2 स्थिर वैधुत विभव तथा धारिता

(Electrostatic Potential and Capacitance)

अभ्यास प्रश्न

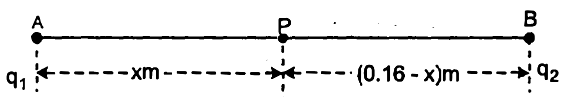
प्रश्न 2.1. 5×10^{-8}C और $-3\times10^{-}$ C के दो आवेश 16 cm दूरी पर स्थित हैं। दोनों आवेशों को मिलाने वाली रेखा के किस बिंदु पर वैद्युत विभव शून्य होता? अनंत पर विभव शून्य लीजिए।

हल : $\because q_1 = 5\times10^{-8}$ C तथा $q_2 = -3\times10^{-8}$ C

और q_1 तथा q_2 के बीच दूरी $= r = 16\text{cm} = 0.16\text{m}$

माना q_1 एवं q_2 बिन्दुओं A एवं B पर हैं।

माना P अभीष्ट बिन्दु है अर्थात् रेखा AB पर q_1 से x दूरी पर, जिस पर विद्युत-विभव शून्य है। यदि q_1 एवं q_2 के कारण P पर क्रमशः विभव V_1 तथा V_2 हैं, तब



$$\because \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}$$

$$\therefore \quad V_1 = \frac{9\times10^9\,\text{Nm}^2\text{C}^{-2}\times5\times10^{-8}\,\text{C}}{x\text{m}}$$

$$\text{तथा} \quad V_2 = \frac{9\times10^9\,\text{Nm}^2\text{C}^{-2}\times(-3\times10^{-8}\,\text{C})}{(0.16-x)\text{m}}$$

यदि P पर कुल विभव V है, तब

$$V = V_1 + V_2$$

या $\quad V = 0$

$$\text{या} \quad V = \left[\frac{9\times10^9\times5\times10^{-8}}{x} + \frac{9\times10^9\times(-3\times10^{-8})}{(0.16-x)}\right]\text{NmC}^{-1} = 0$$

$$\text{या} \quad 9\times10^9\times10^{-8}\left[\frac{5}{x} - \frac{3}{0.16-x}\right] = 0$$

$$\text{या} \quad \frac{5}{x} = \frac{3}{0.16-x}$$

या $5(0.16-x) = 3x$

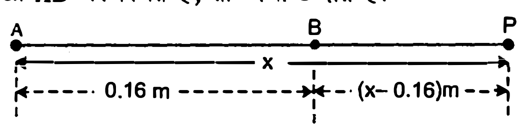
या $\quad 0.8 - 5x = 3x$

या $\quad 8x = 0.8$

या $\quad x = 0.1\,\text{m}$

या $\quad x = 10$ **cm** **उत्तर**

अब 5×10^{-8}C से 10cm दूरी पर यदि x बढ़ी हुई रेखा AB पर स्थित है, तो अभीष्ट शर्त है।



$$\frac{5}{x} - \frac{3}{x-0.16} = 0$$

$$5(x-0.16) = 3x$$

$$5x - 3x = 0.8$$

या $\quad 2x = 0.8\,\text{m}$

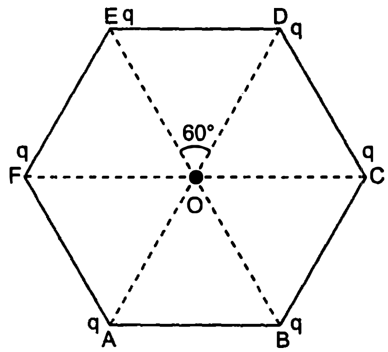
$$x = 0.4\,\text{m}$$

$$x = 40\text{cm}$$

अतः **5×10^{-8} C से ऋणावेश की ओर।** **उत्तर**

प्रश्न 2.2. 10 cm भुजा वाले एक समषट्भुज के प्रत्येक शीर्ष पर 5μC का आवेश है। षट्भुज के केंद्र पर विभव परिकलित कीजिए।

हल : माना $ABCDEF$ एक समषट्भुज है, जिसकी भुजा 10cm है तथा इसका केन्द्र O है।



∵ षट्भुज के प्रत्येक शीर्ष पर आवेश $= q$

$$= 5\mu C = 5 \times 10^{-6} C$$

$$AB = BC = CD - DE = EF$$

तथा भुजा $= FA = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}$

∵ समषट्भुज में सभी त्रिभुज समत्रिभुज हैं।

$$\therefore OA = OB = OC = OD = OE$$

$$= OF = AB = 0.10 \text{ m}$$

$$\because \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{6} \frac{q_i}{r_i}$$

$$\therefore \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r} \times 6$$

या $$V = \frac{6 \times 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \times 5 \times 10^{-6} \text{ C}}{0.1 \text{ m}}$$

या $$V = 270 \times 10^3 \times 10 \text{V}$$

या $$V = 2.7 \times 10^6 \text{ V}$$

अत: **षट्भुज के केंद्र पर विभव**

$$\mathbf{= 2.7 \times 10^6 \text{ V}}$$ **उत्तर**

प्रश्न 2.3. 6 cm की दूरी पर अवस्थित दो बिन्दुओं A एवं B पर दो आवेश 2μC तथा −2μC रखे हैं।

(a) निकाय के सम विभव पृष्ठ की पहचान कीजिए।

(b) इस पृष्ठ के प्रत्येक बिंदु पर विद्युत क्षेत्र की दिशा क्या है?

हल : (a) ∵ A एवं B पर दो आवेश 2μC और −2μC रखे हैं।

तथा $AB = 6\text{cm} = 0.06 \text{ m}$

दो दिए गए आवेशों के निकाय का सम विभव पृष्ठ A एवं B को मिलाने वाली रेखा के अभिलम्ब पर है।

पृष्ठ, AB के मध्य-बिन्दु C से गुजरता है।

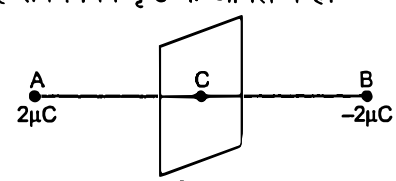
$$\therefore \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2 \times 10^{-6} \text{ C}}{0.03 \text{m}} + \frac{(-2 \times 10^{-6} \text{ C})}{0.03 \text{ m}}\right] = 0$$

इस प्रकार, इस पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर समान विभव है और वह शून्य है।

अत: यह एक सम विभव पृष्ठ है।

अत: **AB के अभिलंबवत् एवं इसके मध्य-बिंदु से होकर जाने वाले तल के प्रत्येक बिंदु पर विभव शून्य है।** **उत्तर**

(b) चूँकि विद्युत क्षेत्र सदैव + से − आवेश की ओर कार्य करता है। इस प्रकार यहाँ विद्युत क्षेत्र धनावेशित (+) बिन्दु A से ऋणावेशित (−) बिन्दु B की ओर कार्य करता है तथा यह सम विभव पृष्ठ के अभिलम्ब है।



सम विभव पृष्ठ

अत: पृष्ठ के प्रत्येक बिंदु पर विद्युत क्षेत्र तल के अभिलंब AB दिशा में है। **उत्तर**

प्रश्न 2.4. 12 cm त्रिज्या वाले एक गोलीय चालक के पृष्ठ पर 1.6×10^{-7} C का आवेश एकसमान रूप से वितरित है :

(a) गोले के अन्दर,

(b) गोले के ठीक बाहर,

(c) गोले के केंद्र से 18 cm पर अवस्थित, किसी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र क्या होगा?

हल : ∵ चालक पर आवेश $q = 1.6 \times 10^{-7}$ C

तथा गोलीय चालक की त्रिज्या $r = 12\text{cm} = 0.12 \text{ m}$

(a) ∵ गोलीय चालक का दिया गया आवेश उसके पृष्ठ पर रहता है।

∴ गोलीय चालक के अन्दर विद्युत-क्षेत्र शून्य है।

$$\because \quad \phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

या $\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$

∵ $q = 0$ चालक के भीतर

∴ $\phi = 0$

या $E.ds = 0$

या $\mathbf{E} = 0$

अत: **गोले के अंदर विद्युत क्षेत्र शून्य है।** **उत्तर**

(b) गोले के ठीक बाहर एक बिन्दु पर अर्थात् पृष्ठ के एक बिन्दु पर, आवेश को गोले के केन्द्र पर संकेन्द्रित माना जा सकता है।

∵ $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$

∴ $E = \frac{9\times10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \times 1.6\times10^{-7}\text{ C}}{(0.12\text{m})^2}$

या $E = \frac{9\times1.6\times10^2}{1.44\times10^{-2}} \text{NC}^{-1}$

या $E = \frac{14.4\times10^2}{14.4\times10^{-3}} \text{NC}^{-1}$

या $E = 10^5 \text{ NC}^{-1}$

अत: **गोले के ठीक बाहर विद्युत क्षेत्र 10^5 NC^{-1} है।** **उत्तर**

(c) गोले के केन्द्र से बिन्दु की दूरी

$= x = 18\text{cm} = 0.18\text{m}$

∵ $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{x^2}$

∴ $E = 9\times10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \times \frac{1.6\times10^{-7}\text{ C}}{(0.18\text{m})^2}$

या $E = \frac{14.4\times10^2}{3.24\times10^{-2}} \text{NC}^{-1}$

या $E = 4.44\times10^4 \text{ NC}^{-1}$

या $E = 4.4\times10^4 \text{ NC}^{-1}$

अत: **गोले के केन्द्र से 18 cm पर विद्युत क्षेत्र $4.4\times10^4 \text{ NC}^{-1}$ है।** **उत्तर**

प्रश्न 2.5. एक समान्तर पट्टिका संधारित्र, जिसकी पट्टिकाओं के बीच वायु है, की धारिता 8 pF ($1\text{pF} - 10^{-12}$ F) है। यदि पट्टिकाओं के बीच की दूरी को आधा कर दिया जाए और इनके बीच के स्थान में 6 परावैद्युतांक का एक पदार्थ कर दिया जाए, तो इसकी धारिता क्या होगी?

हल : ∵ पट्टिकाओं के बीच वायु वाले समान्तर पट्टिका से संधारित्र की धारिता $C_0 = 8\text{pF}$

या $C_0 = 8\times10^{-12}\text{ F}$

माना प्रत्येक पट्टिका का क्षेत्रफल $= A$

तथा पट्टिकाओं के बीच दूरी $= d$

इस प्रकार, $C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ ...(i)

पट्टिकाओं के बीच परावैद्युत पदार्थ के साथ उनके बीच की दूरी $d' = \frac{d}{2}$

$\varepsilon = \varepsilon_0 K$

$C =$ संधारित्र की परावैद्युत पदार्थ की उपस्थिति में धारिता

तथा $K = 6$

इस प्रकार, $C = \frac{\varepsilon A}{d}$

या $C = \frac{\varepsilon_0 KA}{\left(\frac{d}{2}\right)}$

या $C = 2K\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ ...(ii)

समीकरण (ii) को समीकरण (i) से भाग देने पर,

$\frac{C}{C_0} = 2K$

या $C = 2KC_0$

या $C = 2\times6\times8\times10^{-12}\text{ F}$

या $C = 96\times10^{-12}\text{ F}$

या $C = 96\text{pF}$

अत: **अभीष्ट धारिता = 96 pF** **उत्तर**

प्रश्न 2.6. 9 pF धारिता वाले तीन संधारित्रों को श्रेणीक्रम में जोड़ा गया है :

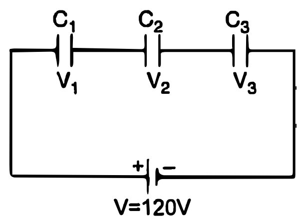
(a) संयोजन की कुल धारिता क्या है?

(b) यदि संयोजन को 120V के संभरण (सप्लाई) से जोड़ दिया जाए, तो प्रत्येक संधारित्र पर क्या विभवांतर होगा?

हल : ∵ प्रत्येक संधारित्र की धारिता

$C_1 = C_2 = C_3 = 9\text{pF} = 9\times10^{-12}\text{ F}$

संभरण विभव $V = 120\text{V}$



(a) श्रेणी संयोजन की धारिता $= C_S$

श्रेणी संयोजन में कुल धारिता

$\because \quad \frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

$\therefore \quad \frac{1}{C_s} = \frac{1}{9\times10^{-12}} + \frac{1}{9\times10^{-12}} + \frac{1}{9\times10^{-12}}$

या $\quad \frac{1}{C_s} = \frac{1+1+1}{9\times10^{-12}}$

या $\quad \frac{1}{C_s} = \frac{1}{3\times10^{-12}}$

या $\quad C_s = 3\times10^{-12}\ \text{F} = 3\,\text{pF}$

अत: **संयोजन की कुल धारिता = 3 pF** **उत्तर**

(b) माना संधारित्रों के विभव क्रमशः V_1, V_2 तथा V_3 हैं।

V_1, V_2 तथा V_3 का योग $= V_1 + V_2 + V_3 = 120\,\text{V}$

माना प्रत्येक संधारित्र पर q आवेश है, तब

$q = CV$ से,

$$V_1 = \frac{q}{C_1}$$

इसी प्रकार, $\quad V_2 = \frac{q}{C_2}$

तथा $\quad V_3 = \frac{q}{C_3}$

$\therefore \quad \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} = 120$

[$\because V_1 + V_2 + V_3 = 120\,\text{V}$]

या $\quad q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = 120\,\text{V}$

या $\quad \frac{q}{3\times10^{-12}} = 120\,\text{V}$

या $\quad q = 120\times3\times10^{-12}\ \text{C}$

या $\quad q = 360\times10^{-12}\ \text{C}$

या $\quad q = 0.36\,\mu\text{C}$

$\therefore \quad V_1 + V_2 + V_3 = \frac{q}{C}$

तथा $\quad V_1 = V_2 = V_3$

$\therefore \quad V_s = \frac{q}{C}$

या $\quad V_s = \frac{360\times10^{-12}\ \text{C}}{9\times10^{-12}\ \text{F}}$

या $\quad V_s = 40\,\text{V}$

अत: **प्रत्येक संधारित्र पर विभवान्तर होगा = 40 V** **उत्तर**

प्रश्न 2.7. 2 pF, 3 pF और 4 pF धारिता वाले तीन संधारित्र पार्श्वक्रम में जोड़े गए हैं।

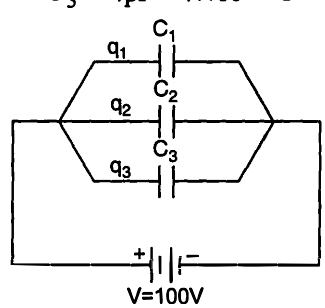
(a) संयोजन की कुल धारिता क्या है?

(b) यदि संयोजन को 100 V के संभरण से जोड़ दें, तो प्रत्येक संधारित्र पर आवेश ज्ञात कीजिए।

हल : $\because \quad C_1 = 2\text{pF} = 2\times10^{-12}\ \text{F}$

$C_2 = 3\text{pF} = 3\times10^{-12}\ \text{F}$

तथा $\quad C_3 = 4\text{pF} = 4\times10^{-12}\ \text{F}$



संयोजन को दिया गया विभव $= V$

(a) C_p = संयोजन (समांतर) की कुल धारिता

$C_p = C_1 + C_2 + C_3$

या $\quad C_p = (2\times10^{-12} + 3\times10^{-12} + 4\times10^{-12})\text{F}$

या $\quad C_p = 9\times10^{-12}\ \text{F}$

या $\quad C_p = 9\text{pF}$

अत: **संयोजन की कुल धारिता = 9 pF** **उत्तर**

(b) माना संधारित्र C_1, C_2 एवं C_3 पर आवेश क्रमशः q_1, q_2 तथा q_3 हैं।

$\because \quad q = CV$ तथा $V = 100\,\text{V}$

$\therefore \quad q_1 = C_1 V$

$= 2\times10^{-12} F\times100 V$

$= 2\times10^{-10} C$

$q_2 = C_2V$

$= 3\times10^{-12} F\times100 V$

$= 3\times10^{-10} C$

तथा $q_3 = C_3V$

$= 4\times10^{-12} F\times100 V$

$= 4\times10^{-10} C$

अत: **प्रत्येक संधारित्र पर आवेश क्रमश:2×10^{-10}C, 3×10^{-10} C तथा 4×10^{-10} C हैं।** **उत्तर**

प्रश्न 2.8. पट्टिकाओं के बीच वायु वाले एक समांतर पट्टिका संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका का क्षेत्रफल $6\times10^{-3} m^2$ तथा उनके बीच की दूरी 3 mm है। संधारित्र की धारिता को परिकलित कीजिए। यदि इस संधारित्र को 100 V के संभरण से जोड़ दिया जाए, तो संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका पर कितना आवेश होगा?

