

गणित

(अध्याय - 2) (प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 2.1

निम्नलिखित के मुख्य मानों को ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1:

$$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

उत्तर 1:

माना, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y$, इसलिए, $\sin y = -\frac{1}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

हम जानते हैं कि \sin^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ होता है और $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ है।

अतः, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न 2:

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

उत्तर 2:

माना, $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$, इसलिए, $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

हम जानते हैं कि \cos^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi]$ होता है और $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ है। अतः,

$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न 3:

$$\operatorname{cosec}^{-1}(2).$$

उत्तर 3:

माना, $\operatorname{cosec}^{-1}(2) = y$. इसलिए, $\operatorname{cosec} y = 2 = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

हम जानते हैं कि $\operatorname{cosec}^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ होता है और $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

2 है। अतः, $\operatorname{cosec}^{-1}(2)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न 4:

$$\tan^{-1}(-\sqrt{3}).$$

उत्तर 4:

माना, $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = y$, इसलिए, $\tan y = -\sqrt{3} = -\tan\frac{\pi}{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

हम जानते हैं कि \tan^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ होता है और $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

है। अतः, $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{3}$ है।

प्रश्न 5:

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right).$$

उत्तर 5:

माना, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y$, इसलिए, $\cos y = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
हम जानते हैं कि \cos^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi]$ होता है और $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ है। अतः,
 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान $\frac{2\pi}{3}$ है।

प्रश्न 6:

$$\tan^{-1}(-1).$$

उत्तर 6:

माना, $\tan^{-1}(-1) = y$. इसलिए, $\tan y = -1 = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
हम जानते हैं कि \tan^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ होता है और $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ है।
अतः, $\tan^{-1}(-1)$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{4}$ है।

प्रश्न 7:

$$\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

उत्तर 7:

माना, $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = y$, इसलिए, $\sec y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec\left(\frac{\pi}{6}\right)$
हम जानते हैं कि \sec^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ होता है और $\sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ है।
अतः, $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न 8:

$$\cot^{-1}\sqrt{3}.$$

उत्तर 8:

माना, $\cot^{-1}\sqrt{3} = y$, इसलिए, $\cot y = \sqrt{3} = \cot\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
हम जानते हैं कि \cot^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $(0, \pi)$ होता है और $\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ है। अतः,
 $\cot^{-1}\sqrt{3}$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न 9:

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

उत्तर 9:

माना, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = y$, इसलिए, $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.
हम जानते हैं कि \cos^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi]$ होता है और $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ है। अतः,
 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान $\frac{3\pi}{4}$ है।

प्रश्न 10:

$$\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2}).$$

उत्तर 10:

माना, $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2}) = y$, इसलिए, $\operatorname{cosec} y = -\sqrt{2} = -\operatorname{cosec}(\frac{\pi}{4}) = \operatorname{cosec}(-\frac{\pi}{4})$

हम जानते हैं कि $\operatorname{cosec}^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$ होता है और $\operatorname{cosec}(-\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$ है। अतः, $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{4}$ है।

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 11:

$$\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right).$$

उत्तर 11:

माना, $\tan^{-1}(1) = x$, इसलिए, $\tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$

हम जानते हैं कि \tan^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ होता है। $\therefore \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

माना, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y$, इसलिए,

$$\cos y = -\frac{1}{2} = -\cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

हम जानते हैं कि \cos^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi]$ होता है। $\therefore \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

माना, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = z$, इसलिए,

$$\sin z = -\frac{1}{2} = -\sin \frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

हम जानते हैं कि \sin^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ होता है। $\therefore \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} \text{अब, } & \tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi + 8\pi - 2\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

प्रश्न 12:

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

उत्तर 12:

माना, $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = x$, इसलिए,

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

हम जानते हैं कि \cos^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi]$ होता है। $\therefore \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

माना, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y$, इसलिए,

$$\sin y = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

हम जानते हैं कि \sin^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ होता है। $\therefore \sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$
 अब, $\cos^{-1}(\frac{1}{2}) + 2\sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3} + 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

