अध्याय-9

अवकल समीकरण

(Differential Equations)

(Important Formulae and Definitions)

1. यदि किसी समीकरण में स्वतन्त्र चर, परतन्त्र चर एवं परतन्त्र चर का अवकल गुणांक विद्यमान हो, तो उसे अवकल समीकरण कहते हैं।
2. किसी अवकल समीकरण की कोटि उसमें विद्यमान उच्चतम कोटि के अवकल की कोटि के बराबर होती है।
3. किसी अवकल समीकरण की घात उसमें विद्यमान उच्चतम कोटि के अवकलज की घात के बराबर होती है।
4. किसी अवकल समीकरण का पूर्णग उसका व्यापक हल कहा जाता है।
5. अवकल समीकरण का हल दोनों तरफ का समाकलन करने से प्राप्त होता है।
6. dx का गुणांक केवल x का फलन और dy का गुणांक केवल y का फलन हो तो हम कहते हैं कि चर पृथक् करने योग्य हैं।
7. x के सापेक्ष समाकलन करके एक स्वेच्छ अचर (c) को जोड़ देते हैं।
8. एक ऐसा अवकल समीकरण, जिसको $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है, जहाँ $f(x, y)$ शून्य घात वाला समघातीय फलन है, समघातीय अवकल समीकरण कहलाता है।
9. प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ है, जहाँ P तथा Q अचर अथवा x के फलन हैं।

प्रश्नावली 9·1

प्रश्न 1 से 10 तक के प्रश्नों में प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए—

प्रश्न 1. $\frac{d^4y}{dx^4} + \sin(y''') = 0.$

हल : इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज $\frac{d^4y}{dx^4}$ है। इसलिए इसकी कोटि 4 है। इस समीकरण का बायाँ पक्ष अवकलजों में बहुपद नहीं है इसलिए इसकी घात परिभाषित नहीं है।

प्रश्न 2. $y' + 5y = 0.$

हल : इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज $\frac{dy}{dx}$ है। इसलिए इसकी कोटि 1 है। यदि y' में बहुपद समीकरण है एवं $\frac{dy}{dx}$ की अधिकतम घातांक 1 है। इसलिए अवकल समीकरण की घात भी 1 होगी।

प्रश्न 3. $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\,\frac{d^2s}{dt^2} = 0.$

हल : इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज $\frac{d^2s}{dt^2}$ है। इसकी इसकी कोटि 2 है। यह अवकल समीकरण $\frac{d^2s}{dt^2}$ एवं $\frac{ds}{dt}$ में बहुपद समीकरण है तथा $\frac{d^2s}{dt^2}$ की अधिकतम घातांक 1 है अत: इस अवकल समीकरण की घात = 1.

प्रश्न 4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0.$

हल : इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज $\frac{d^2y}{dx^2}$ है। इसलिए इसकी कोटि = 2 तथा इस समीकरण का बायाँ पक्ष अवकलजों में बहुपद नहीं है, इसलिए इसकी घात परिभाषित नहीं है।

प्रश्न 5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos 3x + \sin 3x.$

हल : इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज $\frac{d^2y}{dx^2}$ है। इसलि इसकी कोटि = 2 तथा यह अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}$ में बहुपद समीकरण है एवं $\frac{d^2y}{dx^2}$ की अधिकतम घातांक 1 है अत: इस अवकल समीकरण की घात = 1.

प्रश्न 6. $(y''')^2 + (y'')^3 + (y')^4 + y^5 = 0.$

हल : इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज y''' है अत: [illegible]ी कोटि =3 तथा y''' की घातांक 2 है। इसलिए इस अवकल समीकरण की घात = 2.

प्रश्न 7. $y''' + 2y'' + y' = 0.$

हल : इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज y''' है। इसलिए इसकी कोटि = 3 तथा चूँकि y''' की घातांक 1 है अत: इस अवकल समीकरण की घात = 1.

प्रश्न 8. $y' + y = e^x.$

हल : इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज y' है। इसलिए इसकी कोटि 1 है तथा चूँकि y' की घातांक 1 है। अत: इस अवकल समीकरण की घात = 1.

प्रश्न 9. $y'' + (y')^2 + 2y = 0.$

हल : इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज y'' है। इसलिए इसकी कोटि 2 है तथा चूँकि y'' की घातांक 1 है। अत: इस अवकल समीकरण की घात = 1.

प्रश्न 10. $y'' + 2y' + \sin y = 0.$

हल : इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज y'' है। इसलिए इसकी कोटि 2 है तथा चूँकि y'' की घातांक 1 है। अत: इस अवकल समीकरण की घात = 1.

प्रश्न 11. अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$ **की घात है :**

(A) 3 (B) 2

(C) 1 (D) परिभाषित नहीं है

उत्तर—(D) परिभाषित नहीं है।

प्रश्न 12. अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ **की कोटि है :**

(A) 2 (B) 1

(C) 0 (D) परिभाषित नहीं है

उत्तर—(A) 2.

प्रश्नावली 9·2

प्रश्न 1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न में सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (स्पष्ट अथवा अस्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है—

प्रश्न 1. $y = e^x + 1 : y'' - y' = 0.$

हल : ∵ $y = e^x + 1$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर $y' = e^x$ ...(i)

पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y'' = e^x \quad \text{...(ii)}$$

समीकरण (ii) में से समीकरण (i) को घटाने पर

$$y'' - y' = e^x - e^x$$

या $y'' - y' = 0$

अत: $y = e^x + 1$ अवकल समीकरण $y'' - y' = 0$ का हल है। **उत्तर**

प्रश्न 2. $y = x^2 + 2x + C : y' - 2x - 2 = 0.$

हल : ज्ञात फलन $y = x^2 + 2x + C$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$y' = 2x + 2$$

या $y' - 2x - 2 = 0$

जो कि दिया गया अवकल समीकरण का हल है। **उत्तर**

प्रश्न 3. $y = \cos x + C : y' + \sin x = 0.$

हल : ज्ञात फलन $y = \cos x + C$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$y' = -\sin x$$

या $y' + \sin x = 0$

जो कि दिये गये अवकल समीकरण का हल है। **उत्तर**

प्रश्न 4. $y = \sqrt{1 + x^2} : y' = \frac{xy}{1 + x^2}.$

हल : दिया गया फलन, $y = \sqrt{1 + x^2}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$y' = \frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}-1} \times 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{xy}{1+x^2}$$

जो कि दिये गए अवकल समीकरण का हल है। **उत्तर**

प्रश्न 5. $y = Ax : xy' = y \ (x \neq 0)$.

हल : दिया गया फलन, $y = Ax$

x के सापेक्ष का अवकलन करने पर,

$$y' = A \text{ परन्तु } A = \frac{y}{x}$$

A का मान रखने पर, $y' = \dfrac{y}{x}$

$\therefore$ $xy' = y$

जो कि दिए गये अवकल समीकरण $xy' = y \ (x \neq 0)$ का हल है। **उत्तर**

प्रश्न 6. $y = x \sin x : xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$ **($x \neq 0$ और $x > y$ अथवा $x < -y$).**

हल : दिया गया फलन $y = x \sin x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$y' = 1.\sin x + x.\cos x$$

$$y' = \sin x + x \cos x \quad \text{...(i)}$$

$\because$ समीकरण $y = x \sin x$

अत: $\sin x = \dfrac{y}{x}$ तथा $\cos x = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x}$

$\sin x$ व $\cos x$ का मान (i) में रखने पर

$$y' = \frac{y}{x} + x\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

$$= \frac{y + x\sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

या $xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$

जो कि दिए गए अवकल समीकरण का हल है। **उत्तर**

प्रश्न 7. $xy = \log y + C : y' = \dfrac{y^2}{1-xy}$ $(xy \neq 1)$.

