

## अध्याय-8

# समाकलों के अनुप्रयोग

## (Application of Integrals)

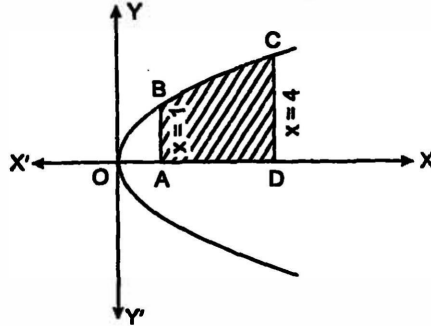
### (Important Formulae and Definitions)

- निश्चित समाकल योग की एक सीमा है।
- वक्र  $y = f(x)$ ,  $x$ -अक्ष तथा रेखाओं  $x = a$  और  $x = b$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल  $\int_{x=a}^{x=b} y dx$  है।
- $x = a$  समाकलन की निम्न सीमा तथा  $x = b$  समाकलन की उच्च सीमा कहलाती है।
- वक्र  $x = f(y)$ ,  $y$ -अक्ष तथा रेखाओं  $y = a$  और  $y = b$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल  $\int_{y=a}^{y=b} x dy$  है।
- दो वक्रों  $y = f_1(x)$  तथा  $y = f_2(x)$  एवं रेखाएँ  $x = a$ ,  $x = b$  के मध्य घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल  $\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$  है।

### प्रश्नावली 8.1

प्रश्न 1. वक्र  $y^2 = x$ , रेखाओं  $x = 1$ ,  $x = 4$  एवं  $x$ -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : ज्ञात है : वक्र  $y^2 = x$ , जिसका शीर्ष  $O$  अर्थात्  $(0, 0)$  मूल बिन्दु है।



$\therefore$

$$y = \sqrt{x}$$

क्षेत्र जो  $x = 1$ ,  $x = 4$ ,  $y$ -अक्ष के समान्तर रेखाएँ हैं, जो  $x$ -अक्ष तथा वक्रों से घिरा हुआ है।

$$\text{क्षेत्रफल } A = \text{क्षेत्रफल } ABCD = \int_1^4 y dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx$$

$$= \frac{2}{3} [x^{3/2}]_1^4 = \frac{2}{3} [4^{3/2} - 1^{3/2}]$$

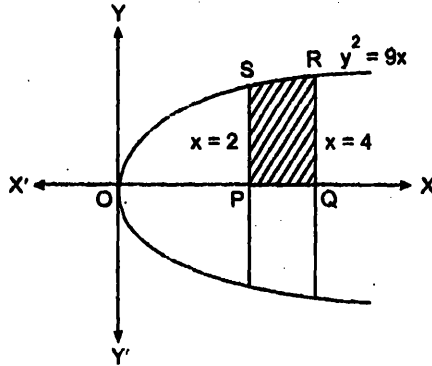
$$= \frac{2}{3} [8 - 1] = \frac{14}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 2. प्रथम चतुर्थांश में वक्र  $y^2 = 9x$ ,  $x = 2$ ,  $x = 4$  एवं  $x$ -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : ज्ञात है :  $y^2 = 9x$  जो एक परवलय है और जिसका शीर्ष  $(0, 0)$  है।

रेखाएँ  $x = 2$  तथा  $x = 4$ ,  $y$ -अक्ष के समान्तर हैं। वक्र  $x$ -अक्ष के सममित है।



क्षेत्र जो वक्र  $y^2 = 9x$ ,  $x = 2$ ,  $x = 4$  तथा  $x$ -अक्ष से घिरा है।

$$y^2 = 9x$$

$$\therefore y = \sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$$

$$\therefore \text{क्षेत्र का अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_2^4 3\sqrt{x}$$

$$= 3 \times \left[ \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_2^4 = 3 \times \frac{2}{3} [x^{3/2}]_2^4$$

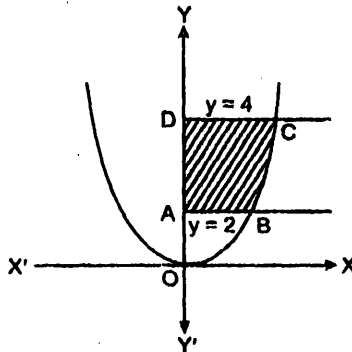
$$= 2[4^{3/2} - 2^{3/2}]$$

$$= 2[8 - 2\sqrt{2}] = (16 - 4\sqrt{2}) \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 3. प्रथम चतुर्थांश में  $x^2 = 4y$ ,  $y = 2$ ,  $y = 4$  एवं  $y$ -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया वक्र  $x^2 = 4y$  है। जो एक परवलय है तथा जिसका शीर्ष  $(0, 0)$  है। अक्ष  $y$ -अक्ष तथा यह  $y$ -अक्ष के सममित है और  $y = 2$ ,  $y = 4$ ,  $x$ -अक्ष के समान्तर रेखाएँ हैं।



∴

$$x^2 = 4y$$

या

$$x = 2\sqrt{y}$$

$$\begin{aligned}\text{क्षेत्र का अभीष्ट क्षेत्रफल} &= \int_2^4 x \, dy = \int_2^4 2\sqrt{y} \, dy = 2 \int_2^4 \sqrt{y} \, dy \\ &= 2 \left[ \frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_2^4 = 2 \times \frac{2}{3} [4^{3/2} - 2^{3/2}] \\ &= \frac{4}{3} (8 - 2\sqrt{2}) \\ &= \left( \frac{32 - 8\sqrt{2}}{3} \right) \text{ वर्ग इकाई।}\end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 4. दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया दीर्घवृत्त का समीकरण,  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

∴ वक्र दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित है क्योंकि समीकरण में  $x$  तथा  $y$  की समघात है।

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

∴

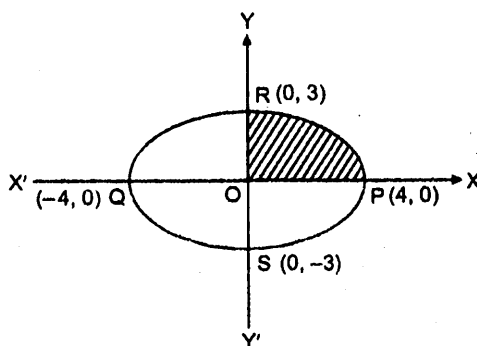
$$\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16} = \frac{16 - x^2}{16}$$

या

$$\frac{y}{3} = \sqrt{\frac{16 - x^2}{16}} = \frac{1}{4} \sqrt{16 - x^2}$$

∴

$$y = \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2}$$



अभीष्ट क्षेत्रफल = 4 OPR का क्षेत्रफल

$$= 4 \int_0^4 \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2} \, dx$$

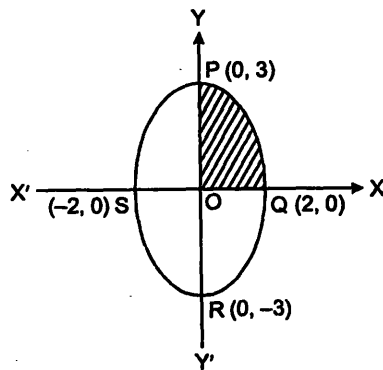
$$\begin{aligned}
&= 3 \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx \\
&= 3 \left[ \frac{x}{2} \sqrt{16-x^2} + \frac{16}{2} \sin^{-1} \frac{x}{4} \right]_0^4 \\
&= 3 \left[ \left( 0 + 8 \sin^{-1} \frac{4}{4} \right) - 0 \right] = 24 \sin^{-1} 1 \\
&= 24 \times \frac{\pi}{2} = 12\pi \text{ वर्ग इकाई।}
\end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 5. दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया दीर्घवृत्त का समीकरण  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \frac{y^2}{9} &= 1 - \frac{x^2}{4} \\
y &= \frac{3}{2} \sqrt{4-x^2}
\end{aligned}$$



इसका केन्द्र (0, 0) है।

अर्द्ध दीर्घ अक्ष की लम्बाई 3 और अर्द्ध लघु अक्ष की लम्बाई 2 है।

अतः दीर्घवृत्त द्वारा घेरा गया अभीष्ट क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
&= 4 \times \text{क्षेत्रफल } POQ \text{ का क्षेत्रफल} \\
&= 4 \int_0^2 \frac{3}{2} \sqrt{4-x^2} dx \\
&= 6 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \\
&= 6 \left[ \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2} \sin^{-1} \frac{x}{2} \right]_0^2 \\
&= 6[(0 + 2 \sin^{-1} 1) - 0] = 12 \sin^{-1} 1 \\
&= 12 \times \frac{\pi}{2} = 6\pi \text{ वर्ग इकाई।}
\end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 6. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$ , रेखा  $x = \sqrt{3}y$  एवं  $x$ -अक्ष द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