हल : ∵ समान्तर पट्टिका संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका का क्षेत्रफल, $A = 6\times10^{-3} m^2$

पट्टिकाओं के बीच दूरी $= 3 mm = 3\times10^{-3} m$

तथा $\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12} C^2N^{-1}m^{-2}$

माना पट्टिकाओं के बीच वायु के साथ समान्तर पट्टिका एवं संधारित्र की धारिता $= C_0$

$$\because \quad C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$\therefore \quad C_0 = \frac{8.854\times10^{-12}\times6\times10^{-3}}{3\times10^{-3}} F$$

या $C_0 = 17.708\times10^{-12} F$

या $C_0 = 17.708 pF$

या $C_0 = 18 pF$

अत: **पट्टिका संधारित्र की धारिता = 18 pF** **उत्तर**

संधारित्र पर लगाया गया संभरण $= V_0 = 100 V$

संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका पर आवेश $= q_0$

∵ $q_0 = C_0V_0$

∴ $q_0 = 17.708\times10^{-12}\times100 C$

या $q_0 = 17.708\times10^{-10} C$

या $q_0 = 1.771\times10^{-10} C$

या $q_0 = 1.8\times10^{-9} C$

अत: **संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका पर आवेश होगा $= 1.8\times10^{-9}$ C** **उत्तर**

प्रश्न 2.9. प्रश्न 2.8 में दिए गए संधारित्र की पट्टिकाओं के बीच यदि 3 mm मोटी अभ्रक की एक शीट (पत्तर) (परावैद्युतांक = 6) रख दी जाती है, तो स्पष्ट कीजिए कि क्या होगा, जब :

(a) विभव (वोल्टेज) संभरण जुड़ा ही रहेगा।

(b) संभरण को हटा लिया जाएगा।

हल : (a) संधारित्र की वायु माध्यम के साथ धारिता

$= C_0$

∵ पट्टिकाओं के बीच दूरी $= d = 3\times10^{-3}$ m

अभ्रक (माइका) की पट्टी की मोटाई

$= t = 3\times10^{-3} m = d$

पट्टी का परावैद्युतांक $K = 6$

∵ पट्टिकाओं के बीच के स्थान को अभ्रक की पट्टी पूर्ण रूप से घेर लेती है।

तथा संधारित्र की धारिता $= C$

∴ $C = KC_0$

या $C = 6\times18\times10^{-12} F$

या $C = 108\times10^{-12} F$

या $C = 108 pF$

इस प्रकार, अभ्रक की पट्टी रखने के पश्चात् संधारित्र की धारिता K गुना हो जाती है।

∴ संधारित्र पर विभव = 100 V

संधारित्र में अभ्रक की पट्टी के साथ उसके ऊपर आवेश

$q' = CV$

या $q' = 108\times10^{-12}\times100 C$

या $q' = 108\times10^{-8} C$

अत: $q' = K C_0V$

या $q' = Kq$

या $q' = 6\times1.8\times19^{-9} C$

या $q' = 108\times10^{-8} C$

अत: **पट्टिकाओं पर आवेश वायु माध्यम आवेश का K गुना हो जाता है अर्थात् जब संभरण जुड़ा रहता है और अभ्रक की पट्टी माध्यम हो, तो आवेश बढ़ जाता है।** **उत्तर**

(b) संधारित्र की अभ्रक माध्यम के साथ धारिता

$C = KC_0$

या $C = 108 \times 10^{-12}$ F

या $C = 108$ pF

जब संभरण को हटा दिया जाता है (या काट दिया जाता है) अर्थात् $V = 0$, तो संधारित्र की पट्टिकाओं पर विभवांतर $V'K$ गुना कम हो जाता है।

या $V' = \frac{100}{6}$ V $= 16.67$ V

अब C 6 गुना हो जाता है।

इस प्रकार, यदि संभरण हटाने के बाद आवेश $= q_1$

तब $q_1 = CV'$

या $q_1 = KC_0 \times \frac{100}{6}$

या $q_1 = 6 \times 18 \times 10^{-12} \times \frac{100}{6}$

या $q_1 = 18 \times 10^{-10}$ C

या $q_1 = 1.8 \times 10^{-9}$ C

अत: संधारित्र पर आवेश अभ्रक माध्यम के साथ उतना ही रहेगा, जितना कि वायु माध्यम के साथ था। उत्तर

प्रश्न 2.10. 12 pF का एक संधारित्र 50 V की बैटरी से जुड़ा है। संधारित्र में कितनी स्थिरवैद्युत ऊर्जा संचित होगी?

हल : $\because$ संधारित्र की धारिता,

$C = 12$ pF

या $C = 12 \times 10^{-12}$ F

$\because$ संधारित्र से जुड़े संभरण की वोल्टता $V = 50$ V

माना संधारित्र में संग्रहीत स्थिर वैद्युत ऊर्जा $= U$

$\because$ $U = \frac{1}{2} CV^2$

$\therefore$ $U = \frac{1}{2} \times 12 \times 10^{-12} \times (50)^2$ J

या $U = 6 \times 2500 \times 10^{-12}$ J

या $U = 150 \times 10^{-10}$ J

या $U = 1.5 \times 10^{-8}$ J

अत: संधारित्र में स्थिर वैद्युत ऊर्जा संचित होगी $= 1.5 \times 10^{-8}$ J उत्तर

प्रश्न 2.11. 200 V संभरण (सप्लाई) से एक 500 pF के संधारित्र को आवेशित किया जाता है। फिर इसको संभरण से वियोजित कर देते हैं तथा एक अन्य 600 pF वाले अनावेशित संधारित्र से जोड़ देते हैं। इस प्रक्रिया में कितनी ऊर्जा का ह्रास होता है?

हल : $\because$ संधारित्र की धारिता

$= C_1 = 600$ pF

$= 600 \times 10^{-12}$ F

$= 6 \times 10^{-10}$ F

तथा $V_1 =$ संभरण वोल्टता $= 200$ V

माना आरम्भिक संग्रहीत स्थिर वैद्युत ऊर्जा $= U_1$

तब $U = \frac{1}{2} CV^2$

$\therefore$ $U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2$

या $U_1 = \frac{1}{2} \times 6 \times 10^{-10} \times (200)^2$ J

या $U_1 = 12 \times 10^{-6}$ J

या $U_1 = 12\,\mu$J

$\because$ दूसरे संधारित्र की धारिता $C_2 = 600$ pF

$= 6 \times 10^{-10}$ F

तथा दूसरे संधारित्र की धारिता $q_2 = 0$

पहले संधारित्र पर आवेश $= q_1 = C_1 V_1$

या $q_1 = 6 \times 10^{-10} \times 200$ C

या $q_1 = 12 \times 10^{-8}$ C

जब पहले संधारित्र को दूसरे अनावेशित संधारित्र से जोड़ दिया जाता है, तो आवेश दोनों संधारित्रों द्वारा बराबर बाँटा जाता है।

जोड़ने पर, यदि प्रत्येक संधारित्र पर आवेश $= q$

तब $q = \frac{q_1 + q_2}{2}$

या $q = \frac{12 \times 10^{-8} + 0}{2}$ C

या $q = 6 \times 10^{-8}$ C

यदि C_1 पर अंतिम स्थिर वैद्युत ऊर्जा रह जाती है $= U_2$

तब $U_2 = \frac{1}{2} \times \frac{q^2}{C}$

या $U_2 = \frac{1}{2} \times \frac{(6\times10^{-8})^2}{6\times10^{-10}}$

या $U_2 = 3\times10^{-6}$ J

या $U_2 = 3\mu J$

यदि प्रक्रम में ऊर्जा ह्रास $= U$

तब $U = U_1 - U_2$

$\therefore$ $U = 12\times10^{-6}\text{ J} - 6\times10^{-6}\text{ J}$

या $U = 6\times10^{-6}$ J

अत: **इस प्रक्रिया में ऊर्जा का ह्रास होता है** $= \mathbf{6\times10^{-6}}$ **J** **उत्तर**

द्वितीय विधि—

$$V_1 = \frac{1}{2}C_1V_1^2$$

या $V_1 = \frac{1}{2}\times 6\times10^{-10}\times(200)^2$ J

या $V_1 = 12\times10^{-6}$ J

तथा $C_2 = 6\times10^{-10}$ F एवं $V_2 = 0$

माना सम्मिलित विभव $= V$

$\therefore$ $V = \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}$

या $V = \frac{6\times10^{-10}\times200 + 6\times10^{-10}\times0}{6\times10^{-10} + 6\times10^{-10}}$ V

या $V = \frac{12\times10^{-8}}{12\times10^{-10}}$

या $V = 100$ V

यदि अंतिम वैद्युत ऊर्जा $= U_2$, तब

$$U_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V^2$$

या $U_2 = \frac{1}{2}\times(6\times10^{-10} + 6\times10^{-10})\times(100)^2$ J

या $U_2 = 6\times10^{-6}$ J

स्थिर वैद्युत ऊर्जा में ह्रास $= U_1 - U_2$

$= 12\times10^{-6}\text{ J} - 6\times10^{-6}\text{ J}$

$= 6\times10^{-6}$ J

अत: **इस प्रक्रिया में ऊर्जा का ह्रास होता है**

$= \mathbf{6\times10^{-6}}$ **J** **उत्तर**

अतिरिक्त प्रश्न

प्रश्न 2.12. मूल बिंदु पर एक 8 mC का आवेश अवस्थित है। -2×10^{-9} C के एक छोटे से आवेश को बिंदु P(0, 0, 3 cm) से, बिंदु R(0, 6 cm, 9 cm) से होकर, बिंदु Q(0, 4cm, 0) तक ले जाने में किया गया कार्य परिकलित कीजिए।

हल : $\because$ मूल बिन्दु O पर आवेश $= q = 8$ mC

$= 8\times10^{-3}$ C

R से होकर P से Q पर ले जाए जाने वाला आवेश

$q_0 = -2\times10^{-9}$ C

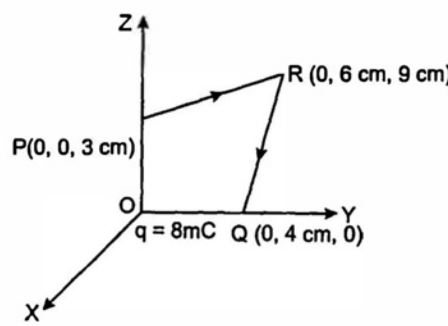
P की आरम्भिक स्थिति $= \mathbf{r_1} = 3\hat{\mathbf{k}}$ cm

Q की अंतिम स्थिति $= \mathbf{r_2} = 4\hat{\mathbf{j}}$ cm

$r_1 = 3\text{cm} = 3\times10^{-2}$ m

तथा $r_2 = 4\text{cm} = 4\times10^{-2}$ m

$\because$ स्थिरवैद्युत बल आरक्षी बल है।



$\therefore$ q_0 को ले जाने में किया गया कार्य पथ से स्वतन्त्र है।

अत: बिन्दु R की कोई प्रासंगिकता नहीं है।

माना q_0 को P से Q पर ले जाने में किया गया कार्य $= W_{PQ}$

तब $W_{PQ} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_0q\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2}\right)$

$\therefore$ $W_{PQ} = 9\times10^9\text{ Nm}^2\text{C}^{-2}\times(-2\times10^{-9})\text{C}$

$\times 8\times10^{-3}\text{C}\left(\frac{1}{4\times10^{-2}} - \frac{1}{3\times10^{-2}}\right)\frac{1}{\text{m}}$

या $W_{PQ} = -18\times8\times10^{-3}\times\left(\frac{10^2}{4} - \frac{10^2}{3}\right)$J

या $W_{PQ} = -144\times10^{-3}\times10^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)$J

या $W_{PQ} = -144 \times 10^{-3} \times 100\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)$ J

या $W_{PQ} = -144 \times 10^{-1}\left(\frac{-1}{12}\right)$ J

या $W_{PQ} = 1.2$ J

अत: **अभीष्ट कार्य = 1.2 J** उत्तर

प्रश्न 2.13. b भुजा वाले एक घन के प्रत्येक शीर्ष पर q आवेश है। इस आवेश विन्यास के कारण घन के केन्द्र पर विद्युत-विभव तथा विद्युत क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

हल : ∵ घन की भुजा $= b$

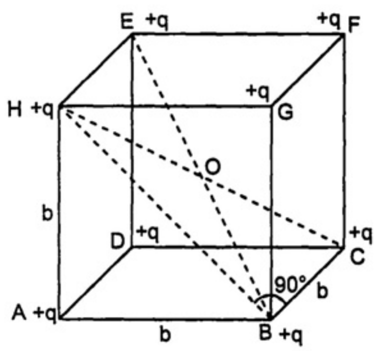
तथा घन के प्रत्येक शीर्ष पर आवेश $= q$

अब पृष्ठ $ABGH$ का विकर्ण $= HB$

$$= \sqrt{AB^2 + AH^2}$$

$$= \sqrt{b^2 + b^2}$$

$$= b\sqrt{2}$$



घन का विकर्ण

$$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{b^2 + b^2 + b^2}$$

$$= b\sqrt{3}$$

$$HO = OC = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

इसी प्रकार,

$$OA = OB = OE = OG = OF = OD = \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

अर्थात् घन के प्रत्येक शीर्ष की उसके केन्द्र से दूरी $= \frac{\sqrt{3}}{2}b$ है।

अत: O से प्रत्येक आवेश की दूरी $= \frac{\sqrt{3}}{2}b$

माना O पर विद्युत विभव $= V$ तथा विद्युत क्षेत्र $E = ?$

∵ $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

तथा $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_1^2}$$

∴ $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{OA} + \frac{q}{OB} + \frac{q}{OC} + \frac{q}{OD} + \frac{q}{OE} + \frac{q}{OF} + \frac{q}{OG} + \frac{q}{OH}\right]$$

या $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q/\frac{b\sqrt{3}}{2} + q/\frac{b\sqrt{3}}{2} + \ldots 8 \text{ बार}\right]$$

या $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{8 \times 2q}{b\sqrt{3}}$$

या $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{16q}{b\sqrt{3}}$$

या $$V = \frac{4q}{\pi\varepsilon_0 b\sqrt{3}}$$

या $$V = \frac{4q}{\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 b}$$

अत: O से प्रत्येक शीर्ष पर आवेश के कारण, विपरीत शीर्षों का विद्युत क्षेत्र परिणाम में समान; परन्तु दिशा में विपरीत है। जैसे A एवं F, B एवं E, C एवं H, D एवं G के क्षेत्र समान परन्तु विपरीत हैं।

अत: विद्युत विभव $\frac{4q}{\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 b}$ है तथा आवेशों की सममिति के कारण O पर कुल विद्युत-क्षेत्र शून्य है। उत्तर

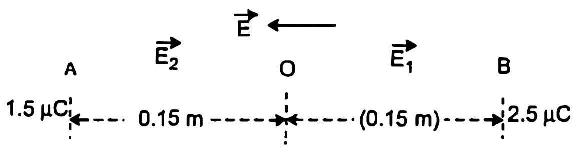
प्रश्न 2.14. 1.5μC और 2.5μC आवेश वाले दो सूक्ष्म गोले 30 cm दूर स्थित हैं।

(a) दोनों आवेशों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिंदु पर, और

(b) मध्य बिंदु से होकर जाने वाली रेखा के अभिलंब तल में मध्य बिंदु से 10 cm दूर स्थित किसी बिंदु पर विभव और विद्युत क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