हल : दिया गया फलन $\quad xy = \log y + C$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$1.y + xy' = \frac{1}{y} \times y'$$

या $\quad y^2 + xy\,y' = y'$

या $\quad y^2 = y' - xy\,y' = y'(1-xy)$

$\therefore \quad y' = \dfrac{y^2}{1-xy}$

अत: दिए गए अवकल समीकरण का हल $xy = \log y + C$. **उत्तर**

प्रश्न 8. $y - \cos y = x : (y \sin y + \cos y + x)\,y' = y$.

हल : दिया गया फलन $\quad y - \cos y = x$

x के सापेक्ष अवकल करने पर,

$$(1 + \sin y)\,y' = 1$$

y से दोनों पक्षों में गुणा करने पर,

$$(y + y \sin y)\,y' = y$$

$y - \cos y = x$ से y का मान रखने पर

$$(x + \cos y + y \sin y)\,y' = y$$

अत: $\quad (y \sin y + \cos y + x)\,y' = y$

जो कि इस अवकल समीकरण का हल है। **उत्तर**

प्रश्न 9. $x + y = \tan^{-1} y : y^2y' + y^2 + 1 = 0$.

हल : दिया गया फलन

$$x + y = \tan^{-1} y$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$1 + y' = \frac{1}{1+y^2} \times y'$$

या $\quad 1 + y^2 + y'(1 + y^2) = y'$

या $\quad 1 + y^2 + y' + y'y^2 = y'$

या $\quad 1 + y^2 + y'y^2 = 0$

अत: अवकल समीकरण $y^2y' + y^2 + 1 = 0$ का हल $x + y = \tan^{-1} y$ है। **उत्तर**

प्रश्न 10. $y = \sqrt{a^2 - x^2}, x \in (-a, a) : x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$ $(y \neq 0)$.

हल : दिया गया फलन

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$y^2 = a^2 - x^2$$

या $\quad x^2 + y^2 = a^2$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2x + 2y\,y' = 0$$

या
$$x + y\,y' = 0$$

अत: $x + y\,y' = 0$ का हल $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ है। **उत्तर**

प्रश्न 11. चार कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है :

(A) 0 (B) 2

(C) 3 (D) 4

उत्तर—(D) 4.

प्रश्न 12. तीन कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है :

(A) 3 (B) 2

(C) 1 (D) 0

उत्तर—(D) 0.

प्रश्नावली 9·3

प्रश्न 1 से 5 तक प्रत्येक प्रश्न में स्वेच्छ अचरों a तथा b को विलुप्त करते हुए दिए हुए वक्रों के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

हल : दिया है,
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\frac{dy}{dx} = 0$$

पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$0 + \frac{1}{b}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$\therefore$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{या} \quad y'' = 0$$

अत: यही अभीष्ट अवकल समीकरण है। **उत्तर**

प्रश्न 2. $y^2 = a(b^2 - x^2).$

हल : दिया है
$$y^2 = a(b^2 - x^2)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,
$$2y\frac{dy}{dx} = 0 - a.2x = -2ax$$

या
$$y\left(\frac{dy}{dx}\right) = -ax \quad \text{...(i)}$$

पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = -a \quad \text{...(ii)}$$

समीकरण (ii) में (i) का भाग देने पर,

$$\frac{y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y\frac{dy}{dx}} = \frac{-a}{-ax}=\frac{1}{x}$$

या $$x\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}\right] = y\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

या $$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx} = 0$$

या $$xy\,y''+x(y')^2-y\,y' = 0$$

अतः यही अभीष्ट अवकल समीकरण है। **उत्तर**

प्रश्न 3. $y = ae^{3x} + be^{-2x}$.

हल : दिया है $$y = ae^{3x}+be^{-2x} \qquad \text{...(A)}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 3ae^{3x}-2be^{-2x} \qquad \text{...(i)}$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9ae^{3x}+4be^{-2x} \qquad \text{....(ii)}$$

समीकरण (i) को 2 से गुणा करके समीकरण (ii) में जोड़ने पर

$$15ae^{3x} = 2\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}$$

या $$ae^{3x} = \frac{1}{15}\left(\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}\right) \qquad \text{...(iii)}$$

अब समीकरण (i) को 3 से गुणा करके समीकरण (ii) में से घटाने पर

$$10be^{-2x} = \frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}$$

या $$be^{-2x} = \frac{1}{10}\left(\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}\right) \qquad \text{...(iv)}$$

समीकरण (iii) व (iv) से समीकरण (A) में मान रखने पर

$$y = \frac{1}{15}\left(\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}\right)+\frac{1}{10}\left(\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}\right)$$

या $$30y = 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}\right)+3\left(\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= 5\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx}$$

$$= 5\left[\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right]$$

या $$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

या $$y'' - y' - 6y = 0$$

अत: यही अभीष्ट अवकल समीकरण है। **उत्तर**

प्रश्न 4. $y = e^{2x}(a + bx)$.

हल : दिया है
$$y = e^{2x}(a + bx)$$
$$= ae^{2x} + bxe^{2x} \quad ...(i)$$

x के सापेक्ष दोनों पक्षों का अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}(a + bx) + e^{2x}(b)$$
$$= 2ae^{2x} + (2bx + b)e^{2x} \quad ...(ii)$$

समीकरण (i) को 2 से गुणा करके समीकरण (ii) में से घटाने पर

$$\frac{dy}{dx} - 2y = be^{2x} \quad ...(iii)$$

इसका अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 2be^{2x} \quad ...(iv)$$

समीकरण (iv) में समीकरण (iii) का भाग देने पर

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx} - 2y} = \frac{2be^{2x}}{be^{2x}} = 2$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{dy}{dx} - 2y\right) = 2\frac{dy}{dx} - 4y$$

या $$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

या $$y'' - 4y' + 4y = 0$$

अत: यही अभीष्ट अवकल समीकरण है। **उत्तर**

प्रश्न 5. $y = e^x(a\cos x + b\sin x)$.

हल : दिया है
$$y = e^x(a\cos x + b\sin x) \quad ...(i)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = e^x(a\cos x + b\sin x) + e^x(-a\sin x + b\cos x)$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx} = e^x [(a+b)\cos x - (a-b)\sin x] \qquad ...(ii)$$

पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x [(a+b)\cos x - (a-b)\sin x] + e^x [-(a+b)\sin x - (a-b)\cos x]$$
$$= e^x (2b\cos x - 2a\sin x)$$
$$= 2e^x (b\cos x - a\sin x)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} = e^x (b\cos x - a\sin x) \qquad ...(iii)$$

समीकरण (i) और (iii) को जोड़ने पर

$$\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^x [(a+b)\cos x - (a-b)\sin x]$$
$$= \frac{dy}{dx} \qquad \text{[समीकरण (ii) से]}$$

या $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

या $$y'' - 2y' + 2y = 0$$

अत: यही अभीष्ट अवकल समीकरण है। उत्तर

प्रश्न 6. y-अक्ष को मूलबिन्दु पर स्पर्श करने वाले वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : उस वृत्त का समीकरण जो y-अक्ष को मूलबिन्दु पर स्पर्श करता है तथा जिसकी त्रिज्या a है।