प्रश्न 13:

यदि $\sin^{-1}x = y$, तो

(A) $0 \leq y \leq \pi$

(B) $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < y < \pi$

(D) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

उत्तर 13:

दिया है: $\sin^{-1}x = y$

हम जानते हैं कि \sin^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ होता है। इसलिए, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

अतः, विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 14:

$\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान बराबर है:

(A) π

(B) $-\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{2\pi}{3}$

उत्तर 14:

माना, $\tan^{-1}\sqrt{3} = x$, इसलिए,

$$\tan x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$$

हम जानते हैं कि \tan^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ होता है। $\therefore \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

माना, $\sec^{-1}(-2) = y$, इसलिए,

$$\sec y = -2 = -\sec \frac{\pi}{3} = \sec(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sec(\frac{2\pi}{3})$$

हम जानते हैं कि \sec^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ होता है। $\therefore \sec^{-1}(-2) = \frac{2\pi}{3}$

अब,

$$\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2) = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

अतः, विकल्प (B) सही है।

गणित

(अध्याय - 2) (प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 2.2

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए:

प्रश्न 1:

$$3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3), \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

उत्तर 1:

माना, $\sin^{-1}x = \theta$, then $x = \sin \theta$. We have,

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \sin^{-1}(3x - 4x^3) = \sin^{-1}(3\sin \theta - 4\sin^3 \theta) \\ &= \sin^{-1}(\sin 3\theta) = 3\theta = 3\sin^{-1}x = \text{LHS} \end{aligned}$$

प्रश्न 2:

$$3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x), \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

उत्तर 2:

माना, $\cos^{-1}x = \theta$, then $x = \cos \theta$. We have,

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \cos^{-1}(4x^3 - 3x) = \cos^{-1}(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) \\ &= \cos^{-1}(\cos 3\theta) = 3\theta = 3\cos^{-1}x = \text{LHS} \end{aligned}$$

प्रश्न 3:

$$\tan^{-1} \frac{2}{11} + \tan^{-1} \frac{7}{24} = \tan^{-1} \frac{1}{2}$$

उत्तर 3:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \tan^{-1} \frac{2}{11} + \tan^{-1} \frac{7}{24} \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{2}{11} + \frac{7}{24}}{1 - \frac{2}{11} \times \frac{7}{24}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{48 + 77}{11 \times 24}}{\frac{11 \times 24 - 14}{11 \times 24}} \right) \\ &= \tan^{-1} \frac{48 + 77}{264 - 14} = \tan^{-1} \frac{125}{251} = \tan^{-1} \frac{1}{2} = \text{RHS} \end{aligned}$$

प्रश्न 4:

$$2\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \tan^{-1} \frac{31}{17}$$

उत्तर 4:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= 2\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{7} \\ &= \tan^{-1} \left[\frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right] + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \tan^{-1} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)} + \tan^{-1} \frac{1}{7} \\ &= \tan^{-1} \frac{4}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{1}{7}} \right) \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{28 + 3}{3 \times 7}}{\frac{3 \times 7 - 4}{3 \times 7}} \right) = \tan^{-1} \frac{28 + 3}{21 - 4} = \tan^{-1} \frac{31}{17} = \text{RHS} \end{aligned}$$

निम्नलिखित फलनों को सरलतम रूप में लिखिए:

प्रश्न 5:

$$\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, x \neq 0$$

उत्तर 5:

दिया है: $\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

माना, $x = \tan \theta$

$$\begin{aligned} \therefore \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan \theta} \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{\sec \theta - 1}{\tan \theta} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \right) = \tan^{-1} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} x \end{aligned}$$

प्रश्न 6:

$$\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$$

उत्तर 6:

दिया है: $\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

माना, $x = \operatorname{cosec} \theta$

$$\begin{aligned} \therefore \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} &= \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}} \\ &= \tan^{-1} \frac{1}{\cot \theta} = \tan^{-1} \tan \theta = \theta = \operatorname{cosec}^{-1} x \\ &= \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x \end{aligned}$$