हल : $\because q_1 = 1.5\mu C = 1.5 \times 10^{-6}$ C

तथा $q_2 = 2.5\mu C = 2.5 \times 10^{-6}$ C



तथा दोनों आवेशों के बीच की दूरी $= r = 30\text{cm} = 0.30\text{m}$

माना रेखा AB का मध्य-बिन्दु O है।

(a) यदि आवेशों $1.5\mu C$ एवं $2.5\mu C$ के कारण O पर विभव क्रमशः V_1 एवं V_2 हैं, तब

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q}{r}$$

$$V_1 = 9\times10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2} \times \frac{1.5\times10^{-6}\ \text{C}}{0.15\ \text{m}}$$

या $V_1 = 9\times10^4$ V

तथा $V_2 = 9\times10^9\ \text{Nm}^2\ \text{C}^{-2} \times \frac{2.5\times10^{-6}\ \text{C}}{0.15\ \text{m}}$

या $V_2 = 15\times10^4$ V

यदि दोनों आवेशों के कारण O पर कुल विभव $= V$

तब $V = V_1 + V_2$

या $V = 9\times10^4\ \text{V} + 15\times10^4\ \text{V}$

या $V = 24\times10^4$ V

या $V = 2.4\times10^5$ V

अब माना O पर कुल विद्युत क्षेत्र $= E$

यदि आवेश q_1 एवं q_2 के कारण O पर क्रमशः विद्युत क्षेत्र E_1 एवं E_2 हैं, तब

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q}{r^2}$$

$E_1 = 9\times10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2}$

$\times \frac{1.5\times10^{-6}\ \text{C}}{(0.15)^2\ \text{m}^2}$ OB के अनुदिश

तथा $E_2 = 9\times10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2} \times \frac{2.5\times10^{-6}\ \text{C}}{(0.15\ \text{m})^2}$

OA के अनुदिश

$\because E_2 > E_1$ O पर कुल विद्युत क्षेत्र OA की ओर

$$E = E_2 - E_1$$

या $E = 9\times10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2} \times \frac{2.5\times10^{-6}\ \text{C}}{(0.15)^2\ \text{m}^2}$

$-9\times10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2} \times \frac{1.5\times10^{-6}\ \text{C}}{(0.15)^2\ \text{m}^2}$

या $E = \frac{9\times10^9\times10^{-6}\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2}}{(0.15\ \text{m})^2}(2.5-1.5)\text{C}$

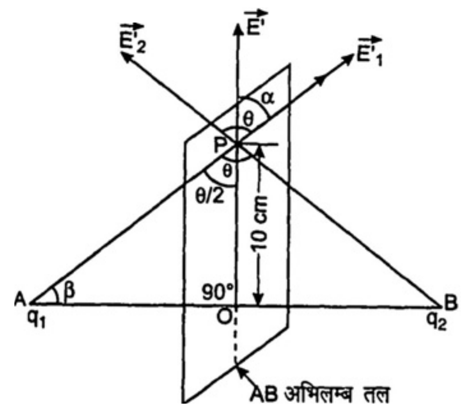
या $E = \frac{9\times10^3}{1.5\times1.5}\times10^4\times1.0\text{NC}^{-1}$

या $E = 4.0\times10^5\ \text{NC}^{-1}$ OA के अनुदिश q_1 की ओर

या $E = 4.0\times10^5\ \text{Vm}^{-1}$, $2.5\mu C$ से $1.5\mu C$ की ओर।

अतः विभव $= 2.4\times10^5$ V तथा कुल विद्युत क्षेत्र $= 4.0\times10^5\ \text{Vm}^{-1}$ ओर आवेश $2.5\mu C$ से $1.5\mu C$ तक है। **उत्तर**

(b) माना O में से जाने वाले AB पर अभिलम्ब तल में O से 10cm दूर बिन्दु P है।



$AO = OB = 0.15\text{m}$

तथा $OP = 10\text{cm} = 0.10\text{m}$

माना P पर कुल विभव $= V'$

समकोण त्रिभुज AOP में,

$$AP = \sqrt{AO^2 + OP^2}$$

या $AP = \sqrt{[(0.15)^2 + (0.10)^2]}$ m

या $AP = 0.18$ m

इसी प्रकार, $BP = 0.18$ m

अब $V' = V_1 + V_2$

$\therefore \quad V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{AP} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2}{BP}$

या $V' = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$

$\times \frac{1.5 \times 10^{-6} \text{ C}}{0.18 \text{m}} + 9 \times 10^9 \text{Nm}^2\text{C}^{-2} \times \frac{2.5 \times 10^{-6} \text{ C}}{0.18 \text{m}}$

या $V' = \frac{9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}}{0.18} \cdot [1.5 + 2.5] \times 10^{-6} \text{ C}$

या $\quad V' = \frac{9 \times 10^3 \times 4}{0.18} \text{V}$

$V = 2 \times 10^5 \text{ V}$

माना q_1 एवं q_2 के कारण P पर विद्युत क्षेत्र क्रमश: E_1 एवं E_2 है।

तब $\quad E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{AP^2}$ AP के अनुदिश

या $\quad E_1 = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \times \frac{1.5 \times 10^{-6} \text{C}}{(0.18)^2 \text{m}^2}$

या $\quad E_1 = 0.42 \times 10^6 \text{ NC}^{-1}$ AP के अनुदिश

तथा $\quad E_2 = 9 \times 10^9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \times \frac{2.5 \times 10^{-6} \text{ C}}{(0.18 \text{m})^2}$

या $\quad E_2 = 0.69 \times 10^6 \text{ NC}^{-1}$

$\because \quad \angle APB = \theta$

$\therefore \quad \angle APO = \frac{\theta}{2}$

अब समकोण ΔAOP में,

$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{OP}{AP} = \frac{0.10}{0.18}$

या $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{5}{9} = 0.556$

$\therefore \quad \frac{\theta}{2} = \cos^{-1}(0.556) = 56.25°$

$\therefore \quad \theta = 112.5°$

यदि q_1 एवं q_2 के कारण P पर परिणामी विद्युत क्षेत्र $= E$

तब $\quad R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$

$\because \quad E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\theta}$

या $E = \sqrt{(0.42 \times 10^6)^2 + (0.69 \times 10^6)^2 + 2 \times 0.42 \times 0.69 \times (-0.38) \times 10^{12}} \text{ NC}^{-1}$

[$\because$ cos (12.5°) = –0.38]

या $E = 10^6 \sqrt{(0.42)^2 + (0.69)^2 - 2 \times 0.42 \times 0.69 \times 0.38} \text{NC}^{-1}$

या $E = 10^6 \sqrt{(0.1764 + 0.4761 - 0.2202)} \text{NC}^{-1}$

या $E = 10^6 \sqrt{0.4323} \text{ NC}^{-1}$

या $E = 10^6 \times 0.658 \text{NC}^{-1}$

या $E = 6.58 \times 10^5 \text{ NC}^{-1}$

या $E = 6.6 \times 10^5 \text{ NC}^{-1}$

या $E = 6.6 \times 10^5 \text{ Vm}^{-1}$

अब माना E से α कोण बनाता है।

$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{E_2 \sin\theta}{E_1 + E_2\cos\theta}$

या $\quad \tan\alpha = \frac{0.69 \times 10^6 \times 0.9239}{0.42 \times 10^6 + 0.69 \times 10^6 \times (-0.38)}$

[$\because$ sin θ = sin 42.5° = 0.9239]

या $\quad \tan\alpha = \frac{0.64 \times 10^6}{(0.42 - 0.26) \times 10^6}$

या $\quad \tan\alpha = \frac{0.64}{0.42 - 0.26}$

या $\quad \tan\alpha = \frac{0.64}{0.16}$

या $\quad \tan\alpha = 4$

$\alpha = \tan^{-1} 4 = 75.9°$

पुन: माना $\angle PAB = \beta$

तब समकोण त्रिभुज AOP में,

$\beta + \frac{\theta}{2} = 90°$

या $\quad \beta = 90° - \frac{\theta}{2}$

या $\quad \beta = 90° - 56.25° \quad$ **[$\because \theta = 112.5°$]**

या $\quad \beta = 33.75°$

या $\quad \beta = 33.8°$

AB रेखा से **E** द्वारा बनाया कोण $= \beta + \alpha$

$= 33.8° + 75.9° = 109.7°$

तथा q_1 एवं q_2 को मिलाने वाली रेखा अर्थात् AB से **E** द्वारा बनाया कोण $= 180° - 109.7° = 70.3° = 70°$

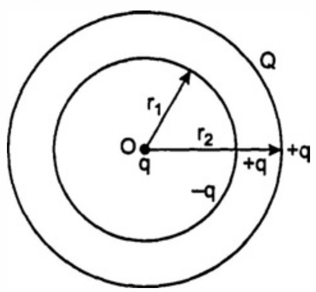
अत: **विभव $= 2.0 \times 10^5$ V तथा नेट विद्युत क्षेत्र $= 6.6 \times 10^5$ Vm^{-1} और आवेश 2.5μC से 1.5μC को मिलाने वाली रेखा से लगभग 70° के कोण की दिशा में है।** **उत्तर**

प्रश्न 2.15. आंतरिक त्रिज्या r_1 तथा बाह्य त्रिज्या r_2 वाले एक गोलीय चालक स्रोत (कोश) पर Q आवेश है।

(a) खोल के केंद्र पर एक आवेश q रखा जाता है। खोल के भीतरी और बाहरी पृष्ठों पर पृष्ठ आवेश घनत्व क्या है?

(b) क्या किसी कोटर (जो आवेश विहीन है) में विद्युत क्षेत्र शून्य होता है, चाहे खोल गोलीय न होकर किसी भी अनियमित आकार का हो? स्पष्ट कीजिए।

हल : (a) चूँकि खोखले चालक को दिया गया आवेश चालक के पृष्ठ पर फैल जाता है और चालक के अंदर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है।



इस प्रकार गोलीय खोखले गोले को दिया गया आवेश Q उसके बाहरी पृष्ठ पर फैल जाएगा। उसी खोखले गोले के केन्द्र पर अन्य आवेश q रखा जाता है और गोले की आंतरिक त्रिज्या r_1 है।

यह खोल के आंतरिक पृष्ठ पर $-q$ और बाह्य पृष्ठ पर $+q$ आवेश उत्प्रेरित करेगा, जो r_2 त्रिज्या गोले खोल के बाह्य पृष्ठ पर स्थानान्तरित हो जायेगा।

अत: बाह्य पृष्ठ पर कुल आवेश $Q+q$ होगा।

माना आंतरिक एवं बाह्य खोखले पृष्ठों के क्षेत्रफल क्रमश: A_1 एवं A_2 हैं।

$\because \quad A_1 = 4\pi r_1^2$

तथा $\quad A_2 = 4\pi r_2^2$

यदि $-q$ तथा $Q+q$ के कारण विद्युत क्षेत्र क्रमश: E_1 एवं E_2 हैं, तब

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r_1^2}$$

तथा
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q+q}{r_2^2}$$

माना खोल के आंतरिक एवं बाह्य पृष्ठों को आवेश घनत्व क्रमश: σ_1 तथा σ_2 हैं।

$\therefore \quad \sigma_1 = \varepsilon_0 E_1$

या
$$\sigma_1 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{r_1^2}$$

तथा $\quad \sigma_2 = \varepsilon_0 E_2$

या
$$\sigma_2 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q+q}{r_2^2}$$

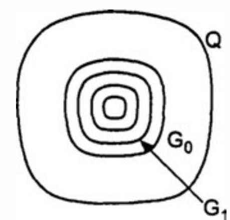
अत: **खोल के भीतरी और बाहरी पृष्ठों पर पृष्ठ आवेश घनत्व क्रमश: $\frac{q}{4\pi r_1^2}$ और $\frac{(Q+q)}{4\pi r_2^2}$ हैं।** **उत्तर**

(b) हाँ, गाउस के नियमानुसार,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$\therefore \quad \mathbf{E} = 0$

किसी भी यादृच्छिक आकार के कोटर के लिए यह पर्याप्त नहीं है कि उसके लिए कोटर के अंदर $\mathbf{E} = 0$ की उपस्थिति को प्रस्तुत किया जाए, कोटर में समान ऋणात्मक तथा धनात्मक आवेश हो सकते हैं, जिससे कुल आवेश शून्य है।



अत: आवेश चालक के बाह्य पृष्ठ पर स्थित रहना चाहता है। यह परिणाम कोटर के आकार एवं आकृति से स्वतन्त्र है।

कोटर को घेरने वाले आंतरिक पृष्ठ, जिस पर कोई आवेश नहीं है, परन्तु गाउस के नियम से नेट आवेश शून्य होना चाहिए।

यादृच्छिक आकृति वाले कोटर के लिए पर्याप्त नहीं है कि यह दावा किया जाए कि उसके अन्दर विद्युत क्षेत्र शून्य होना चाहिए। कोटर पर ऋण एवं धन आवेश हो सकते हैं, जिससे कुल आवेश शून्य हो।

इस संभावना को समाप्त करने के लिए, एक बंद लूप लेते हैं, जिसका एक भाग क्षेत्र रेखाओं के अनुदिश कोटर में हो और शेष भाग चालक के अंदर हो।

चूँकि चालक के अन्दर विद्युत क्षेत्र शून्य है।

यह बंद लूप पर एक परीक्षण आवेश को ले जाने में विद्युत क्षेत्र द्वारा किया गया नेट कार्य देता है।

किसी स्थिर वैद्युत क्षेत्र के लिए यह असंभव है।

अत: **कोटर के अंदर क्षेत्र रेखाएँ नहीं हैं (अर्थात् कोई क्षेत्र नहीं) और चाहे उसकी कैसी भी आकृति हो चालक के भीतरी पृष्ठ पर कोई आवेश नहीं होगा। उत्तर**

प्रश्न 2.16. (a) दर्शाइए कि आवेशित पृष्ठ के एक पार्श्व से दूसरे पार्श्व पर स्थिरवैद्युत क्षेत्र के अभिलंब घटक के असांतत्य होता है, जिसे

$$(E_2 - E_1).\hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है, जहाँ $\hat{n}$ एक बिंदु पर पृष्ठ के अभिलंब एकांक सदिश है तथा σ उस बिंदु पर पृष्ठ आवेश घनत्व है ($\hat{n}$ की दिशा पार्श्व 1 से पार्श्व 2 की ओर है)।

अत: दर्शाइए कि चालक के ठीक बाहर विद्युत क्षेत्र $\sigma\hat{n}/\varepsilon_0$ है।

(b) दर्शाइए कि आवेशित पृष्ठ के एक पार्श्व से दूसरे पार्श्व पर स्थिरवैद्युत क्षेत्र का स्पर्शीय घटक संतत है।

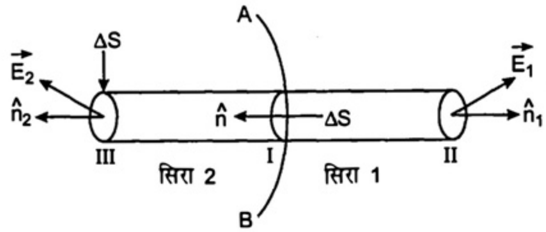
[संकेत : (a) के लिए गाउस-नियम का उपयोग कीजिए।

(b) के लिए इस सत्य का उपयोग करें कि संवृत पाश पर एक स्थिर वैद्युत क्षेत्र द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है।]

हल : (a) चित्रानुसार माना AB आवेशित पृष्ठ है, जिसके दो सिरे हैं। आवेशित पृष्ठ का एक छोटा-सा अवयव Δs बंद किए हुए बेलन गाउसीय पृष्ठ है।

माना σ = पृष्ठीय आवेश घनत्व

गाउसीय बेलन द्वारा आवृत आवेश $= q = \sigma\Delta s$



गाउसीय नियम के अनुसार,

$$\oint_S \mathbf{A}.d\mathbf{S} = \oint_{I} \mathbf{A}.d\mathbf{S} + \oint_{II} \mathbf{A}.d\mathbf{S} + \oint_{III} \mathbf{A}.d\mathbf{S}$$

या $$\oint_s \mathbf{A}.d\mathbf{S} = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

या $$\oint_{II} \mathbf{A}.d\mathbf{S} + \oint_{III} \mathbf{A}.d\mathbf{S} = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0} \quad \left[\because \oint_{I} \mathbf{A}.d\mathbf{S} = 0\right]$$