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

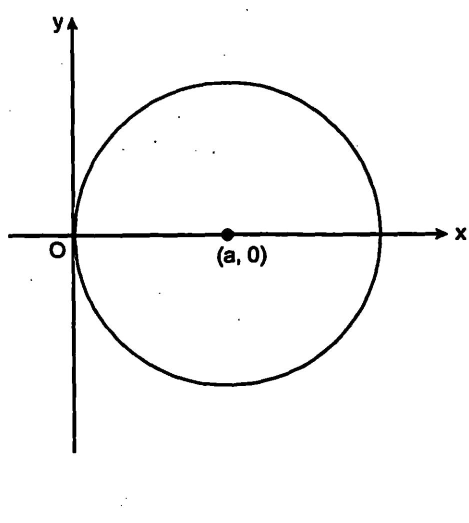
या $$x^2 + y^2 - 2ax = 0 \qquad ...(i)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2a = 0$$

या $$x + y\frac{dy}{dx} - a = 0$$

$$\therefore \qquad a = x + y\frac{dy}{dx}$$



a का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$$x^2 + y^2 - 2x\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x^2 - 2xy\frac{dx}{dy} = 0$$

या
$$2xy\frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$$

$\Rightarrow$
$$2xy\,y' + x^2 = y^2.$$
उत्तर

प्रश्न 7. ऐसे परवलयों के कुल का अवकल समीकरण निर्मित कीजिए जिनका शीर्ष मूलबिन्दु पर है और जिनका अक्ष धनात्मक y-अक्ष की दिशा में है।

हल : y-अक्ष के अनुदिश तथा मूलबिन्दु (0, 0) वाले परवलय कुल का समीकरण,

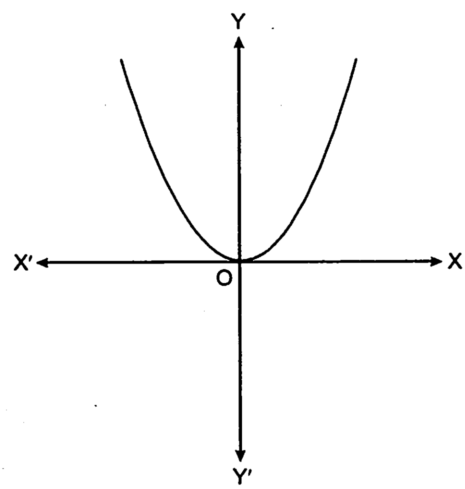
$$x^2 = 4ay \qquad ...(i)$$

यहाँ a एक स्वेच्छ अचर है

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2x = 4a\frac{dy}{dx}$$

$\therefore$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4a} = \frac{x}{2a} \qquad ...(ii)$$



समीकरण (i) और (ii) का गुणा करने पर

$$x^2\frac{dy}{dx} = 4ay \times \frac{x}{2a} = 2yx$$

या
$$x\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

या
$$xy' - 2y = 0$$

अतः यही अभीष्ट अवकल समीकरण है। उत्तर

प्रश्न 8. एसे दीर्घवृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी नाभियाँ y-अक्ष पर हैं तथा जिनका केन्द्र मूल बिन्दु है।

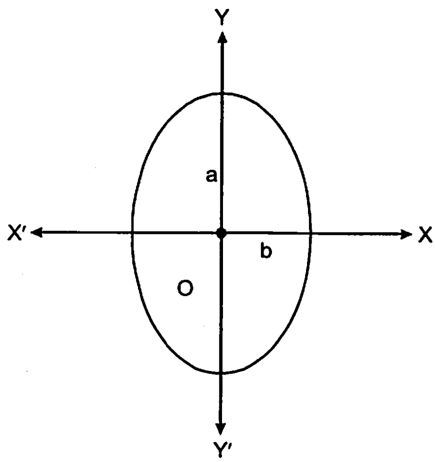
हल : दीर्घवृत्त कुल का समीकरण जिनका केन्द्र (0, 0) है जहाँ $(b > a)$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad ...(i)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{2x}{b^2}+\frac{2y}{a^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

या
$$\frac{x}{b^2}+\frac{yy'}{a^2} = 0 \qquad ...(ii)$$



चित्र

पुनः x के सापेक्ष अवकल करने पर

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}(y'^2+yy'') = 0$$

या
$$\frac{1}{b^2} = -\frac{y'^2+yy''}{a^2}$$

$\frac{1}{b^2}$ का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$-x\left(\frac{y'^2+yy''}{a^2}\right)+\frac{yy'}{a^2} = 0$$

या
$$-x(y'^2+yy'')+yy' = 0$$

या
$$-xy'^2-xy\,y''+yy' = 0$$

अतः अभीष्ट अवकल समीकरण

$$xy\,y''+x(y')^2-yy' = 0.$$

उत्तर

प्रश्न 9. ऐसे अतिपरवलयों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी नाभियाँ x-अक्ष पर हैं तथा जिनका केन्द्र मूलबिन्दु है।

हल : ऐसे अतिपरवलयों के कुल का समीकरण जिनकी नाभियाँ x-अक्ष पर हैं तथा केन्द्र मूलबिन्दु पर है,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ...(i)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0$$

या
$$\frac{x}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}=0 \quad ...(ii)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b}(y'^2+yy'')=0$$

या
$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}(y'^2+yy'')$$

$\frac{1}{a^2}$ का मान समीकरण (ii) में रखने पर,

$$\frac{x(y'^2+yy'')}{b^2}-\frac{yy'}{b^2}=0$$

या
$$x(y'^2+yy'')-yy'=0$$

या
$$xy'^2+xy\,y''-yy'=0$$

अतः अभीष्ट अवकल समीकरण

$$xy\,y''+x(y')^2-yy'=0.$$

उत्तर

प्रश्न 10. ऐसे वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनका केन्द्र y-अक्ष पर है और जिनकी त्रिज्या 3 इकाई है।

हल : वृत्तों के कुल का समीकरण

$$x^2+(y-b)^2=9 \quad ...(i)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2x+2(y-b)\,y'=0$$

या
$$x+(y-b)\,y'=0$$

या
$$y-b=-\frac{x}{y'}$$

$(y-b)$ का मान समीकरण (i) में रखने से,

$$x^2+\left(-\frac{x}{y'}\right)^2=9$$

या
$$x^2y'^2+x^2=9y'^2$$

या
$$(x^2-9)\,y'^2+x^2=0$$

अतः अभीष्ट अवकल समीकरण

$$(x^2-9)\,(y')^2+x^2=0.$$

उत्तर

प्रश्न 11. निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से किस समीकरण का व्यापक हल $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ है :

(A) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$

(C) $\frac{d^2y}{dx^2}+1=0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2}-1=0$

हल : दिया है :

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = C_1e^x - C_2e^{-x}$$

पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y$$

या $$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

अत: विकल्प (B) सही है। **उत्तर**

प्रश्न 12. निम्नलिखित समीकरणों में से किस समीकरण का एक विशिष्ट हल $y = x$ है ?