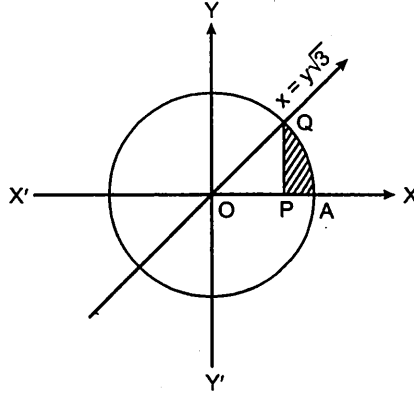
हल : दिया गया वृत्त का समीकरण :

$$x^2 + y^2 = 4$$

जिसका केन्द्र  $(0, 0)$  और त्रिज्या 2 के समान है।

तथा सरल रेखा का समीकरण,  $x = \sqrt{3}y$

जो  $(0, 0)$  तथा  $(\sqrt{3}, 1)$  से होकर जाती है।



क्षेत्र का अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल  $OQP$  + क्षेत्रफल  $PQA$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} x \, dx + \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{3}} + \left[ \frac{x}{2} \cdot \sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2} \sin^{-1} \frac{x}{2} \right]_{\sqrt{3}}^2$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} (3-0) + \left[ \left( 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2 \left( \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 7. छेदक रेखा  $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$  द्वारा वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  के छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \dots(i)$$

और

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \dots(ii)$$

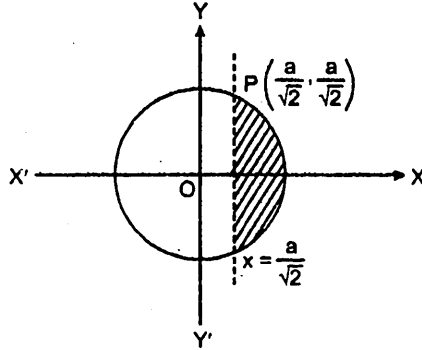
स्पष्टतः समीकरण (i) एक वृत्त है जिसका केन्द्र  $(0, 0)$  तथा त्रिज्या  $a$  है। समीकरण (ii)  $y$ -अक्ष के समान्तर

$\frac{a}{\sqrt{2}}$  मात्रक दूरी पर इसके दायीं ओर एक सरल रेखा स्थित है।

समीकरण (i) और (ii) को हल करने पर,

$$\frac{a^2}{2} + y^2 = a^2 \text{ या } y^2 = \frac{a^2}{2} \text{ या } y = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

अतः (i) और (ii) का प्रथम चतुर्थांश में प्रतिच्छेदन बिन्दु  $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$  है।



अभीष्ट क्षेत्रफल = छायांकित क्षेत्र

$$= 2 \int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= 2 \left[ \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^a$$

$$= \left[ \left( 0 - \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} \right) + a^2 \left( \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

$$= \left[ -\frac{a^2}{2} + a^2 \times \frac{\pi}{2} - a^2 \times \frac{\pi}{4} \right]$$

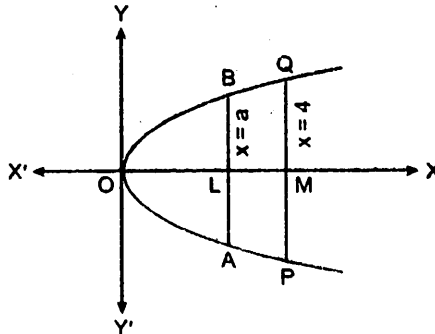
$$= \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 8. यदि वक्र  $x = y^2$  एवं रेखा  $x = 4$  से घिरा हुआ क्षेत्रफल रेखा  $x = a$  द्वारा दो बराबर भागों में विभाजित होता है तो  $a$  का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया परवलय का समीकरण :  $x = y^2$

जिसका शीर्ष  $(0, 0)$  है  $y = 0$  इसका अक्ष है जिसके सापेक्ष परवलय सममित है।



$x = 4$  सरल रेखा है जो  $y$ -अक्ष से 4 इकाई की दूरी पर है।

वक्र तथा  $x = 4$  से घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल  $OPQ$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^4 y \, dx = 2 \int_0^4 \sqrt{x} \, dy = 2 \left[ \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 \\
 &= 2 \times \frac{2}{3} [4^{3/2}] \\
 &= \frac{4}{3} \cdot 8 = \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

$x = a$  सरल रेखा है जो  $y$ -अक्ष से  $a$  दूरी पर है।

वक्र तथा  $x = a$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^a y \, dx = 2 \int_0^a \sqrt{x} \, dx \\
 &= 2 \left[ \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{4}{3} a^{3/2} \quad \dots(ii)
 \end{aligned}$$

समी. (i) और (ii) से,

$$\text{क्षेत्रफल } OPQ = 2 \text{ क्षेत्रफल } \times OAB$$

$$\frac{32}{3} = 2 \times \frac{4}{3} a^{3/2} \text{ या } a^{3/2} = 4$$

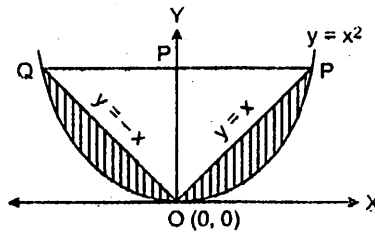
$$\text{या } a = 4^{2/3}$$

उत्तर

प्रश्न 9. परवलय  $y = x^2$  एवं  $y = |x|$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया परवलय का समीकरण :  $y = x^2$

जो  $y$ -अक्ष के प्रति सममित है।



$$\begin{aligned}
 &y = x^2, y = x \text{ मिलते हैं जब } x = x^2 \text{ या } x(x-1) = 0 \\
 &x = 0, x = 1
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$\therefore A(1, 1)$  है।

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल

$$[y = |x| \Rightarrow y = x, -x]$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 [\text{क्षेत्रफल } \triangle APO - \text{क्षेत्रफल } \triangle OAP] \\
 &= 2 \left| \int_{y=0}^1 x \, dy - \frac{1}{2} (1)(1) \right| \\
 &= 2 \left[ \int_0^1 \sqrt{y} \, dy - \frac{1}{2} \right]
 \end{aligned}$$

$$= 2 \left| \frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right| - 1$$

$$= \frac{4}{3}(1-0) - 1 = \frac{1}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 10. वक्र  $x^2 = 4y$  एवं रेखा  $x = 4y - 2$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया वक्र  $x^2 = 4y$

...(i)

और रेखा का समीकरण  $x = 4y - 2$

...(ii)

समीकरण (i) और (ii) को हल करने पर,

$$(4y - 2)^2 = 4y$$

$$\text{या } 16y^2 - 16y + 4 = 4y$$

$$\text{या } 16y^2 - 20y + 4 = 0$$

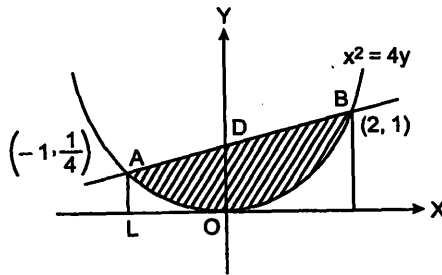
$$\text{या } 4y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\text{या } (4y - 1)(y - 1) = 0$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}, 1$$

अब समीकरण (i) से, जब  $y = \frac{1}{4}$  हो, तब  $x = \pm 1$  और जब  $y = 1$  हो, तब  $x = \pm 2$

$\therefore A\left(-1, \frac{1}{4}\right)$  तथा  $B(2, 1)$ , समीकरण (i) और (ii) के प्रतिच्छेदन बिन्दु हैं।



$\therefore$

$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_{-1}^2 [y(\text{रेखा } PQ \text{ के लिए}) - y(\text{पारबलय के लिए})] dx$$

$$= \int_{-1}^2 \left( \frac{x+2}{4} - \frac{x^2}{4} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \left( 2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left( \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left( 6 - \frac{8}{3} \right) - \left( -2 + \frac{5}{6} \right) = \frac{1}{4} \left[ \frac{10}{3} + 2 - \frac{5}{6} \right]$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \left[ \frac{20+12-5}{6} \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left( \frac{27}{6} \right) \\
 &= \frac{9}{8} \text{ वर्ग इकाई।}
 \end{aligned}$$

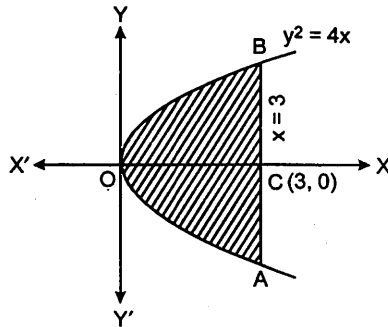
उत्तर

प्रश्न 11. वक्र  $y^2 = 4x$  एवं रेखा  $x = 3$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया परवलय का समीकरण  $y^2 = 4x$

जिसका शीर्ष  $(0, 0)$  है और  $OX$  इसका अक्ष है जिसमें सापेक्ष परवलय सममित है।

और दिया है :  $x = 3$  एक सरल रेखा है जो  $y$ -अक्ष के समान्तर 3 इकाई दूरी पर है।