[$\because$ जब $\theta = 90°$, $\therefore \cos\theta = 0°$]

या $$\mathbf{E_1}.\Delta s\hat{n}_1 + \mathrm{E}_2.\Delta s\hat{n}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\Delta S$$

जहाँ $\mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$ बेलन के भाग II एवं III है, जहाँ यह वृत्ताकार है, उस पर विद्युत क्षेत्र है।

या $$\mathbf{E_1}.\hat{n}_1 + \mathbf{E_2}.\hat{n}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

या $$\mathbf{E_1}.(-\hat{n}_2) + \mathbf{E_2}.(\hat{n}_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad [\because \hat{n}_1 = -\hat{n}_2]$$

या $$(\mathbf{E_2} - \mathbf{E_1}).\hat{n}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

या $$(\mathbf{E_2} - \mathbf{E_1}).\hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

($\because \hat{n}_1 = \hat{n}$ =एकांक सदिश 1 से 2 की ओर) ...(i)

$\because \mathbf{E_1}$ चालक के अंदर है।

$\therefore$ चालक के अंदर विद्युत क्षेत्र शून्य है।

$\therefore$ $$\mathbf{E_1} = 0$$

समीकरण (i) से,

$$\mathbf{E_2}.\hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

या $$(\mathbf{E_1}.\hat{n}).\hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

या $$\mathbf{E_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\hat{n} \quad [\because \hat{n}.\hat{n} = 1]$$

अत: **चालक के ठीक बाहर विद्युत क्षेत्र** $= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \hat{n}$

इति सिद्धम्

(b) माना मूल पर बिन्दु आवेश q के क्षेत्र में $AaBb$ एक पृष्ठ है।

माना बिन्दु A तथा B के स्थिति सदिश क्रमश: $\mathbf{r_A}$ एवं $\mathbf{r_B}$ हैं।

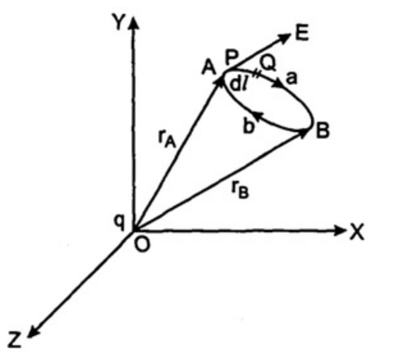
माना बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र $= \mathbf{E}$

इस प्रकार, $E\cos\theta$, विद्युत क्षेत्र $\mathbf{E}$ का स्पर्शीय घटक है।

$\therefore \quad \mathbf{E.D}l = E\,dl\cos\theta = (E\cos\theta)\,dl$

यह सिद्ध करने के लिए कि आवेशित पृष्ठ एक ओर से दूसरी ओर $E\cos\theta$ सतंत है।

हम $\oint_{AaBb} \mathbf{E}.\boldsymbol{dl}$ का मान ज्ञात करते हैं।



यदि यह मान शून्य आता है, तो $\mathbf{E}$ का स्पर्शीय घटक सतंत है।

$$\therefore \int_A^B \mathbf{E}.dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$\text{या} \int_B^A \mathbf{E}.dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$\therefore \int_{AaBbA} \mathbf{E}.\boldsymbol{dl} = \int_B^A \mathbf{E}.\boldsymbol{dl} + \int_B^A \mathbf{E}.\boldsymbol{dl}$$

$$\text{या} \int_{AaBbA} E.dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \times 0$$

$$= 0$$

अत: **आवेशित पृष्ठ के एक पार्श्व से दूसरे पार्श्व पर स्थिर वैद्युत क्षेत्र का स्पर्शीय घटक संतत है। इति सिद्धम्**

प्रश्न 2.17. रैखिक आवेश घनत्व λ वाला एक लंबा आवेशित बेलन एक खोखले समाक्षीय चालक बेलन द्वारा घिरा है। दोनों बेलनों के बीच के स्थान में विद्युत क्षेत्र कितना है?

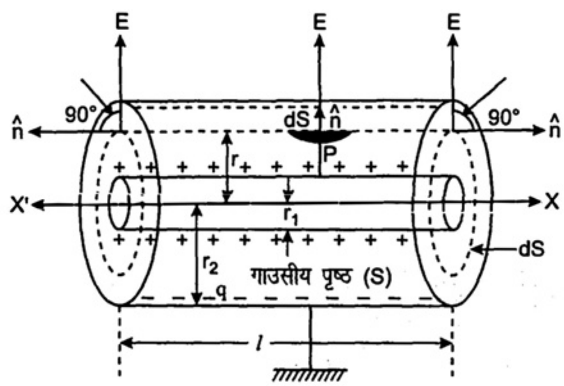
हल : दो समकक्षीय प्रत्येक l लम्बाई के दो खोखले बेलन बाह्य एवं आंतरिक त्रिज्या क्रमश: r_2 एवं r_1 $(r_2 > r_1)$ को मानते हैं। आंतरिक बेलन रैखिक आवेश घनत्व λ से आवेशित है तथा r_2 त्रिज्या के बाह्य बेलन से घिरा है।

हमें दोनों बेलनों के बीच के स्थान में विद्युत क्षेत्र $\mathbf{E}$ ज्ञात करना है।

यदि आंतरिक बेलन पर q आवेश है, तब $q = \lambda l$ प्रेरण से खोखले बेलन पर $-q$ आवेश उत्प्रेरित होता है और इसके बाह्य पृष्ठ पर $+q$ आवेश उत्प्रेरित होता है, जो स्वयं प्राप्त होता है।

माना दोनों बेलनों के बीच के स्थान में, जिसमें $\mathbf{E}$ ज्ञात करना है,

XX' अक्ष से r दूरी पर बिन्दु P है।



लम्बाई l तथा r त्रिज्या का एक गाउसीय बेलन बनाते हैं। इसके पृष्ठ पर P बिन्दु स्थित हैं।

गाउसीय पृष्ठ पर आवेश $q = \lambda l$

बेलनीय सममिति के कारण बेलन के पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र $\mathbf{E}$ एकसमान होगा।

इसके परिणाम में और बेलन पर खींचे अभिलम्ब दिशा में बाहर की और होंगे।

गाउसीय पृष्ठ के वक्रीय पृष्ठ के क्षेत्रफल $q = 2\pi rl$

बिन्दु P पर वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल का एक अवयव ds लेते हैं।

यदि $d\mathbf{S}$ में से विद्युत अभिवाह $= d\phi$

परिभाषानुसार,

$$d\phi = \mathbf{E}.\, d\mathbf{S}$$

या $\quad d\phi = Eds\cos 0°$

या $\quad d\phi = \mathbf{E}d\mathbf{S}$

[$\because$ **E एवं $d\mathbf{S}\,\hat{n}$ के अनुदिश है।**]

यदि सभी गाउसीय पृष्ठ में कुल विद्युत अभिवाह $= \phi$,

तब $\quad \phi_1 = \int_{\text{वक्र पृष्ठ}} d\phi$

या $\quad \phi_1 = \oint_{2\pi rl} E.\, dS$

या $\quad \phi_1 = E \oint_{2\pi rl} dS$

या $\quad \phi = 2\pi rlE$

$\because$ **E** संपूर्ण गाउसीय पृष्ठ पर अचर है।

इसके अतिरिक्त माना गाउसीय पृष्ठ की दोनों टोपियों में विद्युत अभिवाह $= \phi_2$

तब $\quad \phi_2 = \mathbf{E}.\, d\mathbf{S} + \mathbf{E}.\, d\mathbf{S}$

या $\quad \phi_2 = 2\mathbf{E}.\, d\mathbf{S}$

या $\quad \phi_2 = 2\mathbf{E}.\, \hat{n}d\mathbf{S} = 0 \qquad [\because \mathbf{E} \perp \hat{n}]$

यदि संपूर्ण गाउसीय पृष्ठ में से कुल विद्युत अभिवाह $= \phi$

तब $\quad \phi = \phi_1 + \phi_2$

या $\quad \phi = E \times 2\pi rl + 0$

या $\quad \phi = 2E \times \pi rl$

अब गाउस के नियमानुसार,

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

या $\quad 2E \times \pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

अत: $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$, **जहाँ बेलनों के समाक्ष से बिंदु की दूरी r है तथा क्षेत्र अक्ष के अभिलंब त्रिज्यीय है।**

इति सिद्धम्

प्रश्न 2.18. एक हाइड्रोजन परमाणु में इलेक्ट्रॉन तथा प्रोटॉन लगभग 0.53 Å दूरी पर परिबद्ध है :

(a) निकाय की स्थितिज ऊर्जा का eV में परिकलन कीजिए, जबकि प्रोटॉन से इलेक्ट्रॉन के मध्य की अनंत दूरी पर स्थितिज ऊर्जा को शून्य माना गया है।

(b) इलेक्ट्रॉन को स्वतंत्र करने में कितना न्यूनतम कार्य करना पड़ेगा, यदि वह दिया गया है कि इसकी कक्षा में गतिज ऊर्जा (a) में प्राप्त स्थितिज ऊर्जा के परिमाण की आधी है?

(c) यदि स्थितिज ऊर्जा को 1.06 Å पृथक्करण पर शून्य ले लिया जाए, तो उपर्युक्त (a) और (b) के उत्तर क्या होंगे?

हल : प्रोटॉन पर आवेश $q_1 = 1.6 \times 10^{-19}$ C

इलेक्ट्रॉन पर आवेश $= q_2 = -1.6 \times 10^{-19}$ C

तथा हाइड्रोजन परमाणु की त्रिज्या $= r$

$= q_1$ एवं q_2 के बीच दूरी

$= 0.53$ Å

$= 0.53 \times 10^{-10}$ m

(a) यदि विभव ऊर्जा को अनंत पृथक्कीकरण पर शून्य लिया जाए, तब

विभव ऊर्जा = विभवान्तर अनतंता पर − विभवानतर r पर

$$= 0 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r}$$

$$= \frac{-9 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{0.53 \times 10^{-10}} \text{ J}$$

$$= \frac{-9 \times 2.56 \times 10^9 \times 10^{-39}}{0.53 \times 10^{-10}} \text{ J}$$

$$= -\frac{23.04 \times 10^{-29}}{0.53 \times 10^{-10}} \text{ J}$$

$$= -43.47 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$= \frac{-43.47 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV}$$

$[\because 1\,\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\,\text{J}]$

$$= -27.17 \text{eV}$$

$= -27.2 eV$

अत: **निकाय की स्थितिज ऊर्जा = −27.2 eV उत्तर**

(b) माना इलेक्ट्रॉन को स्वतंत्र करने के लिए अभीष्ट न्यूनतम कार्य $= W$

$\because$ कक्षा में गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}$

[भाग (a) की विभव ऊर्जा का परिमाण]

$\therefore$ गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} \times (+27.2 eV)$

$= 13.6 eV$

[$\because$ संकाय की गतिज ऊर्जा सदैव धनात्मक होती है]

$\therefore$ इलेक्ट्रॉन को स्वतंत्र करने के लिए आवश्यक कार्य

$= 0 - (-13.6 \text{ eV}) = 13.6 eV$

अत: **इलेक्ट्रॉन को स्वतंत्र करने में न्यूनतम कार्य करना पड़ेगा = 13.6 eV** उत्तर

(c) इलेक्ट्रॉन तथा प्रोट्रॉन के बीच पृथक्कीकरण की दूरी 1.06 Å पर विभव (स्थितिज ऊर्जा)

$$= \frac{-9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{C}^{-2} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}}{1.06 \times 10^{-10} \text{ m}}$$

$$= \frac{-9 \times 2.56 \times 10^{-29}}{1.06 \times 10^{-10}} \text{ J}$$

$$= -9 \times 2.4 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$= -13.58 eV$$

$$= -13.6 eV$$

अत: जब निकाय की विभव ऊर्जा 1.06 Å पर शून्य ली जाए, तब उसकी विभव स्थितिज ऊर्जा

$$= -27.17 eV - (-13.58 eV)$$

$$= -13.59 eV$$

$$= -13.6 eV$$

अत: **विभव ऊर्जा के शून्य को स्थानान्तरित करने से इलेक्ट्रॉन को स्वतंत्र करने के लिए अभीष्ट ऊर्जा उतनी ही रहती है, जो −(−13.6) eV = +13.6 eV है।** उत्तर

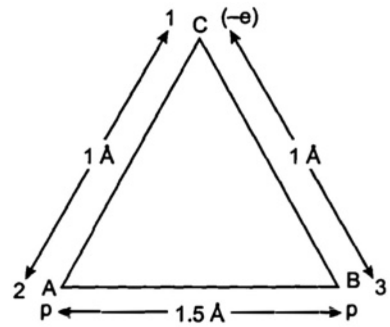
प्रश्न 2.19. यदि H_2 अणु के दो में से एक इलेक्ट्रॉन को हटा दिया जाए, तो हमें हाइड्रोजन आणविक आयन (H_2^+) प्राप्त होगा। (H_2^+) की निम्नतम अवस्था (ground state) में दो प्रोटॉनों के बीच की दूरी लगभग 1.5 Å है और इलेक्ट्रॉन प्रत्येक प्रोटॉन से लगभग 1 Å की दूरी पर है। निकाय की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए। स्थितिज ऊर्जा की शून्य स्थिति के चयन का उल्लेख कीजिए।

हल : $\because$ इलेक्ट्रॉन पर आवेश $= q_1 = -1.6 \times 10^{-19}$ C

प्रत्येक प्रोटॉन पर आवेश $= q_2$

तथा $q_3 = +1.6 \times 10^{19}$ C

दो प्रोटॉनों अर्थात् q_2 तथा q_3 के बीच पृथक्कीकरण



$r_{23} = 1.5$ Å

$r_{23} = 1.5 \times 10^{-10}$ m

प्रोटॉन तथा इलेक्ट्रॉन का पृथक्कीकरण

$= r_{12} = r_{13} = 1$ Å

या $r_{12} = 10^{-10}$ m

यदि विभव ऊर्जा का शून्य अनंत पर लिया जाए, तब विभव (स्थितिज) ऊर्जा

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}}\right]$$

$$= 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}\left[\frac{-(1.6 \times 10^{-19})^2 \text{ C}^2}{10^{-10} \text{ m}} + \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2 \text{ C}^2}{1.5 \times 10^{-10} \text{ m}} + \frac{-(1.6 \times 10^{-19})^2 \text{ C}^2}{10^{-10} \text{ m}}\right]$$

$$= 9\times10^9 \frac{\times(1.6\times10^{-19})^2}{10^{-10}}\left[-1+\frac{1}{1.5}-1\right]J$$

$$= \frac{9\times10^9\times(1.6\times10^{-19})^2}{10^{-10}\times1.6\times10^{-19}}\left[\frac{2}{3}-2\right]eV$$

$$[\because 1\,eV = 1.6\times10^{-19}\,J]$$

$$= \frac{9\times10^9\times1.6\times10^{-19}}{10^{-10}}\times\left(\frac{-4}{3}\right)eV$$

$$= -19.2\,eV$$

विभव ऊर्जा का शून्य अनन्त पर लिया गया है।

अत: **निकाय की स्थितिज ऊर्जा = −19.2 eV तथा स्थितिज ऊर्जा का शून्य अनंत पर लिया गया है।**

उत्तर

प्रश्न 2.20. *a* और *b* त्रिज्याओं वाले दो आवेशित चालक गोले एक तार द्वारा एक-दूसरे से जोड़े गए हैं। दोनों गोलों के पृष्ठों पर विद्युत क्षेत्रों में क्या अनुपात है? प्राप्त परिणाम को, यह समझने में प्रयुक्त कीजिए कि किसी एक चालक के तीक्ष्ण और नुकीले सिरों पर आवेश घनत्व, चपटे भागों की अपेक्षा अधिक क्यों होता है?