प्रश्न 7:

$$\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \right), x < \pi$$

उत्तर 7:

$$\begin{aligned} \text{दिया है: } \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \right) &= \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}} \right) \\ &= \tan^{-1} \left(\sqrt{\tan^2 \frac{x}{2}} \right) = \tan^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right) = \frac{x}{2} \end{aligned}$$

प्रश्न 8:

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right), 0 < x < \pi$$

उत्तर 8:

दिया है: $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$

$$\begin{aligned}\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan x}\right) \\ &= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \frac{\pi}{4} - x\end{aligned}$$

प्रश्न 9:

$$\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, |x| < a$$

उत्तर 9:

दिया है: $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

माना, $x = a \sin \theta$

$$\begin{aligned}\therefore \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \tan^{-1}\left(\frac{a \sin \theta}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a \sin \theta}{a \sqrt{1 - \sin^2 \theta}}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{a \sin \theta}{a \cos \theta}\right) = \tan^{-1}(\tan \theta) = \theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}\end{aligned}$$

प्रश्न 10:

$$\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right), a > 0; \frac{-a}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{3}}$$

उत्तर 10:

दिया है: $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right)$

माना, $x = a \tan \theta$

$$\begin{aligned}\therefore \tan^{-1}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{3a^2 \cdot a \tan \theta - a^3 \tan^3 \theta}{a^3 - 3a \cdot a^2 \tan^2 \theta}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{3a^3 \tan \theta - a^3 \tan^3 \theta}{a^3 - 3a^3 \tan^2 \theta}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}\right) \\ &= \tan^{-1}(\tan 3\theta) = 3\theta \\ &= 3 \tan^{-1}\frac{x}{a}\end{aligned}$$

निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 11:

$$\tan^{-1} \left[2\cos \left(2\sin^{-1} \frac{1}{2} \right) \right]$$

उत्तर 11:

दिया है: $\tan^{-1} \left[2\cos \left(2\sin^{-1} \frac{1}{2} \right) \right]$

$$\begin{aligned} \therefore \tan^{-1} \left[2\cos \left(2\sin^{-1} \frac{1}{2} \right) \right] &= \tan^{-1} \left[2\cos \left(2\sin^{-1} \left(\sin \frac{\pi}{6} \right) \right) \right] \\ &= \tan^{-1} \left[2\cos \left(2 \times \frac{\pi}{6} \right) \right] = \tan^{-1} \left[2\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \right] = \tan^{-1} \left[2 \times \frac{1}{2} \right] \\ &= \tan^{-1} [1] = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

प्रश्न 12:

$$\cot(\tan^{-1}a + \cot^{-1}a).$$

उत्तर 12:

दिया है: $\cot(\tan^{-1}a + \cot^{-1}a).$

$$\therefore \cot(\tan^{-1}a + \cot^{-1}a) = \cot \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad \left[\because \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} \right]$$

प्रश्न 13:

$$\tan^{-1} \left[\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1} \frac{1-y^2}{1+y^2} \right], |x| < 1, y > 0 \text{ तथा } xy < 1.$$

उत्तर 13:

दिया है: $\tan^{-1} \left[\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1} \frac{1-y^2}{1+y^2} \right]$

$$\begin{aligned} &= \tan^{-1} \left[2\tan^{-1}x + 2\tan^{-1}y \right] \quad \left[\because 2\tan^{-1}x = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} \right] \\ &= \tan^{-1} \left[2(\tan^{-1}x + \tan^{-1}y) \right] = \tan^{-1} [2(\tan^{-1}x + \tan^{-1}y)] \\ &= \tan^{-1} \left[\tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy} \right] = \frac{x+y}{1-xy} \end{aligned}$$

प्रश्न 14:

यदि $\sin \left(\sin^{-1} \frac{1}{5} + \cos^{-1}x \right) = 1$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 14:

दिया है: $\sin \left(\sin^{-1} \frac{1}{5} + \cos^{-1}x \right) = 1$

$$\Rightarrow \left(\sin^{-1} \frac{1}{5} + \cos^{-1}x \right) = \sin^{-1} 1$$

$$\Rightarrow \left(\sin^{-1} \frac{1}{5} + \cos^{-1}x \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} \frac{1}{5} = \sin^{-1}x$$

$$\left[\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

प्रश्न 15:

यदि $\tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 15:

दिया है: $\tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \tan^{-1} \left(\frac{\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2}}{1 - \frac{x-1}{x-2} \times \frac{x+1}{x+2}} \right) = \frac{\pi}{4} \quad \left[\because \tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2}}{1 - \frac{x-1}{x-2} \times \frac{x+1}{x+2}} = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\left[\frac{(x-1)(x+2) + (x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \right]}{\left[\frac{(x-2)(x+2) - (x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \right]} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2x - x - 2 + x^2 + x - 2x - 2}{x^2 - 4 - (x^2 - 1)} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2 - 4}{-3} = 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4 = -3 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

प्रश्न संख्या 16 से 18 में दिए प्रत्येक व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 16:

$$\sin^{-1} \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

उत्तर 16:

दिया है: $\sin^{-1} \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right)$.

हम जानते हैं कि \sin^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ होता है।

$$\therefore \sin^{-1} \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right) = \sin^{-1} \left(\sin \left\{ \pi - \frac{\pi}{3} \right\} \right) = \sin^{-1} \left(\sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{अतः, } \sin^{-1} \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3}$$

प्रश्न 17:

$$\tan^{-1} \left(\tan \frac{3\pi}{4} \right).$$

उत्तर 17:

दिया है: $\tan^{-1} \left(\tan \frac{3\pi}{4} \right)$

हम जानते हैं कि \tan^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ होता है।

$$\therefore \tan^{-1} \left(\tan \frac{3\pi}{4} \right) = \tan^{-1} \left(\tan \left\{ \pi - \frac{\pi}{4} \right\} \right) = \tan^{-1} \left(-\tan \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\tan \left\{ -\frac{\pi}{4} \right\} \right) = -\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{अतः, } \tan^{-1} \left(\tan \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{\pi}{4}$$

प्रश्न 18:

$$\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cot^{-1}\frac{3}{2}\right).$$

उत्तर 18:

दिया है: $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

$$\therefore \tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cot^{-1}\frac{3}{2}\right) = \tan\left(\tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{5^2-3^2}} + \tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

$$\left[\because \sin^{-1}\frac{a}{b} = \tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}} \text{ तथा } \cot^{-1}\frac{a}{b} = \tan^{-1}\frac{b}{a}\right]$$

$$= \tan\left(\tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

$$= \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}}\right)\right]$$

$$= \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\frac{9+8}{4 \times 3}}{\frac{4 \times 3 - 3 \times 2}{4 \times 3}}\right)\right]$$

$$= \tan\left(\tan^{-1}\frac{17}{6}\right) = \frac{17}{6}$$

प्रश्न 19:

$\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान बराबर है:

(A) $\frac{7\pi}{6}$

(B) $\frac{5\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{6}$

उत्तर 19:

दिया है: $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$

हम जानते हैं कि \cos^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi]$ होता है।

$$\therefore \cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left[\cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]$$

इसलिए, $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$

अतः, विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 20: $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ का मान है:

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1

उत्तर 20:

दिया है: $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

हम जानते हैं कि \sin^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ होता है।

$$\begin{aligned} \therefore \sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= \sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left\{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right] \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{6}\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned}$$

इसलिए, $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 1$

अतः, विकल्प (D) सही है।

प्रश्न 21:

$\tan^{-1}\sqrt{3} - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान है

- (A) π है (B) $-\frac{\pi}{2}$ है (C) 0 है (D) $2\sqrt{3}$ है

उत्तर 21:

दिया है: $\tan^{-1}\sqrt{3} - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$

