक्रिया  $*$  इस प्रकार परिभाषित है कि  $a * b = \begin{cases} a + b, & \text{यदि } a + b < 6 \\ a + b - 6, & \text{यदि } a + b \geq 6 \end{cases}$

कोई अवयव  $e \in X$  संक्रिया  $*$  एक तत्समक अवयव होगा यदि  $a * e = a = e * a$  सभी  $a \in X$  के लिए प्रत्येक  $a \in X$  के लिए,

$$a * 0 = a + 0 = a$$

$$[a \in X \Rightarrow a + 0 < 6]$$

$$0 * a = 0 + a = a$$

$$[a \in X \Rightarrow 0 + a < 6]$$

$\therefore a * 0 = a = 0 * a$  सभी  $a \in X$  के लिए

अतः, संक्रिया  $*$  में  $0$  तत्समक अवयव है।

कोई अवयव  $a \in X$  व्युत्क्रमणीय होगा यदि  $b \in X$  इस प्रकार है कि  $a * b = 0 = b * a$ .

$$\text{अर्थात्, } a * b = \begin{cases} a + b = 0 = b + a, & \text{यदि } a + b < 6 \\ a + b - 6 = 0 = b + a - 6, & \text{यदि } a + b \geq 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -b \text{ या } b = 6 - a$$

परन्तु,  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  और  $a, b \in X$ . तब,  $a \neq -b$ ,

इसलिए  $b = 6 - a$  सभी अवयवों  $a$  का व्युत्क्रम है, जहाँ  $a \in X$  है।

अतः, सभी अवयवों  $a \in X, a \neq 0$  के व्युत्क्रम  $6 - a$  हैं अर्थात्  $a^{-1} = 6 - a$  है।

### प्रश्न 15:

मान लीजिए कि  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{-4, -2, 0, 2\}$  और  $f, g: A \rightarrow B$ , क्रमशः  $f(x) = x^2 - x, x \in A$  तथा  $g(x) = 2 \left| x - \frac{1}{2} \right| - 1, x \in A$  द्वारा परिभाषित फलन हैं। क्या  $f$  तथा  $g$  समान हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए। (संकेत: नोट कीजिए कि दो फलन  $f: A \rightarrow B$  तथा  $g: A \rightarrow B$  समान कहलाते हैं यदि  $f(a) = g(a) \forall a \in A$  हो।)

#### उत्तर 15:

दिया है:  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{-4, -2, 0, 2\}$  और  $f, g: A \rightarrow B$ , क्रमशः  $f(x) = x^2 - x, x \in A$  तथा  $g(x) = 2 \left| x - \frac{1}{2} \right| - 1, x \in A$  द्वारा परिभाषित फलन हैं।

इसलिए,

$$f(-1) = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2 \text{ और } g(-1) = 2 \left| (-1) - \frac{1}{2} \right| - 1 = 2 \left( \frac{3}{2} \right) - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow f(-1) = g(-1)$$

$$\text{यहाँ, } f(0) = (0)^2 - (0) = 0 \text{ और } g(0) = 2 \left| 0 - \frac{1}{2} \right| - 1 = 2 \left( \frac{1}{2} \right) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = g(0)$$

$$\text{इसीप्रकार } f(1) = (1)^2 - (1) = 1 - 1 = 0 \text{ और } g(1) = 2 \left| (1) - \frac{1}{2} \right| - 1 = 2 \left( \frac{1}{2} \right) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow f(1) = g(1)$$

$$\text{तथा } f(2) = (2)^2 - (2) = 4 - 2 = 2 \text{ और } g(2) = 2 \left| (2) - \frac{1}{2} \right| - 1 = 2 \left( \frac{3}{2} \right) - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow f(2) = g(2)$$

$\therefore f(a) = g(a)$  सभी  $a \in A$  के लिए

अतः, फलन  $f$  तथा  $g$  समान फलन हैं।

### प्रश्न 16:

यदि  $A = \{1, 2, 3\}$  हो तो ऐसे संबंध जिनमें अवयव  $(1, 2)$  तथा  $(1, 3)$  हों और जो स्वतुल्य तथा सममित हैं किंतु संक्रामक नहीं हैं, कि संख्या है:

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

#### उत्तर 16:

दिया है: समुच्चय  $A = \{1, 2, 3\}$ .