हल : $\because$ चालक गोलों की त्रिज्याएँ $= a, b\,(a > b)$

a त्रिज्या के गोले पर आवेश $= q_1$

तथा b त्रिज्या के गोले पर आवेश $= q_2$

यदि a एवं b त्रिज्याओं के गोलों पर विभव क्रमश: V_1 तथा V_2 है, तब

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{a} \quad ...(i)$$

तथा $$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{b} \quad ...(ii)$$

जब दोनों चालक गोलों को तार द्वारा आपस में जोड़ दिया जाता है, तो उनके विद्युत-विभव समान हो जाते हैं अर्थात्

$$V_1 = V_2$$

या $$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{b}$$

या $$\frac{q_1}{a} = \frac{q_2}{b}$$

या $$\frac{q_1/a}{q_2/b} = 1 \quad ...(iii)$$

अब यदि a एवं b त्रिज्याओं के गोलों के पृष्ठों पर विद्युत क्षेत्र क्रमश: E_1 एवं E_2 हों,

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{a^2} \quad ...(iv)$$

तथा $$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{b^2} \quad ...(v)$$

समीकरण (iv) को समीकरण (v) से भाग करने पर,

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{a^2}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{b^2}}$$

या $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{q_1/a^2}{q_2/b^2}$$

या $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{q_1}{a}\cdot\frac{1}{a}}{\frac{q_2}{b}\cdot\frac{1}{b}}$$

या $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{b}{a}\cdot\frac{q_1/a}{q_2/b}$$

या $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{b}{a}\times1 \quad \text{[समीकरण (iii) से]}$$

या $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{b}{a}$$

अत: पहले गोले से दूसरे चालक गोलों के क्षेत्रों का अनुपात $= \frac{b}{a}$

तीक्ष्ण भाग एक अधिक त्रिज्या के गोले के पृष्ठ को माना जा सकता है तथा नुकीला भाग एक छोटी त्रिज्या के गोले को माना जा सकता है।

इसलिए $E \propto \frac{1}{\text{त्रिज्या}}$

तीक्ष्ण भाग का क्षेत्र नुकीले भाग से कम होगा।

$$\because \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad E \propto \sigma$$

अत: **तीक्ष्ण एवं नुकीले भाग का पृष्ठ आवेश घनत्व अधिक होता है।** उत्तर

प्रश्न 2.21. बिंदु (0, 0, – a) तथा (0, 0, a) पर दो आवेश क्रमशः –q और +q स्थित हैं।

(a) बिंदुओं (0, 0, z) और (x, y, 0) पर स्थिरवैद्युत विभव क्या है?

(b) मूल बिंदु से किसी बिंदु की दूरी r पर विभव की निर्भरता ज्ञात कीजिए, जबकि $\frac{r}{a} >> 1$ है।

(c) x-अक्ष पर बिंदु (5, 0, 0) से बिंदु (–7, 0, 0) तक एक परीक्षण आवेश को ले जाने में कितना कार्य करना होगा? यदि परीक्षण आवेश के उन्हीं बिंदुओं के बीच x-अक्ष से होकर न ले जाएँ, तो क्या उत्तर बदल जाएगा?

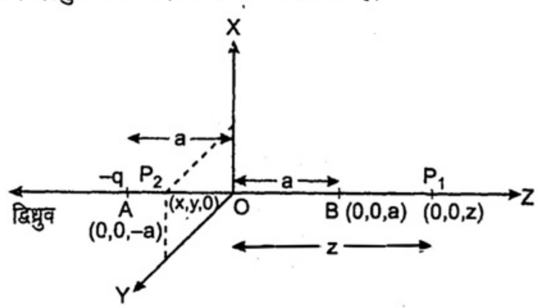
हल : (a) बिंदु $A(0,0,-a)$ तथा $B(0,0,a)$ पर आवेश क्रमशः $-q$ और $+q$ स्थित हैं।

विद्युत-द्विध्रुव की लम्बाई $= 2a$

यदि द्विध्रुव का वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण $= p$

तब $p = 2aq$

माना $P_1(0,0,z)$ बिंदु पर V का मान ज्ञात करना है। यदि द्विध्रुव की अक्षीय रेखा पर स्थित है।



$$\therefore \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(-q)}{AP} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{BP}$$

या $$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}\right]$$

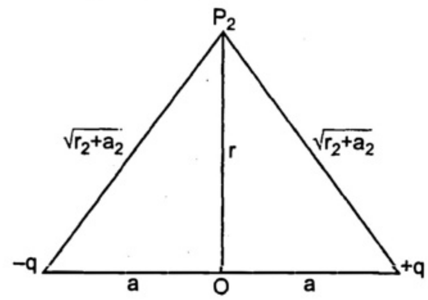
या $$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z+a-z+a}{(z-a)(z+a)}\right]$$

या $$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2a}{z^2-a^2}$$

या $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2aq}{(z^2-a^2)}$$

या $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p}{(z^2-a^2)}$$

अब बिंदु $P_2(x, y, 0)$, xy तल में स्थित है, जो द्विध्रुव अक्ष के अभिलम्ब है अर्थात् विषुवत् रेखा जिस पर द्विध्रुव के कारण विभव शून्य होता है, के समान्तर रेखा पर स्थित है।



माना $OP_2 = r$

$$\therefore \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

यदि P_2 पर विद्युत-विभव $= V'$

तब $$V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-q}{\sqrt{r^2+a^2}} + \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)$$

या $$V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times 0$$

$$V' = 0$$

अतः द्विध्रुव के अक्ष पर विभव

$$= \pm\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p}{(x^2-a^2)}$$

जहाँ $p = 2qa$ द्विध्रुव आघूर्ण का परिमाण है।

धनात्मक चिह्न उस समय जब बिंदु q के समीप है और ऋणात्मक चिह्न वहाँ, जहाँ बिन्दु $-q$ के समीप है।

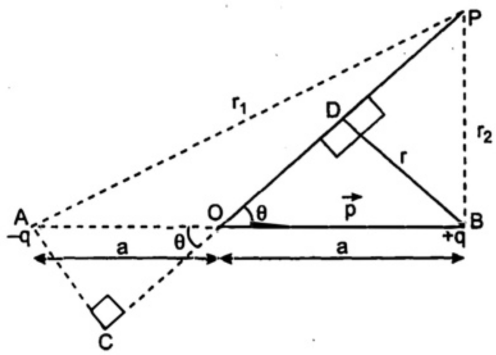
अतः अक्ष के अभितम्बवत् (x, y, 0) बिंदु पर विभव शून्य है। **उत्तर**

(b) माना द्विध्रुव के केन्द्र O से बिंदु P, जहाँ विभव V ज्ञात करना है, की दूरी $= r$

माना $\angle POB = \theta$ अर्थात् OP, **P** से कोण θ बनाती है।

माना $-q$ एवं $+q$ से बिंदु P की दूरियाँ क्रमशः r_1 एवं r_2 हैं।

अब AC तथा BD को OP के लम्बवत् खींचते हैं।



ΔACO में, $OC = a\cos\theta$

तथा ΔBDO में, $OD = a\cos\theta$

यदि आवेश $= -q$ तथा $+q$ के कारण P पर विभव क्रमश: V_1 एवं V_2 हैं, तब P पर कुल विभव

$$V = V_1 + V_2$$

या $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-q}{AP} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{BP}$$

या $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q}{r_1} + \frac{q}{r_2}\right] \quad ...(i)$$

जहाँ $r_1 = AP = CP = OP + OC = r + a\cos\theta$

तथा $r_2 = BP = DP = OP - OD = r - a\cos\theta$

समीकरण (i) में r_1 एवं r_2 के मान रखने पर,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r - a\cos\theta} - \frac{q}{r + a\cos\theta}\right]$$

या $$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{(r + a\cos\theta) - (r - a\cos\theta)}{r^2 - a^2\cos^2\theta}\right)$$

या $$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{2a\cos\theta}{r^2 - a^2\cos^2\theta}\right)$$

या $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p\cos\theta}{r^2 - a^2\cos^2\theta} \quad [\because 2aq = p]$$

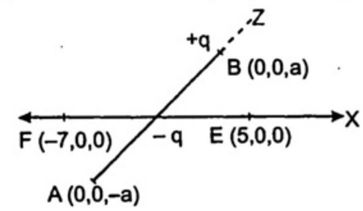
जब $\frac{r}{a} >> 0$ या $r^2 >> a^2 \cos^2\theta$ जिसमें $a^2\cos^2\theta$ को नगण्य मान सकते हैं, तब

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p\cos\theta}{r^2} \quad ...(ii)$$

अत: V की r पर निर्भरता $\frac{1}{r^2}$ प्रकार की है अर्थात्

$V \propto \frac{1}{r^2}$ उत्तर

(c) माना आवेश $+q\,(0, 0, a)$ और $-q\,(0, 0, -a)$ के क्षेत्र में बिंदु $E\,(5, 0, 0)$ से $F\,(-7, 0, 0)$ तक क्रमश: परीक्षण आवेश q_0 को ले जाने में किए गए कार्य W_1 एवं W_2 हैं।



$\therefore \quad BE = 5\hat{i} - a\hat{k}$ तथा $BF = -7\hat{i} - a\hat{k}$

इसी प्रकार,

$AE = 5\hat{i} + a\hat{k}$ तथा $AF = -7\hat{i} + a\hat{k}$

$AE = \sqrt{25 + a^2}$ तथा $BF = \sqrt{49 + a^2}$

या $BE = \sqrt{25 + a^2}$ तथा $AF = \sqrt{49 + a^2}$

$AE = \sqrt{25 + a^2}$ तथा $AF = \sqrt{49 + a^2}$

$$\because \quad W_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$\therefore \quad W_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\left(\frac{1}{BF} - \frac{1}{BE}\right)$$

या $$W_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{49 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{25 + a^2}}\right)$$

तथा $$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot(-q)\left(\frac{1}{AF} - \frac{1}{AE}\right)$$

या $$W_2 = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{49 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{25 + a^2}}\right)$$

यदि कुल किया गया कार्य $= W$

तब $W = W_1 + W_2$

या $$W = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{49 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{25 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{49 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{25 + a^2}}\right]$$

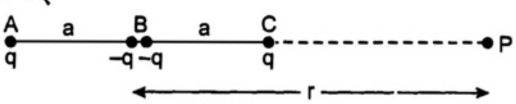
या $$W = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\times 0$$

या $W = 0$

नहीं, चूँकि दो बिन्दुओं के बीच, किसी विद्युत क्षेत्र में किया गया कार्य, उनको मिलाने वाली रेखा से स्वतंत्र होता है।

अत: **परीक्षण को किसी भी मार्ग से ले जाया जा सकता है।** **उत्तर**

प्रश्न 2.22. नीचे दिये गये चित्र में एक आवेश विन्यास जिसे विद्युत चतुर्ध्रुवी कहा जाता है, दर्शाया गया है। चतुर्ध्रुवी के अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के लिए r पर विभव की निर्भरता प्राप्त कीजिए, जहाँ $r/a >> 1$। अपने परिणाम की तुलना एक विद्युत द्विध्रुव व विद्युत एकल ध्रुव (अर्थात् किसी एकल आवेश) के लिए प्राप्त परिणामों से कीजिए।



हल : $\because$ विद्युत चतुर्ध्रुवी A तथा C पर आवेशों $+q, +q$ तथा B पर आवेशों $-q$ और $-q$ से मिलकर बना है।

माना बिंदु B चतुर्ध्रुवी का केन्द्र है।

माना विद्युत चतुर्ध्रुवी के केन्द्र B से बिंदु P उसके अक्ष पर r दूरी पर है।

$\therefore$ $AP = AB + BP$

या $AP = a + r$

$BP = r$ तथा $CP = BP - BC$

या $CP = r - a$

माना चतुर्ध्रुवी के कारण बिन्दु P पर विद्युत विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{q}{AP}+\frac{-q}{BP}+\frac{-q}{BP}+\frac{q}{CP}\right]$$

या $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{r+a}-\frac{2q}{r}+\frac{q}{r-a}\right)$$

या $$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{[r(r-a)-2(r^2-a^2)+r(r+a)]}{r(r^2-a^2)}$$

या $$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{[r^2-ra-2r^2+2a^2+r^2+ra]}{r(r^2-a^2)}$$

या $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\cdot\frac{2a^2}{r(r^2-a^2)}$$

या $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2q}{r}\cdot\frac{1}{\left(\frac{r^2}{a^2}-1\right)} \quad \ldots(i)$$

$\because$ r के लिए,

$$\frac{r}{a} >> 1$$

$\therefore$ $$\frac{r^2}{a^2} >> 1$$

अत: 1 को नगण्य माना जा सकता है।

अब समीकरण (i) से,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2q}{r}\cdot\frac{1}{\left(\frac{r^2}{a^2}\right)}$$

या $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2qa^2}{r^3}$$

या $$V \propto \frac{1}{r^3}$$

विद्युत द्विध्रुव की अक्षीय रेखा पर विद्युत-विभव

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p}{r^2-a^2}$$

जब $r >> a$, तब

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p}{r^2}$$

या $$V_1 \propto \frac{1}{r^2}$$

अत: एक एकल आवेश q के कारण अर्थात् एक ध्रुवी आवेश तथा r दूरी पर विभव

$$V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}$$

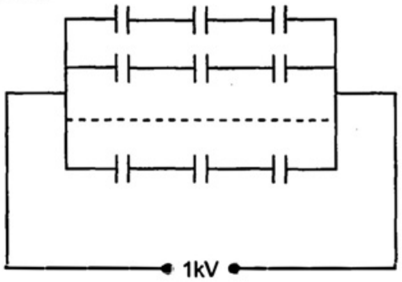
या $$V' \propto \frac{1}{r}$$

अत: **अधिक या बड़े r के लिए चतुर्ध्रुवी के कारण विभव दूरी r के घन के व्युत्क्रमानुपाती जब एक द्विध्रुव के कारण दूरी r के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती तथा एक ध्रुवी के कारण दूरी r के व्युत्क्रमानुपाती होता है।** **उत्तर**

प्रश्न 2.23. एक वैद्युत टैक्नीशियन को 1kV विभवांतर के परिपथ में 2μF संधारित्र की आवश्यकता है। 1μF के संधारित्र उसे प्रचुर संख्या में उपलब्ध हैं, जो 400 V से अधिक का विभवांतर वहन नहीं कर सकते। कोई संभव विन्यास सुझाइए, जिसमें न्यूनतम संधारित्रों की आवश्यकता हो।

हल : माना टैक्नीशियन द्वारा उपयुक्त संधारित्रों की संख्या $= N$

माना उनको प्रत्येक n संधारित्रों वाली m पंक्तियों में लगाया गया है।



$\therefore \quad N = mn \quad \ldots(i)$

प्रत्येक संधारित्र की धारिता $= C_1 = 1\mu F$

तथा संयोजन की अभीष्ट धारिता $= 2\mu F = C$

प्रत्येक संधारित्र पर अधिकतम विभवांतर $= 400 V$

सर्किट पर विभवांतर $= 1000 V =$ प्रत्येक पंक्ति पर विभवांतर

$\because$ जब संधारित्रों को श्रेणीक्रम में संयोजित किया जाता है, तब उन पर विभवांतर प्रत्येक पर विभवांतर का योग होता है।

$\therefore$ एक पंक्ति में n संधारित्र $= 400 \times n$

$\therefore \quad 400 \times n = 1000$

या $\quad n = \frac{1000}{400} = 2.5$

चूँकि n पूर्णांक होने चाहिए।

$\therefore \quad n = 3$

माना पंक्ति में संधारित्रों की कुल धारिता $= C$

$\therefore \quad \frac{1}{C'} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 3$

या $\quad C' = \frac{1}{3} \mu F$

ऐसे ही समान्तर क्रम में m पंक्तियों की कुल धारिता

$C = m \times C'$

या $\quad m = \frac{C}{C'}$

या $\quad m = \frac{2\mu F}{\left(\frac{1}{3}\mu F\right)}$

या $\quad m = 2 \times \frac{3}{1} \mu F$

या $\quad m = 6\mu F$

$\therefore \quad N = m \times n = 3 \times 6 = 18$

अत: हमें कुल 18 संधारित्रों को 6 समान्तर पंक्तियों में इस प्रकार जोड़ना पड़ेगा कि प्रत्येक पंक्ति में 3 संधारित्र हों। **उत्तर**