हम जानते हैं कि \tan^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ तथा \cot^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $(0, \pi)$ होता है।

$$\begin{aligned} \therefore \tan^{-1}\sqrt{3} - \cot^{-1}(-\sqrt{3}) \\ &= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right) - \cot^{-1}\left(-\cot\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\pi}{3} - \cot^{-1}\left[\cot\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{3} - \cot^{-1}\left(\cot\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi - 5\pi}{6} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

इसलिए, $\tan^{-1}\sqrt{3} - \cot^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2}$

अतः, विकल्प (B) सही है।

गणित

(अध्याय - 2) (प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन)

(कक्षा 12)

अध्याय 2 पर विविध प्रश्नावली

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1:

$$\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right).$$

उत्तर 1:

दिया है: $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$

हम जानते हैं कि \cos^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi]$ होता है।

$$\therefore \cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right) = \cos^{-1}\left[\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$$

इसलिए, $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

प्रश्न 2:

$$\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right).$$

उत्तर 2:

दिया है: $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)$

हम जानते हैं कि \tan^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ होता है।

$$\therefore \tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right) = \tan^{-1}\left[\tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

इसलिए, $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

प्रश्न 3:

सिद्ध कीजिए: $2\sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{24}{7}$.

उत्तर 3:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= 2\sin^{-1}\frac{3}{5} = 2\tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{5^2-3^2}} && \left[\because \sin^{-1}\frac{a}{b} = \tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\right] \\ &= 2\tan^{-1}\frac{3}{4} = \tan^{-1}\left[\frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}\right] && \left[\because 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right] \end{aligned}$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{3}{2}}{\frac{16-9}{16}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{3}{2} \times \frac{16}{7}\right)$$

$$= \tan^{-1}\frac{24}{7}$$

= RHS

प्रश्न 4:

सिद्ध कीजिए: $\sin^{-1} \frac{8}{17} + \sin^{-1} \frac{3}{5} = \tan^{-1} \frac{77}{36}$.

उत्तर 4:

$$\begin{aligned}
 \text{LHS} &= \sin^{-1} \frac{8}{17} + \sin^{-1} \frac{3}{5} \\
 &= \tan^{-1} \frac{8}{\sqrt{17^2 - 8^2}} + \tan^{-1} \frac{3}{\sqrt{5^2 - 3^2}} \quad \left[\because \sin^{-1} \frac{a}{b} = \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right] \\
 &= \tan^{-1} \frac{8}{15} + \tan^{-1} \frac{3}{4} \\
 &= \tan^{-1} \left[\frac{\frac{8}{15} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{8}{15} \times \frac{3}{4}} \right] \quad \left[\because \tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) \right] \\
 &= \tan^{-1} \left[\frac{\frac{32+45}{15 \times 4}}{\frac{15 \times 4 - 8 \times 3}{15 \times 4}} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{77}{36} \right] \\
 &= \tan^{-1} \frac{77}{36} = \text{RHS}
 \end{aligned}$$

प्रश्न 5:

सिद्ध कीजिए: $\cos^{-1} \frac{4}{5} + \cos^{-1} \frac{12}{13} = \cos^{-1} \frac{33}{65}$

उत्तर 5:

$$\begin{aligned}
 \text{LHS} &= \cos^{-1} \frac{4}{5} + \cos^{-1} \frac{12}{13} \\
 &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{5^2 - 4^2}}{4} + \tan^{-1} \frac{\sqrt{13^2 - 12^2}}{12} \quad \left[\because \cos^{-1} \frac{a}{b} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right] \\
 &= \tan^{-1} \frac{3}{4} + \tan^{-1} \frac{5}{12} \\
 &= \tan^{-1} \left[\frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{5}{12}} \right] \quad \left[\because \tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) \right] \\
 &= \tan^{-1} \left[\frac{\frac{36+20}{4 \times 12}}{\frac{4 \times 12 - 3 \times 5}{4 \times 12}} \right] = \tan^{-1} \frac{56}{33} \\
 &= \cos^{-1} \frac{33}{\sqrt{56^2 + 33^2}} \quad \left[\because \tan^{-1} \frac{a}{b} = \cos^{-1} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \\
 &= \cos^{-1} \frac{33}{\sqrt{4225}} = \cos^{-1} \frac{33}{65} = \text{RHS}
 \end{aligned}$$