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = x$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + xy = x$

(C) $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = 0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + xy = 0$

हल : दिया है :

$$y = x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$y' = 1$$

x के सापेक्ष पुन: अवकलन करने पर,

$$y'' = 0$$

अब विकल्प C से,

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy &= 0 - x^2 + xy \\ &= -x^2 + x \times x \\ &= -x^2 + x^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

अत: विकल्प (C) सही है। **उत्तर**

प्रश्नावली 9·4

प्रश्न 1 से 10 तक के प्रश्नों में, प्रत्येक अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

प्रश्न 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

हल : दिया है, $$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

या $$dy = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int dy = \int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx$$

या $$y = \int \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \int \tan^2 \frac{x}{2}\,dx$$

$$= \int \left(\sec^2 \frac{x}{2} - 1\right) dx$$

$$= \int \sec^2 \frac{x}{2}\,dx - \int 1\,dx$$

$$= 2\tan \frac{x}{2} - x + C$$

अत: $$y = 2\tan \frac{x}{2} - x + C.$$ **उत्तर**

प्रश्न 2. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4-y^2}\ (-2 < y < 2).$

हल : दिया है, $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{4-y^2}$$

या $$\frac{1}{\sqrt{4-y^2}}\,dy = dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-y^2}}\,dy = \int dx$$

या $$\sin^{-1} \frac{y}{2} = x + C$$

या $$y = 2\sin(x + C)$$ **उत्तर**

प्रश्न 3. $\frac{dy}{dx} + y = 1 (y \neq 1).$

हल : दिया है, $$\frac{dy}{dx} + y = 1$$

या $$\frac{dy}{dx} = 1 - y$$

या $$\frac{1}{1-y}\, dy = dx$$

या $$\int \frac{1}{1-y} = \int dx$$

समाकलन करने पर

$$-\log(1-y) = x + \log C$$

या $$x = -\log(1-y) - \log C$$

या $$-x = \log C(1-y)$$

$\therefore$ $$C(1-y) = e^{-x}$$

$$1 - y = \frac{1}{C} e^{-x}$$

$$y = 1 - \frac{1}{C} e^{-x}$$

यहाँ $-\dfrac{1}{C} = A$ रखने पर,

$$y = 1 + Ae^{-x}.$$ उत्तर

प्रश्न 4. $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$.

हल : दिया है,

$$\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$$

$\tan x \tan y$ का भाग देने पर

$$\frac{\sec^2 x}{\tan x}\, dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y}\, dy = 0$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\log|\tan x| + \log|\tan y| = \log C$$

या $$\log|\tan x \tan y| = \log C$$

या $$\tan x \tan y = C.$$ उत्तर

प्रश्न 5. $(e^x + e^{-x})\, dy - (e^x - e^{-x})\, dx = 0$.

हल : दिया है,

$$(e^x + e^{-x})\, dy - (e^x - e^{-x})\, dx = 0$$

या $$(e^x + e^{-x})\, dy = (e^x - e^{-x})\, dx$$

$\therefore$ $$dy = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$$

या $$\int dy = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$$

$$y = \log(e^x + e^{-x}) + C.$$ उत्तर

प्रश्न 6. $\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)(1 + y^2)$.

हल : दिया है,
$$\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)(1 + y^2)$$

$\therefore$
$$\frac{1}{1+y^2}\, dy = (1 + x^2)\, dx$$

या
$$\int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \int (1+x^2)\, dx$$

$$\tan^{-1} y = \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C.$$
उत्तर

प्रश्न 7. $y \log y\, dx - x\, dy = 0$.

हल : दिया है :
$$y \log y\, dx - x\, dy = 0$$

या
$$x\, dy = y \log y\, dx$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{1}{y \log y} dy = 0$$

या
$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{1}{y \log y} dy = 0$$

$\because$ $\log y = t$ रखने पर,

$\therefore$
$$\frac{1}{y}\, dy = dt$$

$\therefore$
$$\log x - \int \frac{1}{t}\, dt = 0$$

या
$$\log |t| = \log x + \log C$$

या
$$\log |\log y| = \log Cx$$

या
$$\log y = Cx \quad \text{या} \quad y = e^{Cx}.$$
उत्तर

प्रश्न 8. $x^5 \frac{dy}{dx} = -y^5$.

हल : दिया है,
$$x^5 \frac{dy}{dx} = -y^5$$

या
$$x^5\, dy = -y^5\, dx$$

$$\frac{1}{y^5}\, dy = -\frac{1}{x^5}\, dx$$

$\therefore$
$$\int \frac{1}{y^5}\, dy = -\int \frac{1}{x^5}\, dx$$

या $$\frac{y^{-5+1}}{-5+1} = -\frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C$$

$$-\frac{1}{4y^4} = \frac{1}{4x^4} + C'$$

या $$\frac{1}{y^4} + \frac{1}{x^4} = -4C'$$

$\therefore$ $$\frac{1}{y^4} + \frac{1}{x^4} = C$$

यहाँ $-4C' = C$

अत: $x^{-4} + y^{-4} = C.$ **उत्तर**

प्रश्न 9. $\frac{dy}{dx} = \sin^{-1} x.$

हल : दिया है, $$\frac{dy}{dx} = \sin^{-1} x$$

या $$dy = \sin^{-1} x\, dx$$

या $$\int dy = \int \sin^{-1} x dx + C$$

या $$y = \int (\sin^{-1} x).1\, dx + C$$

$\sin^{-1} x$ को पहला फलन मानकर खण्डश: समाकलन करने पर

$$y = (\sin^{-1} x)x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x\, dx$$

या $$y = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

अब $1 - x^2 = t$ रखने पर

$$-2x\, dx = dt$$

$\therefore$ $$y = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$$

$$= x \sin^{-1} x + \sqrt{t} + C$$

$$y = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$ **उत्तर**

प्रश्न 10. $e^x \tan y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0.$

हल : दिया है,

$$e^x \tan y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0$$

या $$e^x \tan y\, dx = -(1 - e^x) \sec^2 y\, dy$$

या $$\frac{e^x}{1-e^x}\,dx = -\frac{\sec^2 y}{\tan y}\,dy$$

या $$\frac{e^x}{1-e^x}\,dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y}\,dy = 0$$

या $$\int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx + \int \frac{\sec^2 y}{\tan y}\,dy = 0$$

मान लीजिए $$I_1 + I_2 = 0 \qquad \text{...(i)}$$

$\therefore$ $$I_1 = \int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx$$

$\because$ $e^x = t$ रखने पर,

$\therefore$ $e^x\,dx = dt$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dt}{1-t} \\ &= -\log(1-t) \\ &= -\log(1-e^x) \end{aligned}$$

तथा $$I_2 = \int \frac{\sec^2 y}{\tan y}\,dy$$

$\because$ $\tan y = z$ रखने पर

$\therefore$ $\sec^2 y\,dy = dz$

$$I_2 = \int \frac{dz}{z} = \log z = \log \tan y$$

I_1 तथा I_2 के मान समीकरण (i) में रखने पर

$$-\log(1-e^x) + \log \tan y = \log C$$

$\therefore$ $$\begin{aligned} \log \tan y &= \log(1-e^x) + \log C \\ &= \log C(1-e^x) \end{aligned}$$

$\therefore$ $$\tan y = C(1-e^x).$$ **उत्तर**

प्रश्न 11 से 14 तक के प्रश्नों में प्रत्येक अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करने तथा विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए :

प्रश्न 11. $(x^3 + x^2 + x + 1)\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + x;\ y = 1$ **यदि** $x = 0$.

हल : दिया है :

$$(x^3 + x^2 + x + 1)\frac{dy}{dx} = 2x^2 + x$$

या $$dy = \frac{2x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1}\,dx$$

या $$\int dy = \int \frac{2x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1}\,dx$$

अब
$$\frac{2x^2+x}{x^3+x^2+x+1} = \frac{2x^2+x}{(x+1)(x^2+1)}$$
$$= \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$
$$2x^2+x = A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)$$
$$= A(x^2+1)+B(x^2+x)+C(x+1)$$

यहाँ $x = -1$ रखने पर,
$$2-1 = A(1+1)$$

या
$$2A = 1 \text{ या } A = \frac{1}{2}$$

x^2 के गुणांकों की तुलना करने पर
$$2 = A+B$$

$\therefore$
$$B = 2-A = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

तथा x के गुणांकों की तुलना करने पर
$$1 = B+C$$

$\therefore$
$$C = 1-B = 1-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

अतः
$$\frac{2x^2+x}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{2(x+1)}+\frac{\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}$$
$$= \frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{3x-1}{x^2+1}\right)$$

अर्थात
$$y = \int\frac{2x^2+x}{x^3+x^2+x+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{3x-1}{x^2+1}\,dx+C'$$
$$= \frac{1}{2}\log(x+1)+\frac{3}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+C'$$