प्रश्न 2.24. 2F वाले समान्तर पट्टिका संधारित्र की पट्टिका का क्षेत्रफल क्या है, जबकि पट्टिकाओं का पृथक्न 0.5 cm है? अपने उत्तर से आप यह समझ जाएँगे कि सामान्य संधारित्र μF या कम परिसर के क्यों होते हैं? तथापि विद्युत-अपघटन संधारित्रों (Electrolytic capacitors) की धारिता कहीं अधिक (0.1 F) होती है, क्योंकि चालकों के बीच अति सूक्ष्म पृथक्न होता है।

हल : $\because$ समान्तर पट्टिका संधारित्र की धारिता $= C = 2F$

इसकी पट्टिका के बीच पृथ्क्करण या वियोजन

$d = 0.5 cm$

या $\quad d = 5 \times 10^{-3}$ m

माना पट्टिका का क्षेत्रफल $= A$

तथा $\quad \varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$

$\because \quad C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

$\therefore \quad A = \frac{Cd}{\varepsilon_0}$

या $\quad A = \frac{2 \times 5 \times 10^{-3} \text{ Fm}}{8.854 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^2}$

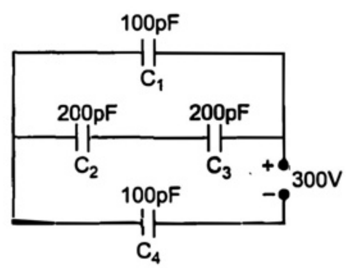
या $\quad A = 1.13 \times 10^9 m^2$

या $\quad A = 1130 \times 10^6 m^2$

या $\quad A = 1130 km^2$

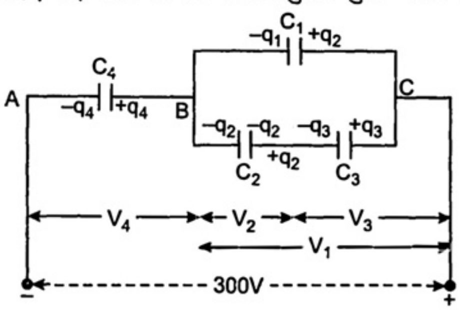
चूँकि यह क्षेत्रफल इतना बड़ा है कि इसे प्राप्त करना असंभव है। यही कारण है कि सामान्य संधारित्र 2 F संधारिता से बहुत कम परिसर के होते हैं। **उत्तर**

प्रश्न 2.25. चित्र के नेटवर्क (जाल) की तुल्य धारिता प्राप्त कीजिए। 300 V संभरण (सप्लाई) के साथ प्रत्येक संधारित्र का आवेश व उसकी वोल्टता ज्ञात कीजिए।



हल : माना जाल की तुल्य धारिता C है।

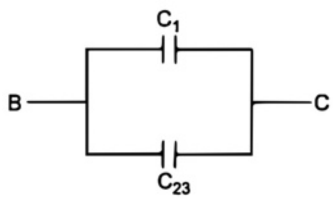
दिए गए जाल को निम्न चित्रानुसार पुनः बनाते हैं।



$\because \quad C_1 = C_4 = 100\text{pF} = 10^{-10}\text{ F}$

तथा C_2 और C_3 श्रेणीक्रम में समायोजित हैं।

यदि श्रेणीक्रम में समायोजित C_2 एवं C_3 की तुल्य धारिता C_{23} है, तब



$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

या $$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{200} + \frac{1}{200}$$

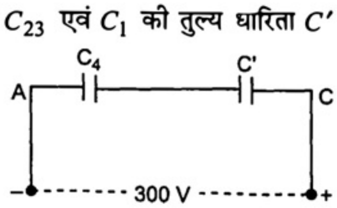
या $$\frac{1}{C_{23}} = \frac{2}{200}$$

या $$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{100}$$

$\therefore \quad C_{23} = 100\text{pF} = 10^{-10}\text{ F}$

अब C_{23} एवं C_1 समान्तर समायोजन में हैं।

यदि C_{23} एवं C_1 की तुल्य धारिता C' है, तब



$$C' = C_{23} + C_1$$

या $$C' = 100\text{pF} + 100\text{pF}$$

या $$C' = 200\text{pF} = 2\times10^{-10}\text{ F}$$

अब C_4 तथा C' श्रेणीक्रम में हैं।

यदि C_4 और C' श्रेणी समायोजन की तुल्य धारिता C है, तब

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C_4}$$

या $$\frac{1}{C} = \frac{1}{200} + \frac{1}{100}$$

या $$\frac{1}{C} = \frac{1+2}{200}$$

या $$\frac{1}{C} = \frac{3}{200}$$

$\therefore \quad \mathbf{C = \frac{200}{3}\text{ pF}}$ **उत्तर**

अब माना संधारित्रों C_1, C_2, C_3 तथा C_4 पर क्रमशः q_1, q_2, q_3 और q_4 आवेश हैं।

माना उन पर क्रमशः V_1, V_2, V_3 तथा V_4 विभव हैं।

अब चूँकि C' तथा C_4 श्रेणी क्रम में हैं।

इसलिए C' पर q_4 आवेश होगा।

$\therefore \quad C'$ पर विभव $= \frac{q_4}{C'}$

या $\quad C'$ पर विभव $= \frac{q_4}{2\times10^{-10}}\text{ V}$

तथा $\quad V_4 = C_4$ पर विभव $= \frac{q_4}{C_4}$

या $$V_4 = \frac{q_4}{10^{-10}}\text{ V}$$

अब C' और C_4 के श्रेणीक्रम पर 300 V संभरण लगा है।

$\therefore C'$ पर विभवांतर $+ C_4$ पर विभवांतर $= 300\text{ V}$

या $$\frac{q_4}{2\times10^{-10}} + \frac{q_4}{10^{-10}} = 300$$

या $$\frac{q_4 + 2q_4}{2\times10^{-10}} = 300$$

या $$\frac{3q_4}{2\times10^{-10}} = 300$$

$\therefore$ $$q_4 = \frac{300\times2\times10^{-10}}{3}\text{ C}$$

या $$q_4 = 2\times10^{-8}\text{ C}$$

$\therefore \quad V_4 = \frac{2\times10^{-8}}{10^{-10}} V \quad \left[\because V_4 = \frac{q_4}{10^{-10}} V\right]$

या $\quad V_4 = 2\times10^2 V$

या $\quad V_4 = 200 V$

C' पर विभवान्तर $= 300V - V_4$

$= 300V - 200V$

$= 100V$

$= C_1$ या C_{23} पर विभवान्तर

[$\because C_1$ तथा C_{23} समान्तर क्रम में हैं]

इस प्रकार, C_{23} पर विभवान्तर V

$= C$ पर विभवांतर $= C_1$ पर विभवांतर $= 100V$

या $\quad V_1 = 100V$

$\therefore \quad q_1 = C_1 V_1$

या $\quad q_1 = 100\times10^{-12}\times100C$

या $\quad q_1 = 10^{-8} C$

अब चूँकि C_2 तथा C_3 की धारिता समान है और यह श्रेणी क्रम में समायोजित है।

अत: प्रत्येक संधारित्र पर समान आवेश होना चाहिए।

या $\quad q_2 = q_3$

या $\quad C_2V_2 = C_3V_3$

या $\quad V_2 = V_3 \quad [\because C_2 = C_3]$

तथा $V_2 + V_3 = 100V$

या $V_2 + V_2 = 100$

या $\quad 2V_2 = 100V$

$\therefore \quad V_2 = \frac{100}{2} V$

या $\quad V_2 = 50V$

$q_2 = q_3 = 200\times10^{-12}\times50C$

$= 10^{-8} C$

अत: $\quad \mathbf{q_1 = 10^{-8}C, q_2 = q_3 = 10^{-8}C,}$

$\mathbf{q_4 = 2\times10^{-8}C, V_1 = 100V,}$

$\mathbf{V_2 = V_3 = 50V}$

तथा $\quad \mathbf{V_4 = 200V}$ **उत्तर**

प्रश्न 2.26. किसी समान्तर पट्टिका संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका का क्षेत्रफल $90\,cm^2$ है और उनके बीच पृथक्न 2.5 mm है। 400 V संभरण से संधारित्र को आवेशित किया गया है।

(a) संधारित्र कितना स्थिरवैद्युत ऊर्जा संचित करता है?

(b) इस ऊर्जा को पट्टिकाओं के बीच स्थिरवैद्युत क्षेत्र में संचित समझकर प्रति एकांक आयतन ऊर्जा u ज्ञात कीजिए। इस प्रकार, पट्टिकाओं के बीच विद्युत क्षेत्र E के परिमाण और u में सम्बन्ध स्थापित कीजिए।

हल : $\because$ समान्तर पट्टिका संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका का क्षेत्रफल $= A$

$\therefore \quad A = 90 cm^2$

या $\quad A = 90\times10^{-4} m^2$

पट्टिकाओं के बीच की दूरी $= d = 2.5 mm$

$= 2.5\times10^{-3} m$

तथा संभरण वोल्टता $= V = 400V$

(a) संधारिता द्वारा संचित स्थिर वैद्युत ऊर्जा $= u$

समान्तर पट्टिकाओं की धारिता $= C$

$\therefore \quad C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

या $C = \frac{8.854\times10^{-12} C^2N^{-1}m^{-2}\times90\times10^{-4} m^2}{2.5\times10^{-4} m^2}$

या $\quad C = \frac{7.97\times10^{-10}}{2.5} F$

या $\quad C = 3.186\times10^{-10} F$

$\because \quad u = \frac{1}{2}CV^2$

$\therefore \quad u = \frac{1}{2}\times3.186\times10^{-11} F\times(400)^2 J$

$= 2.55\times10^{-6} J$

अत: **संधारित्र स्थिर वैद्युत ऊर्जा संचित करता है $\mathbf{= 2.55\times10^{-6} J}$ उत्तर**

(b) $\because$ संधारित्र द्वारा संचित स्थिर वैद्युत ऊर्जा $= u$

$\therefore \quad u = \frac{1}{2}CV^2 \quad \ldots(i)$

इसे पट्टिकाओं के बीच संचित स्थिर वैद्युत क्षेत्र ऊर्जा मान सकते हैं।

समान्तर संधारित्र का आयतन

$V =$ पट्टिका का क्षेत्रफल $\times$ पट्टिकाओं के बीच की दूरी

$= A\times d \quad \ldots(ii)$

संधारित्र के प्रति एकांक आयतन में संचित ऊर्जा, जिसे ऊर्जा घनत्व (σ) कहते हैं।

$$\therefore \quad \sigma = \frac{\text{ऊर्जा}}{\text{आयतन}} = \frac{U}{V}$$

या $$\sigma = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} \quad \ldots(iii)$$

$$\because \quad C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

तथा V = विभवांतर $= Ed$ ...(iv)

= पट्टिकाओं के बीच विद्युत क्षेत्र का परिणाम × दूरी

समीकरणों (iii) एवं (iv) से,

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)\times(Ed)^2}{Ad}$$

या $$\sigma = \frac{1}{2}\times\frac{\varepsilon_0 A}{d}\times\frac{E^2 d^2}{Ad}$$

या $$\sigma = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

जो σ एवं विद्युत क्षेत्र E के मध्य अभीष्ट सम्बन्ध है।

$$\therefore \quad \sigma = \frac{\text{स्थिर वैद्युत ऊर्जा}}{\text{आयतन}} = \frac{U}{Ad}$$

या $$\sigma = \frac{2.55\times10^{-6}}{90\times10^{-4}\times2.5\times10^{-3}}\ \text{Jm}^{-3}$$

या $$\sigma = \frac{2.55\times10^{-6}}{2.25\times10^{-5}}\ \text{Jm}^{-3}$$

या $$\sigma = 0.113\ \text{Jm}^{-3}$$

अत: $\sigma = \mathbf{0.113\ Jm^{-3}}$ **उत्तर**

प्रश्न 2.27. एक 4μF संधारित्र को 200 V संभरण (सप्लाई) से आवेशित किया गया है। फिर संभरण से हटाकर इसे एक अन्य अनावेशित 2μF के संधारित्र से जोड़ा जाता है। पहले संधारित्र की कितनी स्थिर वैद्युत ऊर्जा का ऊष्मा और वैद्युत चुम्बकीय विकिरण के रूप में ह्रास होता है?

हल : $\because C_1 = 4\mu F = 4\times10^{-6}$ F

तथा V_1 = संधारित्र से जुड़े संभरण का विभव = 200V

यदि C_1 द्वारा संचित प्रारम्भिक ऊर्जा $= U_1$

तब $$U_1 = \frac{1}{2}C_1V_1^2$$

या $$U_1 = \frac{1}{2}\times4\times10^{-6}\times(200)^2\ \text{J}$$

या $$U_1 = 8\times10^{-2}\ \text{J}$$

जब 4μF का संधारित्र अनावेशित 2μF के संधारित्र से जोड़ा जाता है, तो संधारित्र समान्तर क्रम में होता है तथा तब तक उनमें आवेश घटता है, जब तक कि दोनों पर एक सम्मिलित विभव नहीं हो जाता अर्थात् प्रत्येक संधारित्र पर समान विभवांतर हो जाता है।

∴ संधारित्रों पर कुल आवेश

$$q = C_1V_1 + C_2V_2$$
$$= 4\times10^{-6}\times200\text{C} + 0\text{C}$$
$$= 8\times10^{-4}\text{C} \qquad [\because q_2 = 0]$$

माना दोनों संधारित्रों की कुल धारिता $= C'$

$$\therefore \quad C' = C_1 + C_2$$
$$= 4\mu F + 2\mu F = 6\mu F$$
$$= 6\times10^{-6}\ \text{F}$$

यदि सम्मिलित विभव $= V$ = उभयनिष्ठ विभव, तब

$$V = \frac{\text{कुल आवेश}}{\text{कुल धारिता}}$$

या $$V = \frac{8\times10^{-4}\text{C}}{6\times10^{-6}\text{F}}$$

या $$V = \frac{800}{6}\text{V} = \frac{400}{3}\text{V}$$

यदि समायोजन में संचित अंतिम ऊर्जा $= U_2$

तब $$U_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V^2$$

या $$U_2 = \frac{1}{2}\times6\times10^{-6}\times\left(\frac{400}{3}\right)^2\ \text{J}$$

या $$U_2 = 3\times10^{-6}\times\frac{16\times10^4}{9}\ \text{J}$$

या $$U_2 = 5.33\times10^{-2}\ \text{J}$$

माना C_1 द्वारा ऊष्मा तथा विद्युत-चुम्बकीय ऊर्जा के रूप में ऊर्जा ह्रास $= U$

तब $$U = U_1 - U_2$$

$= 8\times10^{-2}\,J - 5.33\times10^{-2}\,J$
$= 2.67\times10^{-2}\,J$

अत: C **द्वारा ऊष्मा तथा विद्युत चुम्बकीय ऊर्जा के रूप में ऊर्जा ह्रास** $= 2.67\times10^{-2}$ **J** **उत्तर**

प्रश्न 2.28. दर्शाइए कि एक समांतर पट्टिका संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका पर बल का परिमाण $\frac{1}{2}QE$ **है, जहाँ,** Q **संधारित्र पर आवेश है और** E **पट्टिकाओं के बीच विद्युत क्षेत्र का परिमाण है। घटक** $\frac{1}{2}$ **के मूल को समझाइए।**

हल : माना समान्तर पट्टिका संधारित्र की पट्टिकाएँ P एवं P' हैं।

प्रत्येक पट्टिका का क्षेत्रफल $= A$

पट्टिकाओं के बीच की दूरी $= d$

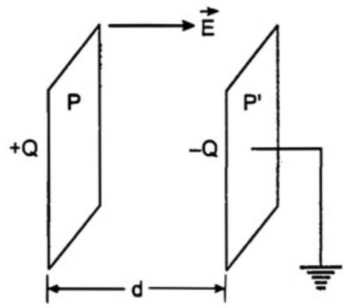
प्रत्येक पट्टिका पर आवेश पर परिणाम $= Q$

P से P' की ओर कार्यरत् विद्युत क्षेत्र का पट्टिकाओं के बीच परिणाम $= E$

माना पट्टिकाओं का पृष्ठ आवेश घनत्व $= \sigma$

$$\therefore \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \ldots(1)$$

माना पट्टिकाओं के बीच आकर्षण के विपरीत पट्टिकाओं के बीच की दूरी को dx बढ़ा देते हैं।