प्रश्न 6:

सिद्ध कीजिए: $\cos^{-1} \frac{12}{13} + \sin^{-1} \frac{3}{5} = \sin^{-1} \frac{56}{65}$

उत्तर 6:

$$\text{LHS} = \cos^{-1} \frac{12}{13} + \sin^{-1} \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned}
&= \tan^{-1} \frac{\sqrt{13^2 - 12^2}}{12} + \tan^{-1} \frac{3}{\sqrt{5^2 - 3^2}} \\
&\quad \left[\because \cos^{-1} \frac{a}{b} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \text{ तथा } \sin^{-1} \frac{a}{b} = \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right] \\
&= \tan^{-1} \frac{5}{12} + \tan^{-1} \frac{3}{4} \\
&= \tan^{-1} \left[\frac{\frac{5}{12} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{5}{12} \times \frac{3}{4}} \right] \quad \left[\because \tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \left(\frac{x + y}{1 - xy} \right) \right] \\
&= \tan^{-1} \left[\frac{\frac{20 + 36}{12 \times 4}}{\frac{12 \times 4 - 5 \times 3}{12 \times 4}} \right] = \tan^{-1} \frac{56}{33} \\
&= \sin^{-1} \frac{56}{\sqrt{56^2 + 33^2}} \quad \left[\because \tan^{-1} \frac{a}{b} = \sin^{-1} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \\
&= \sin^{-1} \frac{56}{\sqrt{4225}} = \sin^{-1} \frac{56}{65} = \text{RHS}
\end{aligned}$$

प्रश्न 7:

सिद्ध कीजिए: $\tan^{-1} \frac{63}{16} = \sin^{-1} \frac{5}{13} + \cos^{-1} \frac{3}{5}$

उत्तर 7:

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= \sin^{-1} \frac{5}{13} + \cos^{-1} \frac{3}{5} \\
&= \tan^{-1} \frac{5}{\sqrt{13^2 - 5^2}} + \tan^{-1} \frac{\sqrt{5^2 - 3^2}}{3} \quad \left[\because \cos^{-1} \frac{a}{b} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \text{ तथा } \sin^{-1} \frac{a}{b} = \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right] \\
&= \tan^{-1} \frac{5}{12} + \tan^{-1} \frac{4}{3} \\
&= \tan^{-1} \left[\frac{\frac{5}{12} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{5}{12} \times \frac{4}{3}} \right] \quad \left[\because \tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \left(\frac{x + y}{1 - xy} \right) \right] \\
&= \tan^{-1} \left[\frac{\frac{15 + 48}{12 \times 3}}{\frac{12 \times 3 - 5 \times 4}{12 \times 3}} \right] = \tan^{-1} \frac{63}{16} = \text{RHS}
\end{aligned}$$

प्रश्न 8:

सिद्ध कीजिए: $\tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

उत्तर 8:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{8} \\
&= \tan^{-1} \left[\frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{5} \times \frac{1}{7}} \right] + \tan^{-1} \left[\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{8}} \right] \quad \left[\because \tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \left(\frac{x + y}{1 - xy} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tan^{-1} \left[\frac{\frac{7+5}{5 \times 7}}{\frac{5 \times 7 - 1 \times 1}{5 \times 7}} \right] + \tan^{-1} \left[\frac{\frac{8+3}{3 \times 8}}{\frac{3 \times 8 - 1 \times 1}{3 \times 8}} \right] \\
&= \tan^{-1} \frac{12}{34} + \tan^{-1} \frac{11}{23} = \tan^{-1} \frac{6}{17} + \tan^{-1} \frac{11}{23} \\
&= \tan^{-1} \left[\frac{\frac{6}{17} + \frac{11}{23}}{1 - \frac{6}{17} \times \frac{11}{23}} \right] \quad \left[\because \tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) \right] \\
&= \tan^{-1} \left[\frac{\frac{138+187}{17 \times 23}}{\frac{17 \times 23 - 6 \times 11}{17 \times 23}} \right] = \tan^{-1} \left(\frac{138+187}{391-66} \right) \\
&= \tan^{-1} \frac{325}{325} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} = \text{RHS}
\end{aligned}$$