$\therefore$
$$y = \frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{3}{4}\log|x^2+1|-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C'$$

$x = 0, y = 1$ रखने से
$$I = \frac{1}{2}\log 1+\frac{3}{4}\log(0+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}0+C'$$
$$1 = 0+0+0+C'$$

$\therefore$
$C' = 1$ अभीष्ट हल है।

$$y = \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{3}{4}\log|x^2+1| - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + 1$$

$$= \frac{1}{4}\{2\log|x+1| + 3\log|x^2+1|\} - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + 1$$

$$= \frac{1}{4}\log\{(x+1)^2 + \log(x^2+1)^3\} - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + 1$$

$$y = \frac{1}{4}\log[(x+1)^2(x^2+1)^3] - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + 1.$$ **उत्तर**

प्रश्न 12. $x(x^2-1)\dfrac{dy}{dx} = 1;\ y = 0$ **यदि** $x = 2.$

हल : दिया है,

$$x(x^2-1)\frac{dy}{dx} = 1$$

या $$dy = \frac{1}{x(x^2-1)}dx$$

$$\int dy = \int \frac{1}{x(x^2-1)}dx$$

या $$y = \int \frac{1}{x(x^2-1)}dx$$

यहाँ $$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$\therefore$ $$1 = A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$x = 0$ रखने पर,

$$1 = A(-1) \quad \text{या} \quad A = -1$$

$x = 1$ रखने पर,

$$1 = B \times 1 \times 2 \quad \text{या} \quad 2B = 1 \qquad \text{या} \quad B = \frac{1}{2}$$

$x = -1$ रखने पर,

$$1 = C(-1)(-1-1) \quad \text{या} \quad 2C = 1 \quad \text{या} \quad C = \frac{1}{2}$$

$$y = \int \frac{1}{x(x^2-1)}dx$$

$$= -\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx$$

या $$y = -\log|x| + \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x+1| + C'$$

दिया है : $x = 2, y = 0$ लेने पर,

$$0 = -\log 2 + \frac{1}{2}\log 1 + \frac{1}{2}\log 3 + C'$$

$$0 = -\log 2 + \frac{1}{2}\log 3 + C'$$

$$C' = \log 2 - \log\sqrt{3} = \log\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ $$y = \frac{1}{2}[\log|x-1| + \log|x+1| - 2\log|x|]\frac{2}{\sqrt{3}}$$

या $$= \frac{1}{2}\log\frac{x^2-1}{x^2} + \log\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{x^2-1}{x^2} - \frac{1}{2}\log\frac{3}{4}.$$ उत्तर

प्रश्न 13. $\cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = a$ **(a ∈ R); $y = 1$ यदि $x = 0$.**

हल : दिया है : $$\cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = a$$

या $$\frac{dy}{dx} = \cos^{-1} a$$

या $$dy = (\cos^{-1} a)\, dx$$

समाकलन करने पर,

$$\int dy = \cos^{-1} a \int dx + C$$

$\therefore$ $$y = x\cos^{-1} a + C$$

$x = 0, y = 2$ रखने पर,

$$2 = 0.\cos^{-1} a + C$$

या $$C = 2$$

अत: अभीष्ट हल है

$$y = x\cos^{-1} a + 2$$

या $$\cos\frac{y-2}{x} = a.$$ उत्तर

प्रश्न 14. $\frac{dy}{dx} = y\tan x$**; $y = 1$ यदि $x = 0$.**

हल : दिया है : $$\frac{dy}{dx} = y\tan x$$

या $$\frac{1}{y}\,dy = \tan x\,dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \tan x\,dx + C$$

$$\log y = -\log \cos x + C$$

$x = 0$ तथा $y = 1$ रखने पर

$$\log 1 = -\log \cos 0 + C \quad \text{या} \quad C = 0$$

अत: $$\log y = -\log \cos x = \log \sec x$$

या $y = \sec x$ अभीष्ट हल है। **उत्तर**

प्रश्न 15. बिन्दु (0, 0) से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण $y' = e^x \sin x$ है।

हल : दिया है, $$y' = e^x \sin x$$

या $$\frac{dy}{dx} = e^x \sin x$$

या $$dy = e^x \sin x\,dx$$

$\therefore$ $$\int dy = \int e^x \sin x\,dx + C$$

या $$y = \int e^x \sin x\,dx + C \qquad \text{...(i)}$$

मान लीजिए $$I = \int e^x \sin x\,dx$$

खण्डश: समाकलन करने पर,

$$I = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\,dx$$

$$= -e^x \cos + \int e^x (\cos x)\,dx$$

$\int e^x \cos x\,dx$ का खण्डश: समाकलन करने पर

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

$\therefore$ $$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

या $$I = \frac{1}{2} e^x(-\cos x + \sin x)$$

1 का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$y = \frac{1}{2} e^x(-\cos x + \sin x) + C$$

$x = 0,\ y = 0$ रखने पर

$$0 = -\frac{1}{2} \times 1 + C$$

या $$2C = 1 \quad \text{या} \quad C = \frac{1}{2}$$

अतः अभीष्ट हल है।

$$y = \frac{1}{2}e^x(-\cos x + \sin x) + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}$$

या $$2y - 1 = e^x(\sin x - \cos x).$$ उत्तर

प्रश्न 16. अवकल समीकरण $xy\frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$ के लिए बिन्दु $(1, -1)$ से गुजरने वाला वक्र ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $$xy\frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$$

$$\frac{y}{y+2}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)}{x}$$

या $$\frac{y}{y+2}dy = \frac{x+2}{x}dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int\frac{y}{y+2}dy = \int\frac{x+2}{x}dx + C$$

या $$\int\frac{y+2-2}{y+2}dy = \int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx + C$$

या $$\int\left(1-\frac{2}{y+2}\right)dy = \int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx + C$$

$\therefore$ $$y - 2\log(y+2) = x + 2\log x + C \qquad ...(i)$$

$x = 1, y = -1$ रखने पर

$$-1 - 2\log 1 = 1 + 2\log 1 + C$$

या $$C = -2$$

समीकरण (i) में C का मान रखने पर

$$y = 2\log(y+2) + x + 2\log x - 2$$

या $$y = x + 2\log x(y+2) - 2$$

या $$y - x + 2 = \log[x^2(y+2)^2].$$ उत्तर

प्रश्न 17. बिन्दु $(0, -2)$ से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता और उस बिन्दु के y निर्देशांक का गुणनफल उस बिन्दु के x निर्देशांक के बराबर है।

हल : हम जानते हैं कि

$$\text{वक्र के बिन्दु } (x, y) \text{ पर प्रवणता} = \frac{dy}{dx}$$

∴ दिया है : $$y\left(\frac{dy}{dx}\right) = x$$

या $$y\,dy = x\,dx$$

समाकलन करने पर

$$\int y\,dy = \int x\,dx + C$$

या $$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

या $$y^2 = x^2 + 2C \quad \text{...(i)}$$

अब दिया है : $x = 0, y = -2$ रखने पर

$$4 = 0 + 2C$$

या $$2C = 4$$

C का मान समीकरण (i) में रखने पर अवकल समीकरण का हल

$$y^2 = x^2 + 4$$

या $$y^2 - x^2 = 4.$$ उत्तर

प्रश्न 18. एक वक्र के किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, स्पर्श बिन्दु को, बिन्दु $(-4, -3)$ से मिलाने वाले रेखाखण्ड की प्रवणता की दुगुनी है। यदि यह वक्र बिन्दु $(-2, 1)$ से गुजरता हो तो इस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \dfrac{dy}{dx}$

बिन्दु (x, y) और $(-4, -3)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड की प्रवणता $= \dfrac{y+3}{x+4}$