यदि ऐसा करने में किया गया कार्य dW है, तब

$$dW = F\,dx \quad \ldots(ii)$$

चूँकि किया गया यह कार्य संधारित्र की विभव ऊर्जा बढ़ता है।

इसलिए समांतर पट्टिकाओं वाले संधारित्र की प्रति एकांक आयतन विभव ऊर्जा

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 . E^2 \quad \ldots(iii)$$

यदि समान्तर पट्टिका संधारित्र में पट्टिकाओं के बीच की दूरी d को dx द्वारा बढ़ाने पर उसकी विभव ऊर्जा du से बढ़ जाती है, तब

$$du = uA\,dx$$

या $$du = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A\,dx$$

या $$du = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E)(EA)\,dx$$

या $$du = \frac{1}{2}(\sigma AE)\,dx \quad \left[\because E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right]$$

या $$du = \frac{1}{2}QE\,dx \quad \left[\because \sigma = \frac{Q}{A}\right] \quad \ldots(iv)$$

समीकरणों (ii) एवं (iv) से,

$$F dx = \frac{1}{2}QE\,dx$$

या $$F = \frac{1}{2}QE$$

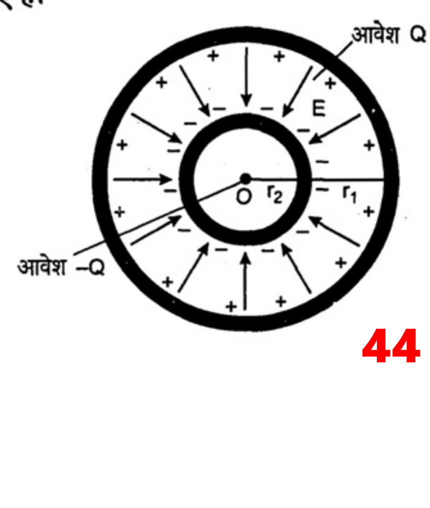
अत: घटक $\frac{1}{2}$ का भौतिक उदय इस बात में छिपा कि चालक के ठीक बाहर क्षेत्र E एवं अंदर शून्य होता है।

अत: **विद्युत क्षेत्र का औसत मान अर्थात्** $\frac{E}{2}$ **बल में अपना योगदान करता है, जिसके विरुद्ध पट्टिकाओं को खिसकाया जाता है।** **उत्तर**

प्रश्न 2.29. दो संकेंद्री गोलीय चालकों जिनको उपयुक्त विद्युतरोधी आलंबों से उनकी स्थिति में रोका गया है, से मिलकर एक गोलीय संधारित्र बना है (चित्र)। दर्शाइए कि गोलीय संधारित्र की धारिता C **इस प्रकार व्यक्त की जाती है :**

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_1 - r_2}$$

यहाँ r_1 **और** r_2 **क्रमश: बाहरी तथा भीतरी गोलों की त्रिज्याएँ हैं।**

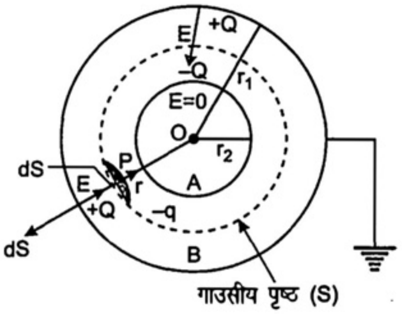


हल : एक गोलीय संधारित्र त्रिज्याओं r_1 एवं r_2 के दो समकेन्द्रीक खोखले गोलों A एवं B से मिलकर बना ($r_1 > r_2$) है, जिसका केन्द्र O है।

अब आंतरिक खोखले गोले A को $-Q$ आवेश दिया जाता है, तो खोल B के अतिरिक्त पृष्ठ पर $+Q$ एवं बाह्य पृष्ठ पर $-Q$ आवेश उत्प्रेरित होते हैं।

चूँकि खोल B को पृथ्वी से जोड़ा जाता है।

अत: $-Q$ आवेश उसमें चला जाता है। इसलिए B के बाह्य पृष्ठ पर इसका मान शून्य होता है तथा विद्युत क्षेत्र A के अंदर रहता है।



अर्थात् $r < r_2$ के लिए $E = 0$ और $r > r_1$ के लिए भी $E = 0$ है।

माना खोलों A एवं B के बीच केन्द्र O पर r त्रिज्या का गाउसीय पृष्ठ S खींचा गया है।

माना गाउसीय पृष्ठ पर बिन्दु P पर यदि विद्युत-क्षेत्र $= E$

तब $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad \ldots(i)$$

त्रिज्यीय दिशा में अंदर की ओर कार्य करता है। इसके अतिरिक्त गाउसीय पृष्ठ के अंदर बंद आवेश $= -Q$

माना गाउसीय पृष्ठ के बिन्दु P पर एक क्षेत्रफल अवयव $= d\mathbf{S}$

यदि $d\mathbf{S}$ में से विद्युत-अभिवाह $= d\phi$

तब $$d\phi = \mathbf{E}.d\mathbf{S}$$

या $$\mathbf{d}\phi = \mathbf{E}.\,d\mathbf{S}\cos 180^\circ$$

या $$d\phi = -\mathbf{E}.d\mathbf{S}$$

($\because$ **E** एवं $d\mathbf{S}$ के बीच 180° का कोण है।)...(ii)

यदि संपूर्ण गाउसीय पृष्ठ में से विद्युत-अभिवाह $= \phi$, तब

$$\phi = \oint_S d\phi$$

या $$\phi = -\oint_S \mathbf{E}.d\mathbf{S}$$

या $$\phi = -E\oint_S dS$$

या $$\phi = -E.4\pi r^2 \quad \ldots(iii)$$

जहाँ $\oint_S dS = 4\pi r^2$ गाउसीय पृष्ठ का क्षेत्रफल है।

अब गाउस सिद्धान्त से,

$$\phi = \frac{-Q}{\varepsilon_0}$$

या $$-E.4\pi r^2 = -\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

या $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad \ldots(iv)$$

अब माना दो गोलीय खोलों A एवं B के बीच विभवांतर V है। यदि गोलीय संधारित्र की धारिता C है, तब

$$C = \frac{Q}{V} \quad \ldots(v)$$

अब एक समांतर पट्टिका संधारित्र में पट्टिकाओं के बीच स्थान में विद्युत-क्षेत्र एकसमान E होता है तथा विभवांतर केवल Ed है, परन्तु गोलीय संधारित्र में दोनों गोलीय खोलों के बीच विद्युत क्षेत्र एकसमान नहीं होता तथा दूरी के साथ

$$E = \frac{dV}{dr}$$

या $$dV = Edr$$

इस प्रकार,

$$V = \int_A^B dV$$

या $$V = \int_A^B E.dr$$

या $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.Q.\int_{r_2}^{r_1} r^{-2}\,dr$$

या $$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{r^{-2+1}}{-2+1}\right]_{r_2}^{r_1}$$

या $$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{-1}{r}\right]_{r_2}^{r_1}$$

या $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right]$

या $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2}$ ...(vi)

समीकरणों (v) और (vi) से,

$$C = \frac{\frac{Q}{1}}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{Q(r_1 - r_2)}{r_1 r_2}$$

या $C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$ इति सिद्धम्

प्रश्न 2.30. एक गोलीय संधारित्र के भीतरी गोले की त्रिज्या 12 cm तथा बाहरी गोले की त्रिज्या 13 cm है। बाहरी गोला भू-संपर्कित है तथा भीतरी गोले पर 2.5μC का आवेश दिया गया है। संक्रेंद्री गोलों के बीच के स्थान पर 32 परावैद्युतांक का द्रव भरा है।

(a) संधारित्र की धारिता ज्ञात कीजिए।

(b) भीतरी गोले का विभव क्या है?

(c) इस संधारित्र की धारिता की तुलना एक 12 cm त्रिज्या वाले किसी वियुक्त गोले की धारिता से कीजिए। व्याख्या कीजिए कि गोले की धारिता इतनी कम क्यों हैं?

हल : ∵ आंतरिक गोले की त्रिज्या $= r_2$

या $r_2 = 12\text{cm} = 12 \times 10^{-2}$ m

बाह्य गोले की त्रिज्या $= r_1$

या $r_1 = 13\text{cm} = 13 \times 10^{-2}$ m

आंतरिक गोले पर आवेश $= 2.5\mu\text{C} = 2.5 \times 10^{-6}$ C

तथा दो गोलों के बीच भरे द्रव का परावैद्युतांक $= K = 32$ है।

(a) माना संधारित्र की धारिता $= C$

गोलीय संधारित्र की धारिता

$$C = 4\pi\varepsilon_0 K \frac{r_1 r_2}{(r_1 - r_2)}$$

या $C = 32 \times \frac{1}{9 \times 10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2}} \times \frac{(13 \times 12)10^{-4}\ \text{m}^2}{(13 - 12) \times 10^{-2}\ \text{m}}$

या $C = \frac{32}{9 \times 10^9} \times \frac{156 \times 10^{-2} \times 10^{-2}}{1 \times 10^{-2}}$

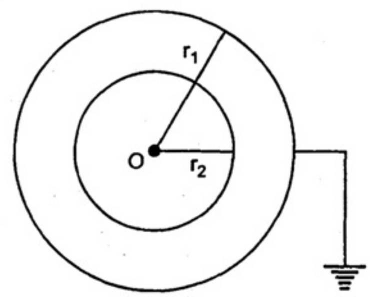
या $C = 5.54 \times 10^{-9}$ F

या $C = 5.5 \times 10^{-9}$ F

अतः **संधारित्र की धारिता $= 5.5 \times 10^{-9}$ F** **उत्तर**

(b) माना आंतरिक गोले का विभव $= V$

चूँकि बाह्य गोले को पृथ्वी से जोड़ दिया गया है। इसलिए आंतरिक गोले का विभव ही दोनों गोलों के बीच विभवांतर है।



∴ $V = \frac{q}{C}$

या $V = \frac{2.5 \times 10^{-6}\ \text{C}}{5.5 \times 10^{-9}\ \text{F}}$

या $V = 454.5$V

या $V = 4.5 \times 10^2$ V

अतः **भीतरी गोले का विभव $= 4.5 \times 10^2$ V उत्तर**

(c) ∵ वियुक्त गोले की त्रिज्या $= r = 12$cm

या $r = 12 \times 10^{-2}$ m

माना वियुक्त गोले की धारिता $= C'$

∴ $C' = 4\pi\varepsilon_0 r$

या $C = \frac{12 \times 10^{-2}}{9 \times 10^9}$ F

या $C = 1.33 \times 10^{-11}$ F **उत्तर**

∴ $\frac{C}{C'} = \frac{5.547 \times 10^{-9}\ \text{F}}{1.33 \times 10^{-11}\ \text{F}}$

$= 4.17 \times 10^2 = \textbf{417}$ **उत्तर**

प्रश्न 2.31. सावधानीपूर्वक उत्तर दीजिए—

(a) दो बड़े चालक गोले जिन पर आवेश Q_1 और Q_2 हैं, एक-दूसरे के समीप लाए जाते हैं, क्या इनके बीच स्थिरवैद्युत बल का परिमाण तथ्यतः $\frac{Q_2 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ द्वारा दर्शाया जाता है, जहाँ r इनके केन्द्रों के बीच की दूरी है।

(b) यदि कूलॉम के नियम में $1/r^3$ निर्भरता का समावेश ($1/r^2$ के स्थान पर) हो, तो क्या गाउस का नियम अभी भी सत्य होगा?

(c) स्थिर वैद्युत क्षेत्र विन्यास में एक छोटा परीक्षण आवेश किसी बिंदु पर विराम में छोड़ा जाता है। क्या यह उस बिंदु से होकर जाने वाली क्षेत्र रेखा के अनुदिश चलेगा?

(d) इलेक्ट्रॉन द्वारा एक वृत्तीय कक्षा पूरी करने में नाभिक के क्षेत्र द्वारा कितना कार्य किया जाता है? यदि कक्षा दीर्घवृत्ताकार हो, तो क्या होगा?

(e) हमें ज्ञात है कि एक आवेशित चालक के पृष्ठ के आर-पार विद्युत क्षेत्र असंतत होता है। क्या वहाँ वैद्युत विभव भी असंतत होगा?

(f) किसी एकल चालक की धारिता से आपका क्या अभिप्राय है?

(g) एक संभावित उत्तर की कल्पना कीजिए कि पानी का परावैद्युतांक (= 80), अभ्रक के परावैद्युतांक (= 6) से अधिक क्यों होता है?

हल : (a) दो आवेशों q_1 एवं q_2 के बीच स्थिर वैद्युत बल

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

जबकि दोनों आवेश q_1 एवं q_2 बिंदु आवेश हैं।

उपर्युक्त व्यंजक बड़े गोलीय चालकों के लिए सही नहीं है।

यह इसलिए है कि **जब बड़े गोलों को निकट संपर्क में लाया जाता है, तो आवेश आबंटन एकसमान नहीं रहता।** **उत्तर**

(b) नहीं, यदि कूलम्ब के नियम की निर्भरता $\frac{1}{r^3}$ पर है, **तो गाउस का नियम लागू नहीं होता है।** **उत्तर**

(c) यदि **E** एकसमान है, तो बिन्दु पर रखा परीक्षण आवेश क्षेत्र रेखाओं के अनुदिश चलेगा तथा **E** के समान्तर यह छोटा परीक्षण आवेश सरल रेखा पर त्वरित होगा।

यह आवश्यक नहीं कि परीक्षण आवेश बिन्दु से गुजरने वाली क्षेत्र रेखा के अनुदिश चलेगा, क्योंकि साधारणतया क्षेत्र **रेखा आवेश त्वरण न कि वेग की दिशा देती है।** **उत्तर**

(d) दो बिन्दुओं के बीच एकांक परीक्षण आवेश को चलाने में किया गया कार्य विद्युत क्षेत्र में दोनों बिन्दुओं के बीच विद्युत-क्षेत्र के रेखा समाकलन द्वारा दिया जाता है।

अर्थात् $\int_A^B \mathbf{E}.dl = W$

चूँकि एक बंद पथ पर रेखा समाकलन शून्य होता है।

अतः $\oint \mathbf{E}.d\mathbf{l} = 0$

इस प्रकार इलेक्ट्रॉन की संपूर्ण वृत्तीय कक्षा पर नाभिक द्वारा क्षेत्र में किया गया कार्य शून्य होगा, क्योंकि स्थिर-वैद्युत बल आरक्षी होता है, जो $\oint \mathbf{E}.dl = 0$ द्वारा प्रदर्शित है।

अतः $W = 0$

यही **अंडाकार कक्षा के लिए सत्य है अर्थात् अण्डाकार कक्षा में $W = 0$ होता है।** **उत्तर**

(e) नहीं, किसी आवेशित चालक के पृष्ठ पर विभव असंतत नहीं होता है। वहाँ यह संतत है। **E शून्य हो सकता है, परन्तु V स्थिर रहता है।** **उत्तर**

(f) एकल चालक की धारिता होती है। **यह संधारित्र है, जिसकी एक पट्टिका अनंत पर है।** **उत्तर**

(g) पानी के अणु ध्रुवीय होते हैं, जबकि अभ्रक के अध्रुवीय, पानी के अणुओं में स्थायी द्विध्रुव आघूर्ण है।

अतः **पानी का परावैद्युतांक, अभ्रक आदि के परावैद्युतांक से कहीं अधिक होता है।** **उत्तर**

प्रश्न 2.32. एक बेलनाकार संधारित्र में 15 cm लम्बाई एवं त्रिज्याएँ 1.5 cm तथा 1.4cm के दो समाक्ष बेलन हैं। बाहरी बेलन भू-संपर्कित है और भीतर बेलन को 3.5μC का आवेश दिया गया है। निकाय की धारिता और भीतरी बेलन का विभव ज्ञात कीजिए। अंत्य प्रभाव (अर्थात् सिरों पर क्षेत्र रेखाओं का मुड़ना) की उपेक्षा कर सकते हैं।