∴

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र  $OAB$  का क्षेत्रफल

=  $2 \times$  क्षेत्र  $OCB$  का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^3 y \, dx = 2 \int_0^3 \sqrt{4x} \, dx = 4 \left( \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right)_0^3 \\
 &= 4 \times \frac{2}{3} (3^{3/2}) = \frac{8}{3} \times 3\sqrt{3} \\
 &= 8\sqrt{3} \text{ वर्ग इकाई।}
 \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 12. एवं 13 में सही उत्तर का चयन कीजिए :

प्रश्न 12. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$  एवं रेखाओं  $x = 0, x = 2$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है :

- (A)  $\pi$  (B)  $\frac{\pi}{2}$  (C)  $\frac{\pi}{3}$  (D)  $\frac{\pi}{4}$

हल : वृत्त का समीकरण :  $x^2 + y^2 = 4$

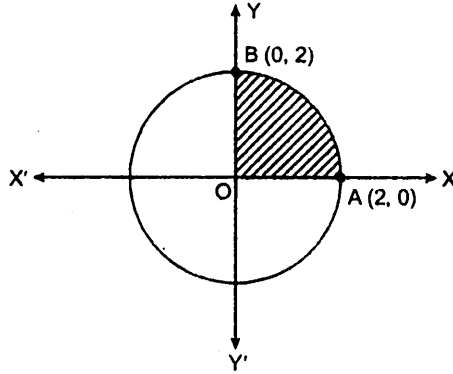
∴  $y^2 = 4 - x^2$

या  $y = \sqrt{4 - x^2}$

जब  $x = 0$  हो, तब  $y = 2$

और जब  $x = 2$  हो, तब  $y = 0$

अतः प्रतिच्छेद बिन्दु  $(2, 0)$  और  $(0, 2)$  हैं।



$$\begin{aligned}
 \therefore \text{अभीष्ट क्षेत्रफल} &= \int_0^2 y dx \\
 &= \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \\
 &= \left[ \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2} \sin^{-1} \frac{x}{2} \right]_0^2 \\
 &= 0 + 2 \sin^{-1}(1) \\
 &= 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi \text{ वर्ग इकाई।}
 \end{aligned}$$

अतः विकल्प (A) सही है।

उत्तर

प्रश्न 13. वक्र  $y^2 = 4x$ ,  $y$ -अक्ष एवं रेखा  $y = 3$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है :

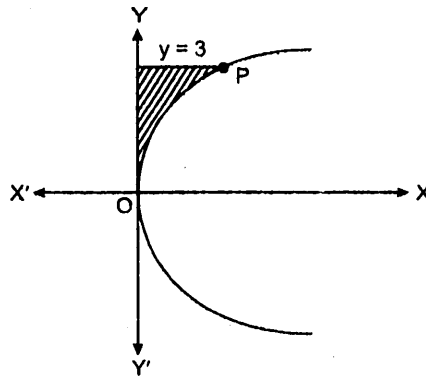
- (A) 2                      (B)  $\frac{9}{4}$                       (C)  $\frac{9}{3}$                       (D)  $\frac{9}{2}$

हल : दिया गया वक्र का समीकरण,

$$y^2 = 4x$$

अर्थात्

$$x = \frac{1}{4} y^2$$



अब रेखा  $y = 3$  तथा वक्र  $y^2 = 4x$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \int_0^3 x dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^3 \frac{y^2}{4} dy = \frac{1}{4} \int_0^3 y^2 dy = \frac{1}{4} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^3 \\
 &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} [27 - 0] \\
 &= \frac{1}{12} \times 27 = \frac{9}{4} \text{ वर्ग इकाई।}
 \end{aligned}$$

अतः विकल्प (B) सही है।

उत्तर

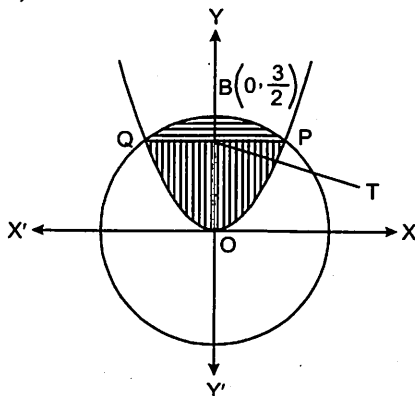
### प्रश्नावली 8.2

प्रश्न 1. परवलय  $x^2 = 4y$  और वृत्त  $4x^2 + 4y^2 = 9$  के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय का समीकरण,  $x^2 = 4y$  ... (i)  
जिसका शीर्ष (0, 0) है और सममित रेखा OY है तथा  $4x^2 + 4y^2 = 9$

या  $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$  ... (ii)

एक वृत्त है जिसका केन्द्र (0, 0) तथा त्रिज्या 3 है।



समीकरण (i) से  $x$  का मान समी. (ii) में रखने पर,

$$4y^2 + 16y - 9 = 0$$

$$\therefore (2y - 1)(2y + 9) = 0 \text{ अर्थात् } y = \frac{1}{2} \text{ या } -\frac{9}{2}$$

जब  $y = \frac{1}{2}$  हो,

तब

$$x = \pm\sqrt{2}$$

मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल - क्षेत्र QOPB का क्षेत्रफल

$$= 2 \times (\text{क्षेत्र BOP का क्षेत्रफल})$$

$$= 2 \times (\text{क्षेत्र TOP} + \text{क्षेत्र TPB का क्षेत्रफल})$$

$$= 2 \left[ \int_0^{1/2} \sqrt{4y} dy + \int_{1/2}^{3/2} \sqrt{\frac{9}{4} - y} dy \right]$$

$$= 4 \left[ \frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{1/2} + 2 \left[ \frac{y}{2} \sqrt{\frac{9}{4} - y^2} + \frac{9}{8} \sin^{-1} \frac{2y}{3} \right]_{1/2}^{3/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^{3/2} + 2 \left[ \left( 0 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}} \right) + \frac{9}{8} \left( \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} \frac{1}{3} \right) \right] \\
&= \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{9}{4} \left( \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{4} \sin^{-1} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9}{4} \sin^{-1} \frac{2\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 2. वक्रों  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  एवं  $x^2 + y^2 = 1$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :  $x^2 + y^2 = 1$  ... (i)

तथा  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  ... (ii)

वक्र (i) एक वृत्त है जिसका केन्द्र  $(0, 0)$  है तथा त्रिज्या 1 इकाई है। जबकि समीकरण (ii) का केन्द्र  $(1, 0)$  है तथा त्रिज्या 1 इकाई है। दोनों वृत्त  $x$ -अक्ष के सापेक्ष सममित हैं।

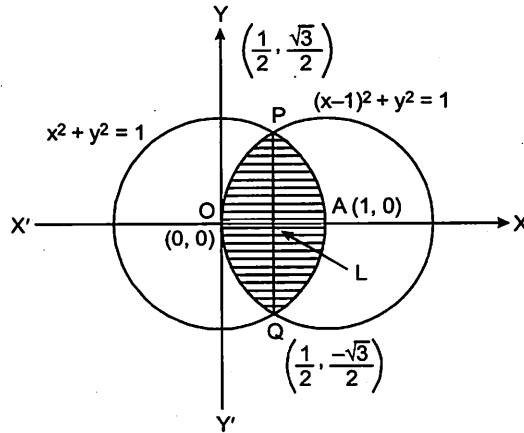
समीकरण (i) और (ii) को हल करने पर

$$-2x + 1 = 0 \text{ या } x = \frac{1}{2}$$

तब  $y^2 = 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}$

या  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$  प्रतिच्छेद बिन्दु  $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  और  $Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  हैं।



$\therefore$  अभीष्ट क्षेत्रफल =  $OQAP$  क्षेत्रफल

$= 2 \times$  क्षेत्र  $OAP$  का क्षेत्रफल

$= 2 \times$  क्षेत्र  $OLP$  और  $LAP$  का क्षेत्रफल

$$= 2 \left[ \int_0^{1/2} \sqrt{1 - (x-1)^2} dx + \int_{1/2}^1 \sqrt{1 - x^2} dx \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left[ \frac{(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}}{2} + \frac{1}{2} \sin^{-1}(x-1) \right]_0^{1/2} + 2 \left[ \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \sin^{-1} x \right]_{1/2}^1 \\
 &= 2 \left\{ \left[ \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( -\frac{1}{2} \right) \right] - \left[ 0 + \frac{1}{2} \sin^{-1}(-1) \right] \right\} \\
 &\quad + \left[ \left( 0 + \frac{1}{2} \sin^{-1} 1 \right) - \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{1}{2} \right) \right] \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} \\
 &= \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ वर्ग इकाई।}
 \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 3. वक्रों  $y = x^2 + 2$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$  एवं  $x = 3$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया परवलय का समीकरण,  $y = x^2 + 2$  या  $x^2 = y - 2$