दिया है : $$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+3}{x+4}\right)$$

∴ $$\frac{1}{y+3}dy = \frac{2}{x+4}dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{dy}{y+3} = \int \frac{2}{x+4}dx + C$$

∴ $$\log|y+3| = 2\log|x+4| + C \quad \text{...(i)}$$

अब $x = -2, y = 1$ रखने पर

$$\log 4 = 2\log 2 + C$$

$$\log 4 = \log 4 + C \quad \text{या} \quad C = 0$$

C का यह मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\log|y+3| = \log|x+4|^2$$

अतः अभीष्ट हल है

$$y + 3 = (x+4)^2.$$ उत्तर

प्रश्न 19. एक गोलाकार गुब्बारे का आयतन, जिसे हवा भर कर फुलाया जा रहा है, स्थिर गति से बदल रहा है। यदि आरम्भ में इस गुब्बारे की त्रिज्या 3 इकाई है और 3 सेकण्ड बाद 6 इकाई है तो t सेकण्ड बाद उस गुब्बारे की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना किसी समय t पर गुब्बारे की त्रिज्या r तथा आयतन V हो, तब

परन्तु $$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$\therefore$ $$\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = k \qquad \text{(अचर है)}$$

या $$\frac{4}{3}\pi.3r^2\frac{dr}{dt} = k$$

$$4\pi r^2\frac{dr}{dt} = k$$

या $$4\pi r^2\,dr = k.dt$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int 4\pi r^2\,dr = \int k.dt + C$$

या $$4\pi\frac{r^3}{3} = k.t + C \qquad ...(i)$$

जब ज्ञात है कि $t = 0, r = 3$ तो

$$\frac{4}{3}\pi.27 = k.0 + C$$

$\therefore$ $$C = 36\pi$$

C का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = kt + 36\pi \qquad ...(ii)$$

और जब ज्ञात है कि $t = 3, r = 6$

$\therefore$ $$\frac{4}{3}\pi \times 6^3 = k.3 + 36\pi$$

$$288\pi = 3k + 36\pi$$

या $$3k = (288 - 36)\pi = 252\pi$$

$\therefore$ $$k = \frac{252\pi}{3} = 84\pi$$

समीकरण (ii) में k का मान रखने पर

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 84\pi.t + 36\pi$$

या $$\pi r^3 = 63\pi.t + 27\pi$$

अभीष्ट समीकरण $$r^3 = 63t + 27$$

या $$r = (63t + 27)^{1/3}.$$ उत्तर

प्रश्न 20. किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि $r\%$ वार्षिक की दर से होती है। यदि 100 रुपये 10 वर्षों में दुगुने हो जाते हैं तो r का मान ज्ञात कीजिए। ($\log_e 2 = 0{\cdot}6931$)

हल : माना मूलधन P तथा ब्याज की दर $r\%$ हो, तब

$$\text{मूलधन में वृद्धि} = \frac{dP}{dt} = \frac{Pr}{100}$$

$\therefore$ $$\frac{dP}{dt} = \frac{Pr}{100}$$

या $$\frac{dP}{P} = \frac{rdt}{100}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{dP}{P} = \int \frac{r}{100} dt + \log C$$

या $$\log P = \frac{r}{100} t + \log C$$

$\therefore$ $$\log P - \log C = \frac{r}{100} t$$

या $$\log \frac{P}{C} = \frac{r}{100} t$$

या $$\frac{P}{C} = e^{\frac{r}{100}t}$$

$$P = Ce^{\frac{r}{100}t} \quad \text{...(i)}$$

जब $t = 0, P = 100$ तो समीकरण (i) से

$$100 = Ce^0 \quad \text{या} \quad C = 100$$

समीकरण (i) में C का मान रखने पर

$$P = 100e^{\frac{r}{100}t}$$

तथा जब ज्ञात हो कि $t = 10, P = 200$ तो समीकरण (i) से

$\therefore$ $$200 = 100e^{\frac{r}{100} \times 10}$$

$$2 = e^{\frac{r}{10}}$$

$\therefore$ $$\frac{r}{10} = \log 2 = 0{\cdot}6931 \text{ (दिया है)}$$

$\therefore$ $$r = 6{\cdot}931 = 6{\cdot}93\%.$$ **उत्तर**

प्रश्न 21. किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि 5% वार्षिक की दर से होती है। इस बैंक में ₹ 1000 जमा कराए जाते हैं। ज्ञात कीजिए कि 10 वर्ष बाद यह राशि कितनी हो जायेगी ? ($e^{0{\cdot}5} = 1{\cdot}648$)

हल : माना मूलधन ₹ P है तथा ब्याज की दर 5% वार्षिक हो, तब

$$\frac{dP}{dt} = \frac{5}{100} P$$

$\therefore \quad \frac{dP}{P} = 0{\cdot}05\ dt$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{dP}{P} = \int 0{\cdot}05\ dt + \log C$$

$$\log P = 0{\cdot}05t + \log C$$

या $\quad \log P - \log C = 0{\cdot}05t$

$\therefore \quad \log \frac{P}{C} = 0{\cdot}05t$

$\therefore \quad \frac{P}{C} = e^{0{\cdot}05\, t}$

$\Rightarrow \quad P = Ce^{0{\cdot}05\, t} \quad$ ...(i)

जब $t = 0$ तथा $P = 1000$ से समीक़रण (i) से

$\therefore \quad 1000 = Ce^0$ या $C = 1000$

$\therefore$ समीकरण (i) से $\quad P = 1000 \times e^{0{\cdot}05\, t}$

जब दिया है : $t = 10$ वर्ष, $\quad P = 1000 \times e^{0{\cdot}05 \times 10}$

$$= 1000 \times e^{0{\cdot}5}$$

$$= 1000 \times 1{\cdot}648 = 1648$$

अर्थात् 10 वर्षों में ₹ 1648 हो जायेंगे। **उत्तर**

प्रश्न 22. किसी जीवाणु समूह में जीवाणुओं की संख्या 1,00,000 है। 2 घण्टों में इनकी संख्या में 10% की वृद्धि होती है। कितने घण्टों में जीवाणुओं की संख्या 2,00,000 हो जायेगी, यदि जीवाणुओं के वृद्धि की दर उनके उपस्थित संख्या के समानुपाती है।

हल : माना किसी समय t पर जीवाणुओं की संख्या y हो, तब

$$\frac{dy}{dt} \propto y$$

या $\quad \frac{dy}{dx} = ky$

या $\quad \frac{dy}{y} = k.dt$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$\log y = kt + C \quad$ ...(i)

जब $t = 0,\ y = y_0$ तो समीकरण (i) से,

$$\log y_0 = 0 + C$$

या $\quad C = \log y_0$

C का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\log y = kt + \log y_0$$

या $\quad \log y - \log y_0 = kt$

या $\quad \log \frac{y}{y_0} = kt \quad$ ...(ii)

$\because$ 2 घण्टे में जीवाणुओं की संख्या में 10% की वृद्धि होती है। अर्थात् $t = 2$,

$$y = y_0 + \frac{10}{100}y_0 = \frac{110}{100}y_0$$

समीकरण (ii) में $t = 2$ तथा $y = \frac{11}{10}y_0$ रखने पर

$$\log \frac{\frac{11}{10}y_0}{y_0} = k.2$$

या $$\log \frac{11}{10} = 2k$$

$\therefore$ $$k = \frac{1}{2} \log \frac{11}{10}$$

k का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$\log \frac{y}{y_0} = \left(\frac{1}{2}\log\frac{11}{10}\right)t \qquad \text{...(iii)}$$