प्रश्न 9:

सिद्ध कीजिए: $\tan^{-1} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$, $x \in [0, 1]$

उत्तर 9:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \tan^{-1} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \times 2 \tan^{-1} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \times 2 \tan^{-1} \sqrt{x} \\
&= \frac{1}{2} \cos^{-1} \left[\frac{1 - (\sqrt{x})^2}{1 + (\sqrt{x})^2} \right] \quad \left[\because 2 \tan^{-1} x = \cos^{-1} \left[\frac{1-x^2}{1+x^2} \right] \right] \\
&= \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \text{RHS}
\end{aligned}$$

प्रश्न 10:

सिद्ध कीजिए: $\cot^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \right) = \frac{x}{2}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right)$

उत्तर 10:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \cot^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \right) = \cot^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} + \sqrt{1-\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}}{\sqrt{1+\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} - \sqrt{1-\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}} \right) \\
&= \cot^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+\cos y} + \sqrt{1-\cos y}}{\sqrt{1+\cos y} - \sqrt{1-\cos y}} \right) \quad \left[\text{माना } \frac{\pi}{2} - x = y \right] \\
&= \cot^{-1} \left(\frac{\sqrt{2\cos^2 \frac{y}{2}} + \sqrt{2\sin^2 \frac{y}{2}}}{\sqrt{2\cos^2 \frac{y}{2}} - \sqrt{2\sin^2 \frac{y}{2}}} \right) \quad \left[\because 1 + \cos y = 2\cos^2 \frac{y}{2} \text{ तथा } 1 - \cos y = 2\sin^2 \frac{y}{2} \right] \\
&= \cot^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}\cos \frac{y}{2} + \sqrt{2}\sin \frac{y}{2}}{\sqrt{2}\cos \frac{y}{2} - \sqrt{2}\sin \frac{y}{2}} \right) \\
&= \cot^{-1} \left(\frac{1 + \tan \frac{y}{2}}{1 - \tan \frac{y}{2}} \right) \quad \left[\text{प्रत्येक पद को } \sqrt{2}\cos \frac{y}{2} \text{ से भाग देने पर} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cot^{-1} \left(\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{y}{2}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{y}{2}} \right) = \cot^{-1} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2} \right) \right] \\
&= \cot^{-1} \left[\cot \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2} \right) \right\} \right] = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{y}{2} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \quad \left[\because \frac{\pi}{2} - x = y \right] \\
&= \frac{x}{2} = \text{RHS}
\end{aligned}$$

प्रश्न 11:

सिद्ध कीजिए: $\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} x, -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1.$

उत्तर 11:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right) \\
&= \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+\cos y} - \sqrt{1-\cos y}}{\sqrt{1+\cos y} + \sqrt{1-\cos y}} \right) \quad [\text{माना } x = \cos y] \\
&= \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2\cos^2 \frac{y}{2}} - \sqrt{2\sin^2 \frac{y}{2}}}{\sqrt{2\cos^2 \frac{y}{2}} + \sqrt{2\sin^2 \frac{y}{2}}} \right) \quad \left[\because 1 + \cos y = 2\cos^2 \frac{y}{2} \text{ तथा } 1 - \cos y = 2\sin^2 \frac{y}{2} \right] \\
&= \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}\cos \frac{y}{2} - \sqrt{2}\sin \frac{y}{2}}{\sqrt{2}\cos \frac{y}{2} + \sqrt{2}\sin \frac{y}{2}} \right) \\
&= \tan^{-1} \left(\frac{1 - \tan \frac{y}{2}}{1 + \tan \frac{y}{2}} \right) \quad [\text{प्रत्येक पद को } \sqrt{2}\cos \frac{y}{2} \text{ से भाग देने पर}] \\
&= \tan^{-1} \left(\frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{y}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{y}{2}} \right) = \tan^{-1} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2} \right) \right] \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{y}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} x = \text{RHS}
\end{aligned}$$