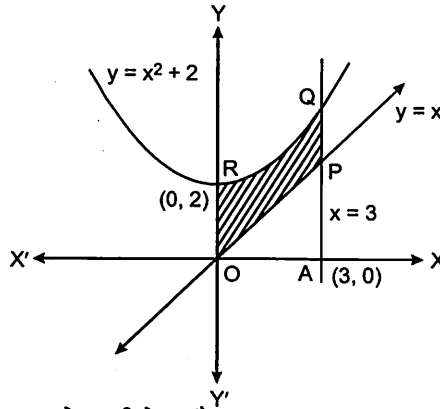
... (i)

जिसका शीर्ष  $(0, 2)$  है तथा सममित का अक्ष  $OY$  है।

तथा

$$y = x$$

... (ii)



यह मूल बिन्दु  $(0, 0)$  से होकर जाने वाली रेखा है।

रेखा  $x = 3$ ,  $y$ -अक्ष के समान्तर है।

अतः अभीष्ट क्षेत्र का क्षेत्रफल =  $ROPQ$  का क्षेत्रफल -  $OAP$  का क्षेत्रफल

$$= \int_0^3 (x^2 + 2) dx - \int_0^3 x dx$$

$$= \left[ \frac{x^3}{3} + 2x \right]_0^3 - \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^3$$

$$= (9 + 6) - \frac{9}{2} = 15 - \frac{9}{2} = \frac{21}{2} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 4. समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष  $(-1, 0)$ ,  $(1, 3)$  एवं  $(3, 2)$  हैं।

हल : दिए गए शीर्ष हैं :  $(-1, 0)$ ,  $(1, 3)$  और  $(3, 2)$

हम जानते हैं कि बिन्दु  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

माना बिन्दु  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 3)$  को मिलाने वाली रेखा  $AB$  का समीकरण

$$y - 0 = \frac{3-0}{1+1}(x+1)$$

$$y = \frac{3}{2}(x+1) \quad \dots(i)$$

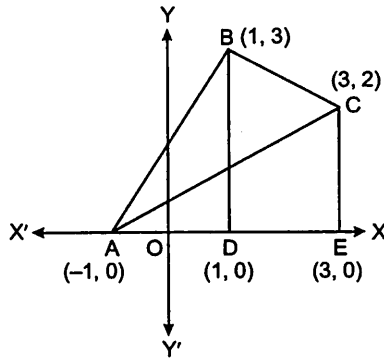
माना बिन्दु  $B(1, 3)$ ,  $C(3, 2)$  को मिलाने वाली रेखा  $BC$  का समीकरण

$$y - 3 = \frac{2-3}{3-1}(x-1) = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}(x-1) + 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \quad \dots(ii)$$

तथा बिन्दु  $C(3, 2)$ ,  $A(-1, 0)$  को मिलाने वाली रेखा  $AC$  का समीकरण

$$y - 0 = \frac{2-0}{3+1}(x+1) \text{ या } y = \frac{1}{2}(x+1) \quad \dots(iii)$$



$\Delta ABC$  का क्षेत्रफल =  $\Delta ABD$  का क्षेत्रफल + समलम्ब चतुर्भुज

$BDEC$  का क्षेत्रफल -  $\Delta ACE$  का क्षेत्रफल

$$= \int_{-1}^1 y \, dx \text{ (AB के लिए)} + \int_1^3 y \, dx \text{ (BC के लिए)} \\ - \int_{-1}^3 y \, dx \text{ (AC के लिए)}$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{3}{2}(x+1) \, dx + \int_1^3 \frac{7-x}{2} \, dx - \int_{-1}^3 \frac{x+1}{2} \, dx$$

$$= \frac{3}{2} \left[ \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \left[ 7x - \frac{x^2}{2} \right]_1^3 - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^3$$

$$= \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \right] + \frac{1}{2} \left[ 21 - \frac{9}{2} - \left( 7 - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$- \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{9}{2} + 3 \right) - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \right]$$

$$= \frac{3}{2} \times 2 + \frac{1}{2} (14 - 4) - \frac{1}{2} \left( \frac{15}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 3 + 5 - 4 = 4.$$

उत्तर

प्रश्न 5. समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिकोणीय क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाओं के समीकरण  $y = 2x + 1$ ,  $y = 3x + 1$  एवं  $x = 4$  हैं।

हल : दिया है :

$$y = 2x + 1 \quad \dots(i)$$

$$y = 3x + 1 \quad \dots(ii)$$

$$\text{तथा } x = 4 \quad \dots(iii)$$

समीकरण (i) तथा (ii) को हल करने पर,

$$x = 0 \text{ तथा } y = 1$$

समीकरण (i) तथा (iii) को हल करने पर

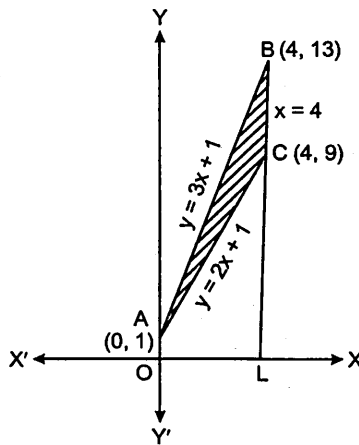
$$x = 4, \therefore y = 2 \times 4 + 1 = 9$$

समीकरण (ii) तथा (iii) को हल करने पर

$$x = 4,$$

$$y = 3 \times 4 + 1 = 13$$

$\therefore$  बिन्दु  $(0, 1)$ ,  $(4, 9)$ ,  $(4, 13)$  की सहायता से चित्र खींचिए।



त्रिभुज  $ABC$  का क्षेत्रफल = समलम्ब चतुर्भुज  $AOLB$  का क्षेत्रफल - समलम्ब चतुर्भुज  $AOLC$  का क्षेत्रफल

$$= \int_0^4 (3x + 1) dx - \int_0^4 (2x + 1) dx$$

$$= \left( \frac{3x^2}{2} + x \right)_0^4 - \left( \frac{2x^2}{2} + x \right)_0^4$$

$$= \left( \frac{3 \times 16}{2} + 4 \right) - (16 + 4)$$

$$= 28 - 20 = 8 \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 6 एवं 7 में सही उत्तर का चयन कीजिए :

प्रश्न 6. वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$  एवं रेखा  $x + y = 2$  से घिरे छोटे भाग का क्षेत्रफल है :

(A)  $2(\pi - 2)$

(B)  $(\pi - 2)$

(C)  $2\pi - 1$

(D)  $2(\pi + 2)$

हल :  $\therefore$

$\Delta ABC$  का क्षेत्रफल =  $OABC$  का क्षेत्रफल -  $\Delta OAB$  का क्षेत्रफल

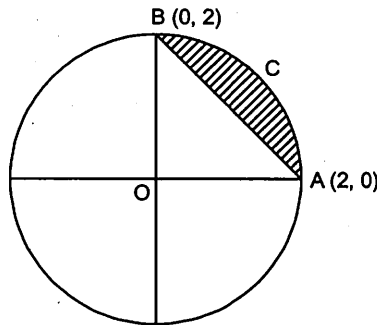
$$= \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx - \int_0^2 (2 - x) dx$$

$$= \left[ \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} + \frac{4}{2} \sin^{-1} \frac{x}{2} \right]_0^2 - \left[ 2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2$$

$$= [2 \sin^{-1} 1 - 0] + \left[ 4 - \frac{4}{2} - 0 \right]$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{2} - 2$$

$$= \pi - 2$$



अतः विकल्प (B) सही है।

उत्तर

प्रश्न 7. वक्रों  $y^2 = 4x$  एवं  $y = 2x$  के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल है :

(A)  $\frac{2}{3}$

(B)  $\frac{1}{3}$

(C)  $\frac{1}{4}$

(D)  $\frac{3}{4}$

हल : दिया गया वक्र है :

$$y^2 = 4x$$

$$y = 2x$$

...(i)

...(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से,

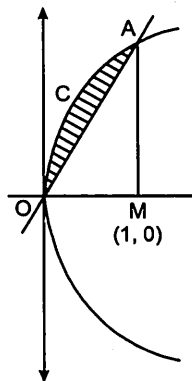
$$(4x)^2 = 4x$$

$\therefore$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0, x = 1$$

अतः वक्र (i) और (ii) एक-दूसरे को  $O(0, 0)$  तथा  $A(1, 2)$  पर प्रतिच्छेद करते हैं।



वक्रों  $y^2 = 4x$  तथा  $y = 2x$  के मध्यवर्ती क्षेत्रफल

$= OMACO$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल  $- OMA$  का क्षेत्रफल

$$= \int_0^1 \sqrt{4x} dx = 2 \frac{2}{3} [x^{3/2}]_0^1 = \frac{4}{3} \times 1$$

$$= \frac{4}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$



तथा

$$= \int_0^1 2x \, dx = [x^2]_0^1 = 1$$

$$= \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

अतः विकल्प (B) सही है।

उत्तर

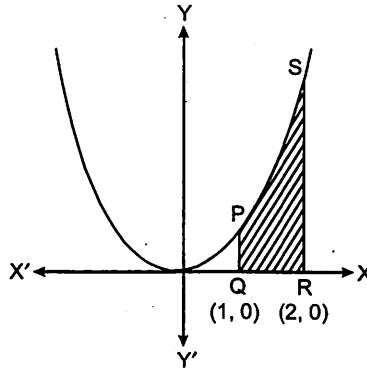
### अध्याय 8 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. दिए हुए वक्रों एवं रेखाओं से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i)  $y = x^2$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  एवं  $x$ -अक्ष