हल : ∵ समाक्षीय बेलन की लम्बाई $= l$

∴ $l = 15\text{cm} = 15 \times 10^{-2}$ m

आंतरिक बेलन की त्रिज्या $= a$

या $a = 1.4\,\text{cm} = 1.4 \times 10^{-2}$ m

बाह्य बेलन की त्रिज्या $= b$

या $\quad b = 1.5\text{cm} = 1.5\times10^{-2}\text{ m}$

तथा आंतरिक बेलन पर आवेश $= q$

या $\quad q = 3.5\mu\text{C} = 3.5\times10^{-6}\text{ C}$

माना निकाय की धारिता $= C$

आंतरिक बेलन का विद्युत-विभव $= V$

बेलनाकार संधारित्र की धारिता

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{2.303\log\left(\frac{b}{a}\right)}$$

या $$C = \frac{2\times\frac{22}{7}\times8.854\times10^{-12}\times1.5\times10^{-2}}{2.303\times\log\left(\frac{1.5\times10^{-2}}{1.4\times10^{-2}}\right)}\text{ F}$$

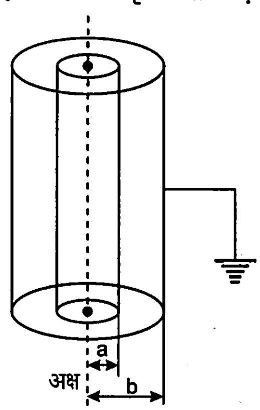
$$= \frac{44\times8.854\times1.5\times10^{-14}}{7\times2.303\times0.03}\text{ F}$$

$$= \frac{5.84\times10^{-12}}{0.48363}\text{ F}$$

$$= 1.21\times10^{-10}\text{ F}$$

अत: **निकाय की धारिता $= 1.2\times10^{-10}$ F** **उत्तर**

चूँकि बाह्य बेलन को पृथ्वी से जोड़ा गया है।



अत: आंतरिक बेलन का विद्युत-विभव दोनों बेलनों के बीच विभवांतर के बराबर होगा।

$\because \quad V = \frac{q}{C}$

$\therefore \quad V = \frac{3.5\times10^{-6}\text{ C}}{1.21\times10^{-10}\text{ F}}$

$V = 2.89\times10^{4}\text{ V}$

या $\quad V = 2.9\times10^{4}\text{ V}$

अत: **भीतरी बेलन का विभव $= 2.9\times10^{4}$ V उत्तर**

प्रश्न 2.33. 3 परावैद्युतांक तथा 10^7 Vm^{-1} की परावैद्युत सामर्थ्य वाले एक पदार्थ से 1kV वोल्टता अनुमतांक के समांतर पट्टिका संधारित्र की अभिकल्पना करनी है। परावैद्युत सामर्थ्य वह अधिकतम विद्युत क्षेत्र है, जिसे कोई पदार्थ बिना भंग हुए अर्थात् आंशिक आयनन द्वारा बिना वैद्युत संचरण आरम्भ किए सहन कर सकता है। सुरक्षा की दृष्टि से क्षेत्र को कभी भी परावैद्युत सामर्थ्य के 10% से अधिक नहीं होना चाहिए। 50 pF धारिता के लिए पट्टिकाओं का कितना न्यूनतम क्षेत्रफल होना चाहिए?

हल : $\because$ पदार्थ का परावैद्युतांक $K = 3$

निर्धारित बिम्ब $= V = 1\text{kV} = 10^3\text{ V}$

समांतर पट्टिका संधारित्र की धारिता

$$= C = 50\text{pF} = 50\times10^{-12}\text{ F}$$

परावैद्युत शक्ति $= 10^7\text{ Vm}^{-1} = E_{max}$

चूँकि विद्युत क्षेत्र शक्ति परावैद्युत के 10% से अधिक नहीं होनी चाहिए, तब

$$E = 10\% E_{max}$$

या $\quad E = \frac{10}{100}\times10^7\text{ Vm}^{-1}$

या $\quad E = 10^6\text{ Vm}^{-1}$

जहाँ E विद्युत क्षेत्र है।

माना संधारित्र आवेश सहन कर सकता है $= q$

$\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}\text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$

संधारित्र की पट्टिका का अभीष्ट क्षेत्रफल $= A$

माना संधारित्र की पट्टिकाओं के बीच स्थान $= d$

$\because \quad E = \frac{V}{d}$

$\therefore \quad d = \frac{V}{E}$

या $\quad d = \frac{1000}{10^6}\text{ m}$

या $\quad d = 10^{-3}\text{ m}$

या $\quad q = C\times$ निर्धारित विभव

या $\quad q = 50\times10^{-12}\text{ F}\times10^3\text{ V}$

$\quad = 5\times10^{-8}\text{ C}$

समांतर पट्टिका वाले संधारित्र की धारिता

$$C = \frac{\varepsilon_0 KA}{d}$$

$\therefore$ $$A = \frac{Cd}{\varepsilon_0 K}$$

या $$A = \left(\frac{q}{V}\right) \cdot \frac{d}{\varepsilon_0 K} \qquad [\because q = CV]$$

या $$A = \frac{qd}{\varepsilon_0 KV}$$

या $$A = \frac{q}{\varepsilon_0 K\left(\frac{V}{d}\right)}$$

या $$A = \frac{q}{\varepsilon_0 KE} \qquad \left[\because E = \frac{V}{d}\right]$$

q, ε_0, K एवं E के मान रखने पर,

$$A = \frac{5\times10^{-8}\,\text{C}}{8.854\text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2} \times 3\times10^6\,\text{Vm}^{-1}}$$

या $A = 18.8\times10^{-4}\,\text{m}^2$

या $A = 18.8\text{cm}^2$

या $A = 19\text{cm}^2$

अत: धारिता के लिए पट्टिकाओं का न्यूनतम क्षेत्रफल = **19 cm^2** **उत्तर**

प्रश्न 2.34. व्यवस्थात्मकत: निम्नलिखित में संगत समविभव पृष्ठ का वर्णन कीजिए—

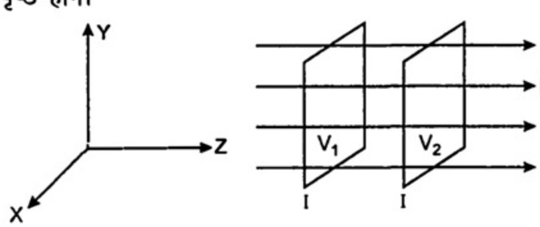
(a) z-दिशा में अचर विद्युत क्षेत्र,

(b) एक क्षेत्र जो एकसमान रूप से बढ़ता है, परन्तु एक ही दिशा (मान लीजिए z-दिशा) में रहता है।

(c) मूल बिंदु पर कोई एकल धनावेश, और

(d) एक समतल में समान दूरी पर समांतर लम्बे आवेशित तारों से बने एकसमान जाल।

उत्तर : (a) z-दिशा में कार्यरत् स्थिर विद्युत-क्षेत्र के लिए सम-विभवतल सलग्न चित्रानुसार XY तल के समान्तर पृष्ठ होंगे।



(b) जब क्षेत्र एकसमान रूप से परिमाण में बढ़ता है और एक दिशा में (माना z-दिशा), तब समविभव पृष्ठ निश्चित विभवान्तर के अनुरूप, एक-दूसरे के निकट हो जाते हैं और XY तल के समान्तर होते हैं।

(c) मूल बिन्दु पर एकल धनात्मक आवेश के लिए समविभव पृष्ठ मूल बिन्दु के समकेन्द्रिक गोले होंगे, जिनका केन्द्र मूल बिन्दु पर होगा।

(d) एक एकसमान जाली, जिसमें लम्बे समान्तर आवेशित समान दूरियों पर तार हों, का सम विभव जाली के निकट एक तल में समय-समय पर परिवर्ती आकृति में जाल के निकट होता है, जो धीरे-धीरे बहुत दूरी पर जाल के समान्तर पृष्ठों में बदल जाता है।

प्रश्न 2.35. किसी वान डे ग्राफ के प्रकार के जनित्र में एक गोलीय धातु कोश 15×10^6 V का एक इलेक्ट्रोड बनाना है। इलेक्ट्रोड के परिवेश की गैस की परावैद्युत सामर्थ्य $5\times10^7\,\text{Vm}^{-1}$ है। गोलीय कोश की आवश्यक न्यूनतम त्रिज्या क्या है? (इस अभ्यास से आपको यह ज्ञान होगा कि एक छोटे गोलीय कोश से आप स्थिरवैद्युत जनित्र, जिसमें उच्च विभव प्राप्त करने के लिए कम आवेश की आवश्यकता होती है, नहीं बना सकते।)

हल : $\because$ गोलीय कोश के कारण विभव $= V$

या $V = 15\times10^6\,\text{V}$

आवेशित गोलीय कोश का विद्युत-क्षेत्र $= E$

या $V = 5\times10^7\,\text{Vm}^{-1}$

माना गोलीय कोश की त्रिज्या $= r$

तथा एक आवेशित कोश के कारण विद्युत-विभव एवं विद्युत क्षेत्र

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r} \qquad \ldots\text{(i)}$$

तथा $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2} \qquad \ldots\text{(ii)}$$

जहाँ q = गोलीय कोश पर आवेश है।

समीकरण (i) को समीकरण (ii) से भाग करने पर,

$$\frac{V}{E} = r$$

या $$r = \frac{15\times10^6\,\text{V}}{5\times10^7\,\text{Vm}^{-1}}$$

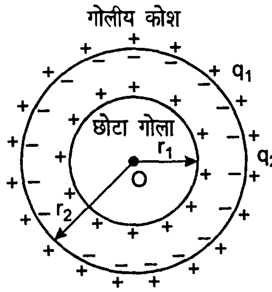
या $r = 3\times10^{-1}\,\text{m}$

या $r = 30\text{cm}$

अत: **गोलीय कोश की आवश्यक न्यूनतम त्रिज्या = 30 cm** **उत्तर**

प्रश्न 2.36. r_1 त्रिज्या तथा q_1 आवेश वाला एक छोटा गोला, r_2 त्रिज्या और q_2 आवेश के गोलीय खोल (कोश) से घिरा है। दर्शाइए यदि q_1 धनात्मक है, तो (जब दोनों को एक तार द्वारा जोड़ दिया जाता है) आवश्यक रूप से आवेश, गोले से खोल की तरफ ही प्रवाहित होगा, चाहे खोल पर आवेश q_2 कुछ भी हो।

हल : चूँकि r_2 और r_1 छोटे गोले और गोलीय खोल की क्रमश: त्रिज्याएँ हैं।



खोल गोले को घेरे हुए है।

$+q_1$ आवेश गोले पर है तथा $+q_2$ आवेश खोल पर। चूँकि आवेशित चालक के भीतर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है।

गाउस के सिद्धान्त से,

इसलिए $E = 0$

$$\phi = \oint_S E.dS$$

या $\phi = \frac{q_2}{\varepsilon_0}$

[$\because$ **गोलीय खोल में $q_2 = 0, \therefore E = 0$ इसके अन्दर।**]

चूँकि q_2 खोल के बाहरी पृष्ठ पर होना चाहिए।

अब $+q_1$ आवेश वाला गोला खोल के अन्दर बन्द है।

अत: खोल के आन्तरिक पृष्ठ पर $-q_1$ आवेश और बाहरी पृष्ठ पर $+q_1$ आवेश उत्प्रेरित होंगे।

$\therefore$ खोल के बाहरी पृष्ठ पर कुल आवेश $= q_2 + q_1$

चूँकि आवेश सदैव बाहरी पृष्ठ पर रहता है।

इसलिए q_1 आवेश गोले के बाहरी पृष्ठ से खोल के बाहरी पृष्ठ की ओर उस समय प्रवाहित होगा, जब उन्हें तार से जोड़ते हैं। **उत्तर**

प्रश्न 2.37. निम्न का उत्तर दीजिए—

(a) पृथ्वी के पृष्ठ के सापेक्ष वायुमण्डल की ऊपरी परत लगभग 400 kV पर है, जिसके संगत विद्युत क्षेत्र ऊँचाई बढ़ने के साथ कम होता है। पृथ्वी के पृष्ठ के समीप विद्युत क्षेत्र लगभग $100\ Vm^{-1}$ है। तब फिर जब हम घर से बाहर खुले में जाते हैं, तो हमें विद्युत आघात क्यों नहीं लगता? (घर को लोहे के पिंजरा मान लीजिए, अत: उसके अंदर कोई विद्युत क्षेत्र नहीं है!)

(b) एक व्यक्ति शाम के समय अपने घर के बाहर 2 m ऊँचा अवरोधी पट्ट रखता है, जिसके शिखर पर एक $1\ m^2$ क्षेत्रफल की बड़ी ऐलुमिनियम की चादर है। अगली सुबह वह यदि धातु के चादर को छूता है, तो क्या उसे विद्युत आघात लगेगा।

(c) वायु की थोड़ी-सी चालकता के कारण सारे संसार में औसतन वायुमण्डल में विसर्जन धारा 1800 A मानी जाती है। तब यथासमय वातावरण स्वयं पूर्णत: निरावेशित होकर विद्युत उदासीन क्यों नहीं हो जाता? दूसरे शब्दों में, वातावरण को कौन आवेशित रखता है?

(d) तड़ित के दौरान वातावरण की विद्युत ऊर्जा, ऊर्जा के किन रूपों में क्षयित होती है?

संकेत : पृष्ठ आवेश घनत्व $= 10^{-9}\ cm^{-2}$ के अनुरूप पृथ्वी के (पृष्ठ) पर नीचे की दिशा में लगभग $100\ Vm^{-1}$ का विद्युत क्षेत्र होता है। लगभग 50km ऊँचाई तक (जिसके बाहर यह अच्छा चालक है) वातावरण की थोड़ी-सी चालकता के कारण लगभग +1800C का आवेश प्रति सेकण्ड समग्र रूप से पृथ्वी में पंप होता रहता है। यथापि, पृथ्वी निरावेशित नहीं होती, क्योंकि संसार में हर समय लगातार तड़ित तथा तड़ित झंझा होती रहती है, जो समान मात्रा में ऋणावेश पृथ्वी में पंप कर देती है।

उत्तर : (a) हमारा शरीर तथा पृथ्वी सम विभव पृष्ठ बन जाता है, जिसका अर्थ है कि पृथ्वी एवं शरीर का विभव एक ही होता है और उनमें कोई विभवान्तर नहीं होता है। इसलिए जब हम घर से बाहर खुले में आते हैं, तो बाहर की खुली वायु का प्रारम्भिक सम विभव पृष्ठ शरीर को इस प्रकार आवेशित करता है कि सिर तथा धरती एक ही विभव पर होती है। इस प्रकार शरीर में से कोई धारा प्रवाहित नहीं होती और इसीलिए हमें किसी विद्युत झटके का अनुभव नहीं होता है।

(b) हाँ, यदि वह धातु की पट्टी को अगली सुबह छूता है, तो बिजली का झटका लगेगा।

इसका कारण है कि एल्युमिनियम की पट्टी और पृथ्वी एक संधारित्र बनाती हैं, जिसमें अवरोधी पट्टी (स्लैब) एक परावैद्युत बनाती है। आवेश की नीचे की ओर वर्षा से एल्युमिनियम की पट्टी का विभव बढ़ जाता है अर्थात् 1800A की अनावेशित धारा द्वारा यह आवेशित हो जाती है, जो धारा वायुमण्डल से नीचे आ रही है। जब हम एल्युमिनियम की पट्टी को छूते हैं, तो धारा हमारे शरीर से होकर पृथ्वी में चली जाती है। यह आवेश प्रवाह एक विद्युत धारा बनाता है तथा हम झटका अनुभव करते हैं।

(c) सम्पूर्ण पृथ्वी पर लगातार वायुमण्डल तड़ित और झंझावतों से निरन्तर आवेशित होता रहता है तथा इससे सामान्य मौसम की स्थिति में सामंजस्य रहता है।

अतः वायुमण्डल वैद्युतीय रूप से तटस्थ नहीं रह सकता है।

(d) तड़ित के दौरान वायुमण्डल की विद्युत ऊर्जा प्रकाश, ऊष्मा तथा ध्वनि के रूप में बिजली कड़कने के साथ मिश्रित हो जाती है।