पुन: माना कि t समय में जीवाणु 1,00,000 से 2,00,000 हो जाते हैं।

अत: $$\frac{y}{y_0} = \frac{200000}{100000} = 2$$

समीकरण (iii) में $\frac{y}{y_0}$ का मान रखने पर

$$\log 2 = \left(\frac{1}{2}\log\frac{11}{10}\right)t$$

या $$t = \frac{2\log 2}{\log\frac{11}{10}}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 23. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ का व्यापक हल है :

(A) $e^x + e^{-y} = c$ (B) $e^x + e^x = c$

(C) $e^{-x} + e^y = c$ (D) $e^{-x} + e^{-y} = c$

हल : दिया है :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y} = e^x.e^y$$

या $$\frac{dy}{e^y} = e^x\,dx$$

या $$e^{-y}\,dy = e^x\,dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int e^{-y}\,dy = \int e^x\,dx$$

या $$-e^{-y} + c = e^x$$

या $$e^x + e^{-y} = c.$$

अत: विकल्प (A) सही है। **उत्तर**

प्रश्नावली 9·5

प्रश्न 1 से 10 तक के प्रत्येक प्रश्न में दर्शाइए कि दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय है और इनमें से प्रत्येक को हल कीजिए—

प्रश्न 1. $(x^2 + xy)\, dy = (x^2 + y^2)\, dx$.

हल : $$(x^2 + xy)\, dy = (x^2 + y^2)\, dx.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy}$$

चूँकि अंश तथा हर दोनों की घात समान हैं। अत: दिया गया अवकल समीकरण समघाती है।

मान लीजिए $$y = v.x$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

या $$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + v^2x^2}{x^2 + x.vx} = \frac{x^2(1+v^2)}{x^2(1+v)} = \frac{1+v^2}{1+v}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1+v} - v$$

$$= \frac{1+v^2-v-v^2}{1+v} = \frac{1-v}{1+v}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v}$$

या $$\frac{1+v}{1-v}\, dv = \frac{dx}{x}$$

समाकलन करने पर,

$$\int \frac{1+v}{1-v}\, dv = \int \frac{dx}{x} + C'$$

या $$-\int \frac{1-v-2}{1-v}\, dv = \log(x) + C'$$

$$-\int \left(1 - \frac{2}{1-v}\right) dv = \log|x| + C'$$

$$\Rightarrow \quad -[v + 2\log|1-v|] = \log|x| + C'$$

$C' = -\log C$ रखने पर,

$$= \log|x| - \log C$$

या $$v + 2\log|1-v| + \log|x| - \log C = 0$$

या $$\frac{y}{x}+2\log\left|1-\frac{y}{x}\right|+\log|x|-\log C=0 \qquad \left[\because v=\frac{y}{x} \text{ रखने पर}\right]$$

या $$\frac{y}{x}+2\log\left|\frac{x-y}{x}\right|+\log|x|-\log C=0$$

अतः अभीष्ट हल

$$\frac{y}{x}+2\log\left|\frac{x-y}{x}\right|+\log|x|-\log C=0$$

या $$\frac{y}{x}+\log\left(\frac{(x-y)^2}{x^2}\times x\times\frac{1}{C}\right)=0$$

या $$\frac{y}{x}+\log\frac{(x-y)^2}{Cx}=0$$

या $$\log\frac{(x-y)^2}{Cx}=-\frac{y}{x}$$

$\therefore$ $$\frac{(x-y)^2}{Cx}=e^{-\frac{y}{x}}$$

$\Rightarrow$ $$(x-y)^2=Cxe^{-\frac{y}{x}}.$$ उत्तर

प्रश्न 2. $y'=\dfrac{x+y}{x}$.

हल : दिया है : $$y'=\frac{x+y}{x}$$

चूँकि अंश तथा हर दोनों की घात समान हैं। अतः दिया गया अवकल समीकरण समघाती है।

या $$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$$

मान लीजिए, $$y=v.x$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$\therefore$ $$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{x+vx}{x}=\frac{x(1+v)}{x}=1+v$$

या $$x\frac{dv}{dx}=1+v-v=1$$

या $$dv=\frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int dv=\int\frac{dx}{x}+C$$

या $$v = \log|x| + C$$

या $$\frac{y}{x} = \log|x| + C$$

अतः अभीष्ट हल

$$y = x\log|x| + C.x.$$ उत्तर

प्रश्न 3. $(x-y)\,dy - (x+y)\,dx = 0.$

हल : प्रश्नानुसार,

$$(x-y)\,dy - (x+y)\,dx = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

चूँकि अंश तथा हर दोनों की घात समान हैं। अतः दिया गया अवकल समीकरण समघाती है।

मान लीजिए $$y = v.x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x+vx}{x-vx} = \frac{x(1+v)}{x(1-v)} = \frac{1+v}{1-v}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v} - v = \frac{1+v-v+v^2}{1-v} = \frac{1+v^2}{1-v}$$

$$\therefore \quad \frac{1-v}{1+v^2}\,dv = \frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int\frac{1-v}{1+v^2}\,dv = \int\frac{dx}{x} + C$$

अतः $$-\frac{1}{2}\int\frac{2v}{v^2+1}\,dv + \int\frac{dv}{1+v^2} = \log|x| + C$$

या $$-\frac{1}{2}\log(v^2+1) + \tan^{-1}v = \log|x| + C$$

या $$-\frac{1}{2}\log\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) + \tan^{-1}\frac{y}{x} = \log|x| + C$$

या $$\tan^{-1}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\log\frac{x^2+y^2}{x^2} - \log|x| = C$$

अतः अभीष्ट हल

$$\tan^{-1}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\log\frac{x^2+y^2}{x^2} - \log|x| = C$$

$$\tan^{-1}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\log\frac{x^2+y^2}{x^2} - \frac{1}{2}\log|x|^2 = C$$

या $$\tan^{-1}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)=C$$

या $$\tan^{-1}\frac{y}{2}=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+C.$$ **उत्तर**

प्रश्न 4. $(x^2-y^2)\,dx+2xy\,dy=0.$

हल : दिया है :

$$(x^2-y^2)\,dx+2xy\,dy=0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x^2-y^2}{2xy}$$

चूँकि अंश तथा हर दोनों की घात समान हैं। अतः दिया गया अवकल समीकरण समघाती है।

मान लीजिए $$y=vx$$

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad v+x\frac{dv}{dx}=-\frac{(x^2-v^2x^2)}{2x(vx)}$$

$$=-\frac{x^2(1-v^2)}{2x^2v}=-\frac{1-v^2}{2v}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx}=-\frac{1-v^2}{2v}-v$$

$$=\frac{-1+v^2-2v^2}{2v}=\frac{-1-v^2}{2v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2v}{v^2+1}\,dv=-\frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int\frac{2v}{v^2+1}\,dv=-\int\frac{dx}{x}+\log C$$

या $$\log(v^2+1)=-\log|x|+\log C$$

$$\log\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)=-\log|x|+\log C \qquad \left(\because v=\frac{y}{x} \text{ रखने पर}\right)$$

या $$\log\frac{x^2+y^2}{x^2}+\log x=\log C$$

$$\therefore \quad \log\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\times x\right)=\log C$$

या $$\frac{x^2+y^2}{x}=C$$

अतः अभीष्ट हल $$x^2+y^2=Cx.$$ **उत्तर**

प्रश्न 5. $x^2 \dfrac{dy}{dx} = x^2 - 2y^2 + xy.$

हल : दिया है :

$$x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 - 2y^2 + xy$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2y^2 + xy}{x^2}$$

चूँकि अंश तथा हर दोनों की घात समान हैं। अत: दिया गया अवकल समीकरण समघाती है।

मान लीजिए $\quad y = v.x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 - 2v^2x^2 + x.vx}{x^2}$$

$$= \frac{x^2(1 - 2v^2 + v)}{x^2}$$

$$= 1 - 2v^2 + v$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = 1 - 2v^2$$