(ii)  $y = x^4$ ,  $x = 1$ ,  $x = 5$  एवं  $x$ -अक्ष

हल : प्रश्नानुसार परवलय  $y = x^2$  का शीर्ष  $(0, 0)$  है और सममित रेखा  $OY$  है।



$y = x^2$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  एवं  $x$ -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

= क्षेत्र  $PQRS$  का क्षेत्रफल

$$= \int_1^2 y \, dx$$

$$= \int_1^2 x^2 \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2$$

$$= \left[ \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right]$$

$$= \frac{7}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

(ii) दिया है :  $y = x^4$  बिन्दु  $(0, 0)$  से होकर जाता है। इसकी सममित रेखा  $OY$  है।

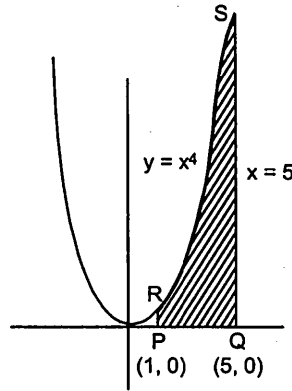
$y = x^4$  हेतु  $x$  तथा  $y$  के निम्नलिखित मान हैं :

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2  | 3  |
|-----|----|---|---|----|----|
| $y$ | 1  | 0 | 1 | 16 | 81 |

तथा  $x$ -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

= क्षेत्र  $PQRS$  का क्षेत्रफल

$$= \int_1^5 y \, dx = \int_1^5 x^4 \, dx = \left[ \frac{x^5}{5} \right]_1^5$$



$$= \left( \frac{5^5}{5} - \frac{1}{5} \right) = 625 - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{3125 - 1}{5} = \frac{3124}{5}$$

$$= 624.8 \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 2. वक्रों  $y = x$  एवं  $y = x^2$  के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है :

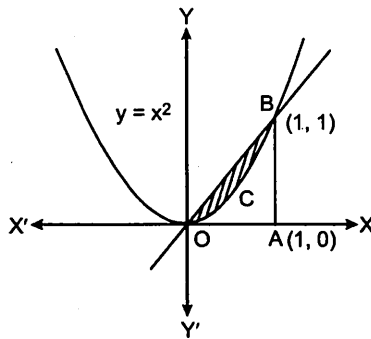
तथा

$$y = x$$

$$y = x^2$$

... (i)

... (ii)



$y$  का मान  $y = x^2$  में रखने पर

$$x = x^2 \text{ या } x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 0, x = 1$$

जब  $x = 0$  तो  $y = 0$  तथा जब  $x = 1$  तो  $y = 1$

अतः  $y = x^2$  एवं  $y = x$ , बिन्दु  $(0, 0)$  तथा  $(1, 1)$  पर प्रतिच्छेद करते हैं।

वक्र  $y = x^2$  एवं  $y = x$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \text{क्षेत्र } OCB \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$= \text{क्षेत्र } OAB \text{ का क्षेत्रफल} - \text{क्षेत्र } OABC \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$= \int_0^1 y_1 dx - \int_0^1 y_2 dx$$

$\therefore$

$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx$$

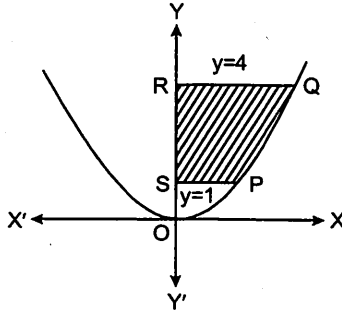
$$= \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 3. प्रथम चतुर्थांश में सम्मिलित एवं  $y = 4x^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$  तथा  $y = 4$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है :  $y = 4x^2$  एक परवलय जिसका शीर्ष  $(0, 0)$  है।



अब  $y = 4x^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$  तथा  $y = 4$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

= क्षेत्र PQRS का क्षेत्रफल

$$= \int_1^4 x \, dy = \int_1^4 \sqrt{\frac{y}{4}} \, dy = \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{y} \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} [y^{3/2}]_1^4 = \frac{1}{3} [4^{3/2} - 1^{3/2}]$$

$$= \frac{1}{3} (8 - 1)$$

$$= \frac{7}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$

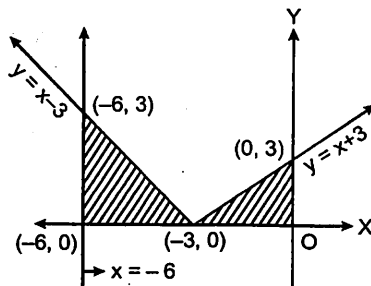
उत्तर

प्रश्न 4.  $y = |x + 3|$  का ग्राफ खींचिए एवं  $\int_{-6}^0 |x + 3| \, dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है :

$$y = |x + 3|$$

$$= \begin{cases} (x + 3), & x \geq -3 \\ -(x + 3), & x < -3 \end{cases}$$



जब  $x < -3$  अर्थात्  $y = -x - 3$

|     |    |    |    |
|-----|----|----|----|
| $x$ | -4 | -5 | -6 |
| $y$ | 1  | 2  | 3  |

और जब  $x \geq -3$

|     |    |    |    |
|-----|----|----|----|
| $x$ | -1 | -2 | -3 |
| $y$ | 2  | 1  | 0  |

अभीष्ट क्षेत्रफल,

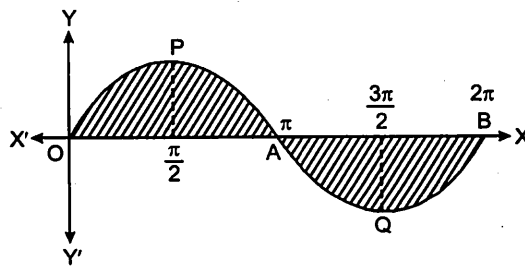
$$\begin{aligned}
 \therefore \int_{-6}^0 |x+3| dx &= \int_{-6}^{-3} |x+3| dx + \int_{-3}^0 |x+3| dx \\
 &= -\int_{-6}^{-3} (x+3) dx + \int_{-3}^0 (x+3) dx \\
 &= -\left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-6}^{-3} + \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-3}^0 \\
 &= -\left[\frac{9}{2} - 9 - 18 + 18\right] + \left[0 + 0 + \frac{9}{2} + 4\right] \\
 &= \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9 \text{ वर्ग इकाई।}
 \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 5.  $x = 0$  एवं  $x = 2\pi$  तथा वक्र  $y = \sin x$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :  $y = \sin x$  के ग्राफ पर  $x$  के कुछ मानों के संगत  $y$  के मान निम्न प्रकार हैं। इन बिन्दुओं को वक्र द्वारा मिलाने से निम्नानुसार ग्राफ प्राप्त होता है :

|     |   |                 |                 |                 |                 |                  |                  |                  |       |
|-----|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------|
| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ |
| $y$ | 0 | 0.5             | 0.7             | 0.8             | 1               | 0.5              | 0.7              | 0.8              | 0     |



$$\begin{aligned}
 \text{अभीष्ट क्षेत्रफल} &= \int_0^{\pi} y dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-y) dx \\
 &= \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \\
 &= [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} \\
 &= (-\cos \pi + \cos 0) + \cos 2\pi - \cos \pi \\
 &= [ -(-1) + 1 ] + [ 1 - (-1) ] \\
 &= (1 + 1) + (1 + 1) \\
 &= 4 \text{ वर्ग इकाई।}
 \end{aligned}$$

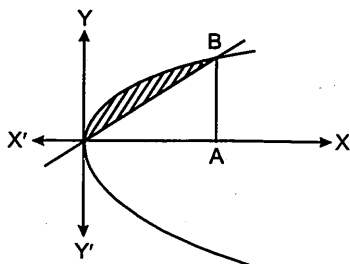
उत्तर

प्रश्न 6. परवलय  $y^2 = 4ax$  एवं रेखा  $y = mx$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए वक्र और सरल रेखा का समीकरण

$$y^2 = 4ax \quad \dots(i)$$

$$y = mx \quad \dots(ii)$$



$y$  का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$m^2x^2 = 4ax \text{ या } x = \frac{4a}{m^2}, \text{ और } x = 0$$

इस प्रकार वक्र  $y^2 = 4ax$  और रेखा  $y = mx$  बिन्दु  $O(0, 0)$  तथा  $P\left(\frac{4a}{m^2}, \frac{4a}{m}\right)$  पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अतः  $y^2 = ax$  तथा  $y = mx$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