समुच्चय  $A = \{1, 2, 3\}$  में सबसे छोटा संबंध जिसमें अवयव  $(1, 2)$  तथा  $(1, 3)$  हों और जो स्वतुल्य तथा सममित तो हो किंतु संक्रामक नहीं हो, निम्नलिखित प्रकार से होगा:

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$$

संबंध  $R$  स्वतुल्य है क्योंकि  $(1, 1), (2, 2), (3, 3) \in R$ .

संबंध  $R$  सममित है क्योंकि  $(1, 2), (2, 1) \in R$  और  $(1, 3), (3, 1) \in R$ .

लेकिन संबंध  $R$  संक्रामक नहीं है क्योंकि  $(3, 1), (1, 2) \in R$  परन्तु  $(3, 2) \notin R$ .

अब, यदि हम  $(3, 2)$  और  $(2, 3)$  (या दोनों) को संबंध  $R$  में शामिल कर लें तो संबंध  $R$  संक्रामक भी होगा।

अतः, कुल अभीष्ट संबंध संख्या में 1 ही होंगे।

अतः, विकल्प (A) सही है।

**प्रश्न 17:**

यदि  $A = \{1, 2, 3\}$  हो तो अवयव  $(1, 2)$  वाले तुल्यता संबंधों की संख्या है।

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

**उत्तर 17:**

दिया है: समुच्चय  $A = \{1, 2, 3\}$ .

समुच्चय  $A = \{1, 2, 3\}$  में अवयव  $(1, 2)$  वाले सबसे छोटा तुल्यता संबंध

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$$

इसके अतिरिक्त समुच्चय  $A = \{1, 2, 3\}$  में केवल चार युग्म ही बचे हैं अर्थात्  $(2, 3), (3, 2), (1, 3)$  और  $(3, 1)$  हैं।

यदि हम एक युग्म, माना  $(2, 3)$ , को  $R_1$  में शामिल कर लें, तो संबंध को सममित बनाने के लिए, हमें युग्म  $(3, 2)$  को भी शामिल करना होगा और साथ ही संक्रामक बनाने के लिए  $(1, 3)$  और  $(3, 1)$  को भी सम्मिलित करना होगा।

अतः, एकमात्र तुल्यता संबंध (जो  $R_1$  से बड़ा हो) सार्वत्रिक संबंध होगा।

इसप्रकार, अवयव  $(1, 2)$  वाले तुल्यता संबंधों की संख्या 2 है।

अतः, विकल्प (B) सही है।

**प्रश्न 18:**

मान लीजिए कि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  है तब निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित चिन्ह फलन है।

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \text{ तथा } g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = [x], \text{ द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन है, जहाँ } [x], x \text{ से कम या } x \text{ के बराबर} \\ -1, & x < 1 \end{cases}$$

पूर्णक है, तो क्या  $f \circ g$  तथा  $g \circ f$ , अन्तराल  $[0, 1]$  में संपाती हैं?

**उत्तर 18:**

$$\text{दिया है: } f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \text{ तथा } g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = [x], \text{ द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन है, जहाँ } [x], x \text{ से कम या } x \text{ के} \\ -1, & x < 1 \end{cases}$$

बराबर पूर्णांक है।

यहाँ, माना  $x \in (0, 1]$ , तब

$$[x] = 1 \text{ यदि } x = 1 \text{ और } [x] = 0 \text{ यदि } 0 < x < 1.$$

इसलिए,

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f([x]) = \begin{cases} f(1), & \text{यदि } x = 1 \\ f(0), & \text{यदि } x \in (0, 1) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x = 1 \\ 0, & \text{यदि } x \in (0, 1) \end{cases}$$

और

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(1) = [1] = 1 \quad [\text{क्योंकि } x > 0]$$

इसप्रकार, जब  $x \in (0, 1)$ , तो  $f \circ g(x) = 0$  और  $g \circ f(x) = 1$ .

अतः,  $f \circ g$  तथा  $g \circ f$ , अन्तराल  $[0, 1]$  में संपाती नहीं हैं।

**प्रश्न 19:**

समुच्चय  $\{a, b\}$  में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या है

- (A) 10 (B) 16 (C) 20 (D) 8

**उत्तर 19:**

समुच्चय  $\{a, b\}$  में एक द्विआधारी संक्रिया \* एक फलन  $\{a, b\} \times \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}$  है।

अर्थात् संक्रिया \*,  $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\} \rightarrow \{a, b\}$  से एक फलन है।

समुच्चय  $\{a, b\}$  में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या  $2^4$  है अर्थात् 16 है।

अतः, विकल्प (B) सही है।