प्रश्न 12:

सिद्ध कीजिए: $\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4} \sin^{-1} \frac{1}{3} = \frac{9}{4} \sin^{-1} \frac{2\sqrt{2}}{3}$

उत्तर 12:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4} \sin^{-1} \frac{1}{3} = \frac{9}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{9}{4} \left(\cos^{-1} \frac{1}{3} \right) \quad \left[\because \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \right] \\
&= \frac{9}{4} \left(\sin^{-1} \frac{\sqrt{3^2 - 1^2}}{3} \right) \quad \left[\because \cos^{-1} \frac{a}{b} = \sin^{-1} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right] \\
&= \frac{9}{4} \left(\sin^{-1} \frac{\sqrt{8}}{3} \right) = \frac{9}{4} \left(\sin^{-1} \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = \text{RHS}
\end{aligned}$$

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए:

प्रश्न 13:

$$2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$$

उत्तर 13:

दिया है: $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2\cos x}{1-\cos^2 x}\right) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x) \quad \left[\because 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos x}{1-\cos^2 x} = 2\operatorname{cosec} x$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos x}{\sin^2 x} = \frac{2}{\sin x} \Rightarrow 2\sin x \cdot \cos x = 2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2\sin x \cdot \cos x - 2\sin^2 x = 0 \Rightarrow 2\sin x(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin x = 0 \quad \text{या} \quad \cos x - \sin x = 0$$

परन्तु $\sin x \neq 0$ क्योंकि यह समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है। $\therefore \cos x - \sin x = 0$

$$\Rightarrow \cos x = \sin x$$

$$\Rightarrow \tan x = 1$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$

प्रश्न 14:

$$\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x, \quad (x > 0)$$

उत्तर 14:

दिया है: $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$

$$\Rightarrow \tan^{-1}1 - \tan^{-1}x = \frac{1}{2}\tan^{-1}x \quad \left[\because \tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} = \tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = x$$

$$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

प्रश्न 15:

$\sin(\tan^{-1}x), |x| < 1$ बराबर होता है:

(A) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(B) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(D) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

उत्तर 15:

दिया है: $\sin(\tan^{-1}x)$

$$= \sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\left[\because \tan^{-1}\frac{a}{b} = \sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right]$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

अतः, विकल्प (D) सही है।

प्रश्न 16:

यदि $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, तो x का मान बराबर है:

- (A) $0, \frac{1}{2}$ (B) $1, \frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

उत्तर 16:

दिया है: $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

माना, $x = \sin y$

$$\therefore \sin^{-1}(1 - \sin y) - 2y = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}(1 - \sin y) = \frac{\pi}{2} + 2y$$

$$\Rightarrow 1 - \sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2y\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \sin y = \cos 2y$$

$$\Rightarrow 1 - \sin y = 1 - 2\sin^2 y \quad [\because \cos 2y = 1 - 2\sin^2 y]$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 y - \sin y = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x = 0 \quad [\because x = \sin y]$$

$$\Rightarrow x(2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{या} \quad x = \frac{1}{2}$$

परन्तु $x \neq \frac{1}{2}$ क्योंकि यह समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।

$\therefore x = 0$ दी गई समीकरण का हल है।

अतः, विकल्प (C) सही है।

प्रश्न 17:

$\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$ का मान है:

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $-\frac{3\pi}{4}$

उत्तर 17:

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{x}{y} - \frac{x-y}{x+y}}{1 + \frac{x}{y} \times \frac{x-y}{x+y}}\right] \quad \left[\because \tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{x(x+y) - y(x-y)}{y(x+y)}}{\frac{y(x+y) + x(x-y)}{y(x+y)}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{x^2 + xy - xy + y^2}{xy + y^2 + x^2 - xy}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$$

अतः, विकल्प (C) सही है।