= क्षेत्र  $OCB$  का क्षेत्रफल

= क्षेत्र  $ABCO$  का क्षेत्रफल -  $\Delta OAB$  का क्षेत्रफल

$$= \int_0^{\frac{4a}{m^2}} y_1 dx - \int_0^{\frac{4a}{m^2}} y_2 dx$$

जबकि  $y_1$  वक्र  $y^2 = 4ax$  और  $y_2$  रेखा  $y = mx$  के लिए प्रयुक्त करने पर

$$= \int_0^{\frac{4a}{m^2}} \sqrt{4ax} dx - \int_0^{\frac{4a}{m^2}} mx dx$$

$$= 2\sqrt{a} \times \frac{2}{3} [x^{3/2}]_0^{\frac{4a}{m^2}} - \frac{m}{2} [x^2]_0^{\frac{4a}{m^2}}$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{a} - \left(\frac{4a}{m^2}\right)^{3/2} - \frac{m}{2} \left(\frac{4a}{m^2}\right)^2$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{a} \cdot \frac{a^{3/2}}{m^3} - \frac{m}{2} \frac{16a^2}{m^4} = \frac{32}{3} \frac{a^2}{m^3} - \frac{8a^2}{m^3}$$

$$= \frac{(32-24)a^2}{3m^3} = \frac{8a^2}{3m^3} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 7. परवलय  $4y = 3x^2$  एवं रेखा  $2y = 3x + 12$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय तथा रेखा के समीकरण

$$4y = 3x^2 \quad \dots(i)$$

$$2y = 3x + 12 \quad \dots(ii)$$

$2y$  का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$2(3x + 12) = 3x^2 \text{ या } 3x^2 - 6x - 24 = 0$$

या

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \text{या} \quad (x-4)(x+2) = 0$$

 $\therefore$ 

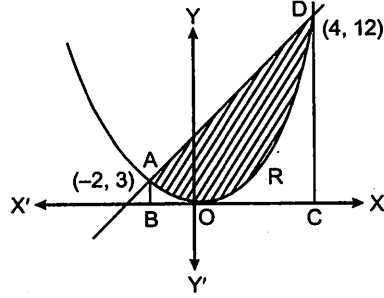
$$x = 4, -2$$

जब

$$x = 4 \text{ तो } 2y = 12 + 12 = 24 \text{ या } y = 12$$

तथा जब

$$x = -2 \text{ तो } 2y = -6 + 12 = 6 \text{ या } y = 3$$



इस प्रकार परवलय और रेखा एक-दूसरे को  $P(-2, 3)$  तथा  $Q(4, 12)$  पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र  $AOD$  का क्षेत्रफल

= समलम्ब चतुर्भुज  $ABCD$  का क्षेत्रफल - क्षेत्रफल  $ABCO$

$$= \int_{-2}^4 y_1 dx \text{ (रेखा के लिए)} - \int_{-2}^4 y_2 dx \text{ (परवलय के लिए)}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 (3x + 12) dx - \int_{-2}^4 \frac{3x^2}{4} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{3x^2}{2} + 12x \right]_{-2}^4 - \frac{3}{4} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^4$$

$$= \frac{1}{2} [(24 + 48) - (6 - 24)] - \frac{3}{4} \left( \frac{64}{3} - \left( -\frac{8}{3} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} [72 + 18] - \frac{3}{4} \cdot \frac{72}{3}$$

$$= \frac{90}{2} - 18 = 45 - 18 = 27 \text{ वर्ग इकाई।}$$

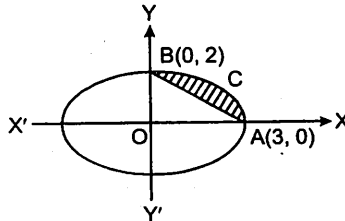
उत्तर

प्रश्न 8. दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  एवं रेखा  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$  से घिरे लघु क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  ... (i)

रेखा  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$  ... (ii)

दोनों समीकरणों से प्राप्त बिन्दु  $A(3, 0)$ ,  $B(0, 2)$  एक दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं।



$$\begin{aligned}
 \text{अभीष्ट क्षेत्रफल} &= \int_0^1 y_1 dx (\text{दीर्घ वृत्त के लिए}) - \int_0^3 y_2 dx (\text{रेखा के लिए}) \\
 &= \int_0^3 \frac{2}{3} \sqrt{9-x^2} dx - \int_0^3 2 \left(1 - \frac{x}{3}\right) dx \\
 &= \frac{2}{3} \left[ \frac{x}{2} \sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x}{3} \right]_0^3 - \frac{2}{3} \int_0^3 (3-x) dx \\
 &= \frac{2}{3} \left[ \left(0 + \frac{9}{2} \sin^{-1} 1\right) - (0) \right] - \frac{2}{3} \left[ 3x - \frac{x^2}{2} \right]_0^3 \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \left[ 9 - \frac{9}{2} \right] = \frac{3}{2} \pi - \frac{2}{3} \times \frac{9}{2} \\
 &= \frac{3}{2} \pi - 3 = \frac{3}{2} (\pi - 2) \text{ वर्ग इकाई।}
 \end{aligned}$$

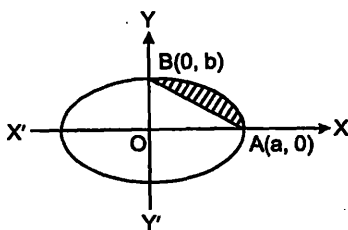
उत्तर

प्रश्न 9. दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  एवं रेखा  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  से घिरे लघु क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है :

$$\text{रेखा } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \dots(i)$$

$$\text{दीर्घवृत्त } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots(ii)$$



दोनों समीकरण बिन्दु  $A(a, 0)$  तथा  $B(0, b)$  पर प्रतिच्छेद करते हैं।

$$\begin{aligned}
 \text{अभीष्ट क्षेत्रफल} &= \text{क्षेत्र } BAC \text{ का क्षेत्रफल} \\
 &= \text{क्षेत्र } OACB \text{ का क्षेत्रफल} - \text{क्षेत्र } OAB \text{ का क्षेत्रफल} \\
 &= \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx - \int_0^a b \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx \\
 &= \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx - \frac{b}{a} \int_0^a (a-x) dx \\
 &= \frac{b}{a} \left[ \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_0^a - \frac{b}{a} \left[ ax - \frac{x^2}{2} \right]_0^a \\
 &= \frac{b}{a} \left[ \frac{a^2}{2} \sin^{-1} 1 - 0 \right] - \frac{b}{a} \left[ a^2 - \frac{a^2}{2} \right] \\
 &= \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2}$$

$$= \frac{ab}{4}(\pi - 2) \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 10. परवलय  $x^2 = y$ , रेखा  $y = x + 2$  और  $x$ -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है :

$$x^2 = y$$

...(i)

और

$$y = x + 2$$

...(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से,

$$x^2 = x + 2$$

या

$$x^2 - x - 2 = 0$$

या

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

या

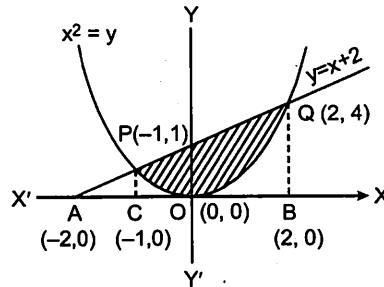
$$x = 2, x = -1$$

∴ जब

$$x = 2 \text{ तो } y = (2)^2 = 4$$

और जब

$$x = -1 \text{ तो } y = (-1)^2 = 1$$



अतः बिन्दु (2, 4) और (-1, 1) प्रतिच्छेदन बिन्दु हैं।

$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_{-1}^2 [y(\text{रेखा के लिए}) - y(\text{परवलय के लिए})] dx$$

$$= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2$$

$$= \left| \frac{1}{2}(4 - 1) + 2(2 + 1) - \frac{1}{3}(8 + 1) \right|$$

$$= \frac{3}{2} + 6 - 3 = \frac{9}{2} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 11. समाकलन विधि का उपयोग करते हुए वक्र  $|x| + |y| = 1$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए समीकरण

$$x + y = 1$$

...(i)

$$x - y = 1$$

...(ii)

$$-x + y = 1$$

...(iii)

$$-x - y = 1$$

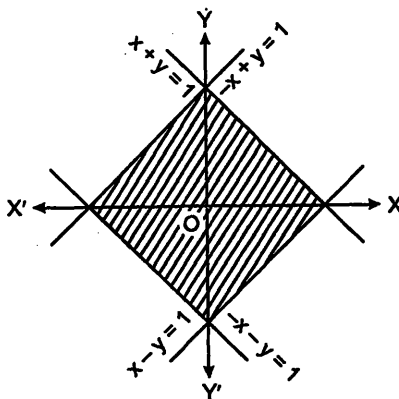
...(iv)

इनसे घिरे क्षेत्र का अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= 4 \int_0^1 y(\text{रेखा (i) के लिए}) dx$$

क्योंकि आकृति  $x$ -अक्ष तथा  $y$ -अक्ष दोनों के लिए सममित है।





$$= 4 \int_0^1 (1-x) dx = 4 \left( x - \frac{x^2}{2} \right)_0^1$$

$$= 4 \left( 1 - \frac{1}{2} - 0 \right)$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 12. वक्रों  $\{(x, y), y > x^2 \text{ तथा } y = |x|\}$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : वक्र  $x^2 = y$  एक परवलय है जिसका शीर्ष  $(0, 0)$  है तथा सममित अक्ष  $OY$  है।

समीकरण  $y = |x|$  दो रेखाओं को निरूपित करता है।

जब

$$x > 0 \text{ तो } y = x$$

तथा जब

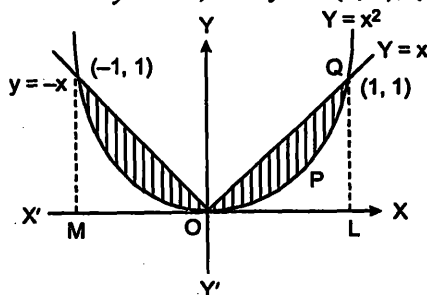
$$x < 0, y = -x$$

अर्थात्

$y = x, x^2 = y$  को  $(0, 0), (1, 1)$  पर प्रतिच्छेद करती है।

और

$y = -x, x^2 = y$  को  $(0, 0), (-1, 1)$  पर प्रतिच्छेद करती है।



अतः

अभीष्ट क्षेत्रफल =  $2 \times$  क्षेत्र  $OPQ$  का क्षेत्रफल

=  $2[\Delta OLQ \text{ का क्षेत्रफल} - \text{क्षेत्र } OLQPO \text{ का क्षेत्रफल}]$

$$= 2 \left[ \int_0^1 y_1 dx - \int_0^1 dx \right] y_1 \text{ रेखा } y = x \text{ तथा } y_2$$

वक्र  $x^2 = y$  के लिए प्रयुक्त करने पर

$$= 2 \left[ \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx \right]$$

$$= 2 \left\{ \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \left[ \frac{x^3}{2} \right]_0^1 \right\} = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 13. समाकलन विधि का उपयोग करते हुए, एक ऐसे त्रिभुज  $ABC$  का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक  $A(2, 0)$ ,  $B(4, 5)$  एवं  $C(6, 3)$  हैं।

हल : दिया है : रेखा  $AB$  का समीकरण

$$y - 0 = \frac{5-0}{4-2}(x-2)$$

अर्थात्

$$y = \frac{5}{2}(x-2)$$

इसी प्रकार रेखा  $BC$  का समीकरण है

$$y - 5 = \frac{3-5}{6-4}(x-4)$$

या

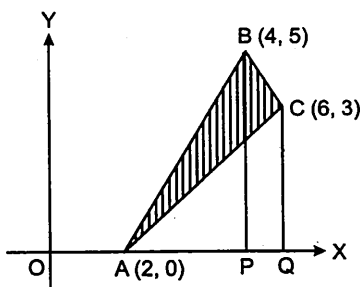
$$y = -x + 9$$

तथा रेखा  $CA$  का समीकरण है

$$y - 3 = \frac{0-3}{2-6}(x-6)$$

या

$$y = \frac{3}{4}(x-2)$$



अभीष्ट क्षेत्रफल =  $\triangle ABC$  द्वारा घेरा गया क्षेत्र का क्षेत्रफल

= क्षेत्र  $\triangle APB$  का क्षेत्रफल + समलम्ब चतुर्भुज

$BPQC$  का क्षेत्रफल - क्षेत्र  $\triangle AQC$  का क्षेत्रफल

$$= \frac{5}{2} \int_2^4 (x-2) dx + \int_4^6 -(x-9) dx - \frac{3}{4} \int_2^6 (x-2) dx$$

$$= \frac{5}{2} \left[ \frac{(x-2)^2}{2} \right]_2^4 - \left[ \frac{(x-9)^2}{2} \right]_4^6 - \frac{3}{4} \left[ \frac{(x-2)^2}{2} \right]_2^6$$

$$= \frac{5}{4} [2^2 - 0] - \frac{1}{2} [(-3)^2 - (-5)^2] - \frac{3}{8} [(4)^2 - 0]$$

$$= \frac{5}{4} \times 4 - \frac{1}{2} [9 - 25] - \frac{3}{8} (16 - 0)$$

$$= 5 + 8 - 6 = 7 \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 14. समाकलन विधि का उपयोग करते हुए, रेखाओं  $2x + y = 4$ ,  $3x - 2y = 6$  एवं  $x - 3y + 5 = 0$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए समीकरण हैं :

$$2x + y = 4 \quad \dots(i)$$

$$3x - 2y = 6 \quad \dots(ii)$$

$$x - 3y = -5 \quad \dots(iii)$$

समीकरण (i) को 2 से गुणा करके (ii) में जोड़ने पर

$$7x = 14 \text{ या } x = 2$$

अब समीकरण (i) से

$$4 + y = 4 \text{ या } y = 0$$

अतः बिन्दु C के निर्देशांक = (2, 0).

समीकरण (iii) को 2 से गुणा करके समीकरण (i) में से घटाने पर

$$7y = 14 \text{ या } y = 2$$

पुनः समीकरण (i) से  $2x + 2 = 4$  या  $x = 1$

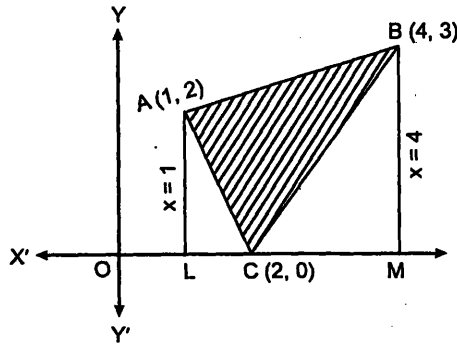
अतः बिन्दु A के निर्देशांक = (1, 2)

समीकरण (iii) को 3 से गुणा करके समीकरण (ii) में घटाने पर,

$$7y = 21 \text{ या } y = 3$$

अब समीकरण (ii) से  $3x - 6 = 6$  या  $x = 4$

अतः बिन्दु B के निर्देशांक (4, 3) हैं।



त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = समलम्ब चतुर्भुज ALMB का क्षेत्रफल  
-  $\Delta ALC$  का क्षेत्रफल -  $\Delta BCM$  का क्षेत्रफल

$$= \int_1^4 \frac{x+5}{3} dx - \int_1^2 (4-2x) dx - \int_2^4 \frac{3x-6}{2} dx$$

$$= \frac{1}{3} \left[ \frac{x^2}{2} + 5x \right]_1^4 - [4x - x^2]_1^2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{3x^2}{2} - 6x \right]_2^4$$

$$= \frac{1}{3} \left( [8+20] - \left( \frac{1}{2} + 5 \right) \right) - [(8-4) - (4-1)]$$

$$- \frac{1}{2} [(24-24) - (6-12)]$$

$$= \frac{1}{3} \left[ 28 - \frac{11}{2} \right] - [4-3] - \frac{1}{2} (0+6)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{45}{2} - 1 - 3 = \frac{15}{2} - 4 = \frac{7}{2} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 15. क्षेत्र  $\{(x, y) : y^2 \leq 4x, 4x^2 + 4y^2 \leq 9\}$  का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है :  $y^2 = 4x$  एक परवलय है जिसका शीर्ष मूल बिन्दु  $(0, 0)$  है जिसका अक्ष  $x$ -अक्ष है साथ ही

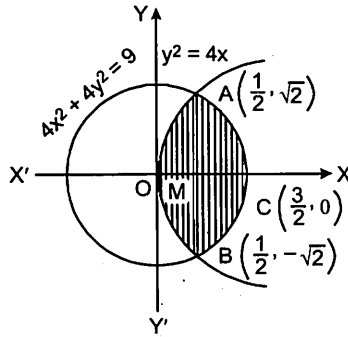
$4x^2 + 4y^2 = 9$  एक वृत्त को निरूपित करता है जिसका केन्द्र  $(0, 0)$  और त्रिज्या  $= \frac{3}{2}$  है।

अतः  $y^2 = 4x$  ... (i)

और  $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$  ... (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) को हल करने पर,

$A\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$  और  $B\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$  प्राप्त होते हैं। दोनों ही वक्र  $x$ -अक्ष के सापेक्ष सममित हैं।



∴

अभीष्ट क्षेत्रफल = छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left( \int_0^{1/2} 2\sqrt{x} dx + \int_{1/2}^{3/2} \sqrt{\frac{9}{4} - x^2} dx \right) \\
 &= 4 \left[ \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^{1/2} + 2 \left[ \frac{x}{2} \sqrt{\frac{9}{4} - x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \sin^{-1} \left( \frac{x}{3/2} \right) \right]_{1/2}^{3/2} \\
 &= \frac{8}{3} \left( \frac{1}{3\sqrt{2}} - 0 \right) + \left[ x \sqrt{\frac{9}{4} - x^2} + \frac{9}{4} \sin^{-1} \left( \frac{2x}{3} \right) \right]_{1/2}^{3/2} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3} + 0 + \frac{9}{4} \sin^{-1}(1) - \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{9}{4} \sin^{-1} \left( \frac{1}{3} \right) \right) \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{4} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{9}{4} \sin^{-1} \left( \frac{1}{3} \right) \\
 &= \left[ \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4} \sin^{-1} \left( \frac{1}{3} \right) \right] \\
 &= \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4} \sin^{-1} \left( \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 16 से 19 तक के प्रश्नों में सही उत्तर का चयन कीजिए—

प्रश्न 16. वक्र  $y = x^3$ ,  $x$ -अक्ष एवं कोटियों  $x = -2$ ,  $x = 1$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है—

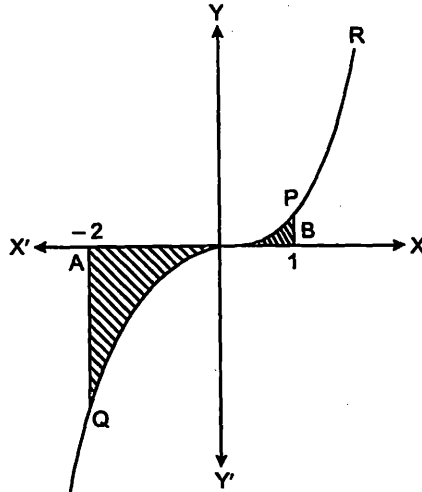
- (A)  $-9$                       (B)  $-\frac{15}{4}$                       (C)  $\frac{15}{4}$                       (D)  $\frac{17}{4}$

हल : दिया गया वक्र

$$y = x^3$$

अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 = \text{धनात्मक है।}$$



∴ दिया वक्र वर्द्धमान है,

$$\frac{dy}{dx} = 0, x = 0$$

∴ x-अक्ष पर स्पर्श रेखा है।

$$f(-x) = -f(x) \therefore (-x)^3 = -x^3$$

$y = x^3$ , द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= A Q O A \text{ का क्षेत्रफल} + B P O \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$= \int_{-2}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx$$

$$= \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^0 + \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 0 - \frac{(-2)^4}{4} + \left( \frac{1}{4} - 0 \right)$$

$$= \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

अतः विकल्प (D) सही है।

उत्तर

प्रश्न 17. वक्र  $y = x|x|$ , x-अक्ष एवं कोटियों  $x = -1$  तथा  $x = 1$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है :

- (A) 0                      (B)  $\frac{1}{3}$                       (C)  $\frac{2}{3}$                       (D)  $\frac{4}{3}$

हल : जब  $x > 0$ ,  $|x| = x$

∴ वक्र का दिया गया समीकरण है :  $y = x^2$   
 $y = +x^2$

जब  $x < 0$ ,  $|x| = -x$ ,

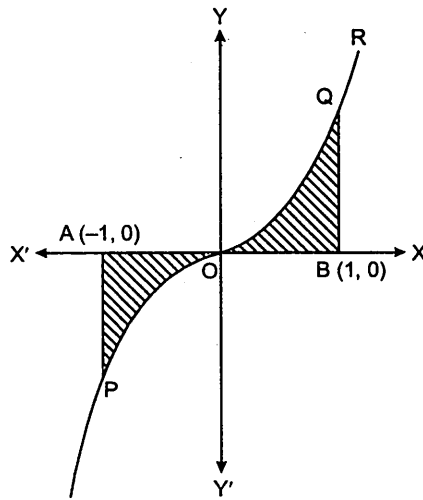
∴ वक्र का दिया गया समीकरण है :

$$y = -x^2$$

x-अक्ष से घिरा क्षेत्रफल

$$= P O A \text{ का क्षेत्रफल} + \Delta B Q O \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$= \int_{-1}^0 -x^2 dx + \int_0^1 x^2 dx = 2 \times \int_0^1 x^2 dx$$



$$= 2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

अतः विकल्प (C) सही है।

प्रश्न 18. क्षेत्र  $y^2 \geq 6x$  और वृत्त  $x^2 + y^2 = 16$  में सम्मिलित क्षेत्र का क्षेत्रफल है :

(A)  $\frac{4}{3}(4\pi - \sqrt{3})$

(B)  $\frac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})$

(C)  $\frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$

(D)  $\frac{4}{3}(8\pi + \sqrt{3})$

हल : वक्रों के समीकरण हैं :

$$x^2 + y^2 = 16$$

...(i)

$$y^2 = 6x$$

...(ii)

समीकरण (i) में  $y^2 = 6x$  रखने पर

$$x^2 + 6x = 16$$

या

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

या

$$(x + 8)(x - 2) = 0$$

∴

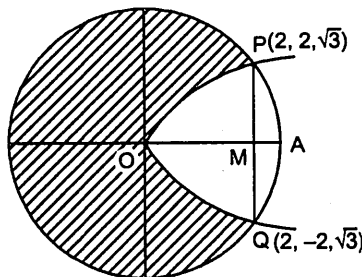
$$x = -8, 2$$

परन्तु

$$x \neq -8$$

अतः

$$x = 2$$



परवलय तथा वृत्त के अन्दर का क्षेत्रफल

$$= POQAP \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$= 2(POM \text{ का क्षेत्रफल} + PMA \text{ का क्षेत्रफल})$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left[ \int_0^2 \sqrt{6x} \, dx + \int_2^4 \sqrt{16-x^2} \, dx \right] \\
 &= 2 \left[ \sqrt{6} \cdot \frac{2}{3} [x^{3/2}]_0^2 + \left[ \frac{x}{2} \sqrt{16-x^2} + \frac{16}{2} \sin^{-1} \frac{x}{4} \right]_2^4 \right] \\
 &= 2 \left\{ \frac{2}{4} \sqrt{6} (2^{3/2} - 0) + \left[ (0 + 8 \sin^{-1}(1)) - \left( \sqrt{12} + 8 \sin^{-1} \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{4}{3} \sqrt{6} \cdot \sqrt{8} + 2 \left( 8 \times \frac{\pi}{2} - \sqrt{12} - 8 \times \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \frac{16}{3} \sqrt{3} + 8\pi - 2\sqrt{12} - \frac{8\pi}{3} \\
 &= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{16\pi}{3}
 \end{aligned}$$

अब वृत्त  $x^2 + y^2 = 16$  का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 &= 4 \int_0^4 \sqrt{16-x^2} \, dx \\
 &= 4 \left[ \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + \frac{16}{2} \sin^{-1} \frac{x}{4} \right]_0^4 \\
 &= 4[(0 + 8 \sin^{-1} 1) - 0] = 32 \times \frac{\pi}{2} \\
 &= 16\pi
 \end{aligned}$$

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल -  $POQAP$  का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 &= 16\pi - \left( \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{16}{3} \pi \right) \\
 &= \frac{4}{3} (8\pi - \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

अतः विकल्प (C) सही है।

उत्तर

प्रश्न 19.  $y$ -अक्ष,  $y = \cos x$  एवं  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है—

- (A)  $2(\sqrt{2}-1)$       (B)  $\sqrt{2}-1$       (C)  $\sqrt{2}+1$       (D)  $\sqrt{2}$

हल : दिए वक्र हैं :

$$y = \cos x, y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$y$  का मान रखने पर,

$$\sin x = \cos x$$

या

$$\tan x = 1$$

$\Rightarrow$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

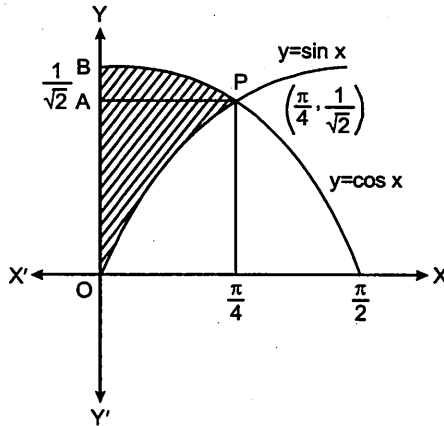
$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$y$ -अक्ष पर,  $y = \cos x$  तथा  $y = \sin x$   $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

$= \Delta OPBO$  का क्षेत्रफल

$= \Delta PAO$  का क्षेत्रफल +  $APBA$  का क्षेत्रफल

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x_1 dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 x_2 dy$$



जहाँ  $x_1$  वक्र  $y = \sin x$  या  $x = \sin^{-1} y$ ,

और  $x_2$  वक्र  $y = \cos x$  अथवा  $x = \cos^{-1} y$ .

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin^{-1} y dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \cos^{-1} y dy$$

$$= \left[ y \sin^{-1} y - \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} y dy \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[ y \cos^{-1} y + \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} y dy \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$

$$= \left[ y \sin^{-1} y + \sqrt{1-y^2} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[ y \cos^{-1} y - \sqrt{1-y^2} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$

$$= \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - 1 \right] + \left[ (\cos^{-1} 1 - 0) - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

$$= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) + \left( 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1 \text{ वर्ग इकाई।}$$

अतः विकल्प (B) सही है।

उत्तर