या $\quad \dfrac{dv}{1-2v^2} = \dfrac{dx}{x}$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{dv}{1-2v^2} = \int \frac{dx}{x} + C$$

या $\quad \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{dv}{\frac{1}{2} - v^2} = \log|x| + C$

या $\quad \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1 \times \sqrt{2}}{2} \log\left|\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}} + v}{\frac{1}{\sqrt{2}} - v}\right| = \log|x| + C$

या $\quad \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \log\left|\dfrac{1 + \sqrt{2}v}{1 - \sqrt{2}v}\right| = \log|x| + C$

या $\quad \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \log\left|\dfrac{1 + \sqrt{2}\,\frac{y}{x}}{1 - \sqrt{2}\,\frac{y}{x}}\right| = \log|x| + C, \qquad \left(\because v = \dfrac{y}{x} \text{ रखने पर}\right)$

या $\quad \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \log\left|\dfrac{x + \sqrt{2}y}{x - \sqrt{2}y}\right| = \log|x| + C.$ **उत्तर**

प्रश्न 6. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,, dx.$

हल : दिया है :

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$$

$\therefore$
$$x.dy = (y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx$$

या
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

चूँकि अंश तथा हर दोनों की घात समान हैं। अत: दिया गया अवकल समीकरण समघाती है।

मान लीजिए
$$y = v.x$$

$\therefore$
$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$\therefore$
$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx + \sqrt{x^2 + v^2x^2}}{x}$$

$$= \frac{x(v + \sqrt{1 + v^2})}{x}$$

$$= v + \sqrt{1 + v^2}$$

$\therefore$
$$x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}$$

या
$$\frac{1}{1 + v^2}\,dv = \frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \int \frac{dx}{x} + \log C$$

या
$$\log|v + \sqrt{1 + v^2}\,| = \log|\,x\,| + \log C$$

$v = \dfrac{y}{x}$ रखने पर

$$\log\left\{\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right\} = \log|\,x\,| + \log C$$

या
$$\log\left\{\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}\right\} - \log|\,x\,| = \log C$$

या
$$\log\left\{\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2}\right\} = \log C$$

या $$\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2} = C$$

या $$y+\sqrt{x^2+y^2} = Cx^2.$$ उत्तर

प्रश्न 7.

$$\left\{x \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\} y\, dx = \left\{y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\} x\, dy.$$

हल : दिया है :

$$\left\{x \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\} y\, dx = \left\{y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\} x\, dy$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y\left[x \cos\frac{y}{x} + y \sin\frac{y}{x}\right]}{x\left[y \sin\frac{y}{x} - x \cos\frac{y}{x}\right]}$$

चूँकि अंश तथा हर दोनों की घात समान हैं। अतः दिया गया अवकल समीकरण समघाती है।

मान लीजिए $$y = v.x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx\left[x \cos\frac{vx}{x} + vx \sin\frac{vx}{x}\right]}{x\left[vx \sin\frac{vx}{x} - x \cos\frac{vx}{x}\right]}$$

$$= \frac{x^2 v[\cos v + v \sin v]}{x^2[v \sin v - \cos v]}$$

$$= \frac{v(\cos v + v \sin v)}{v \sin v - \cos v}$$

$$\therefore \quad x\frac{dy}{dx} = \frac{v(\cos v + v \sin v)}{v \sin v - \cos v} - v$$

$$= \frac{v \cos v + v^2 \sin v - v^2 \sin v + v \cos v}{v \sin v - \cos v}$$

$$= \frac{2v \cos v}{v \sin v - \cos v}$$

$$\therefore \quad \frac{v \sin v - \cos v}{v \cos v} dv = \frac{2dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{v \sin v - \cos v}{v \cos v} dv = 2\int \frac{dx}{x} + \log C'$$

या $$\int\left(\tan v-\frac{1}{v}\right)dv = 2\int\frac{dx}{x}+\log C'$$

या $$-\log|\cos x|-\log|v| = 2\log|x|+\log C'$$

या $$\log(\sec v)-\log|v| = \log|x^2|+\log C'$$

या $$\log\left|\frac{\sec v}{v}\right| = \log|x^2|+\log C'$$

या $$\log\left|\frac{\sec v}{v}\right|-\log|x^2| = \log C'$$

या $$\log\left|\frac{\sec v}{vx^2}\right| = \log C'$$

या $$\frac{\sec v}{vx^2} = C'$$

अब $v=\frac{y}{x}$ रखने पर,

$$\frac{\sec\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}.x^2} = C'$$

या $$xy\cos\left|\frac{y}{x}\right| = C' = C$$

$\Rightarrow$ $$xy\cos\left(\frac{y}{x}\right) = C.$$ उत्तर

प्रश्न 8. $x\frac{dy}{dx}-y+x\sin\frac{y}{x}=0.$

हल : दिया है :

$$x\frac{dy}{dx}-y+x\sin\frac{y}{x} = 0$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x\sin\frac{y}{x}}{x}$$

चूँकि अंश तथा हर दोनों की घात समान हैं। अतः दिया गया अवकल समीकरण समघाती है।

मान लीजिए $$y = v.x$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = v+x\frac{dv}{dx}$$

या $$v+x\frac{dv}{dx} = \frac{vx-x\sin\frac{vx}{x}}{x} = v-\sin v$$

या $$x\frac{dv}{dx} = -\sin v$$

या $$\frac{1}{\sin v}\, dv = -\frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int\frac{dv}{\sin v} = -\log|x| + \log C$$

या $$\log(\text{cosec } v - \cot v) = -\log|x| + \log C$$

या $$\log(\text{cosec } v - \cot v) + \log|x| = \log C$$

या $$\log|x(\text{cosec } v - \cot v)| = \log C$$

$\Rightarrow$ $$x(\text{cosec } v - \cot v) = C$$

$v = \frac{y}{x}$ रखने पर

$$x\left[\text{cosec}\frac{y}{x} - \cot\frac{y}{x}\right] = C$$

या $$x\left(\frac{1-\cos\frac{y}{x}}{\sin\frac{y}{x}}\right) = C$$

अत: अभीष्ट हल

$$x\left(1-\cos\frac{y}{x}\right) = C\sin\frac{y}{x}.$$ उत्तर

प्रश्न 9. $\boldsymbol{y\,dx + x\log\left(\frac{y}{x}\right)dy - 2x\,dy = 0.}$

हल : दिया है :

$$y\,dx + x\log\left(\frac{y}{x}\right)dy - 2x\,dy = 0$$

या $$y\,dx + \left(x\log\frac{y}{x} - 2x\right)dy = 0$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x\log\frac{y}{x} - 2x} = \frac{y}{2x - x\log\frac{y}{x}}$$

चूँकि अंश तथा हर दोनों की घात समान हैं। अत: दिया गया अवकल समीकरण समघाती है।
मान लीजिए $$y = vx$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx}{2x - x\log\frac{vx}{x}}$$

$$= \frac{vx}{x(2-\log v)} = \frac{v}{2-\log v}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{2-\log v} - v = \frac{v - 2v + v\log v}{2-\log v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v + v\log v}{2-\log v}$$

या $$\frac{2-\log v}{-v+v\log v}\,dv = \frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

या $$\int\frac{2-\log v}{-v+v\log v}\,dv = \int\frac{dx}{x} + \log C$$

या $$\int\frac{1-\log v+1}{v(-1+\log v)}\,dv = \log|x| + \log C$$

या $$\int -\frac{1}{v}\,dv + \int\frac{1}{v(-1+\log v)}\,dv = \log|x| + \log C$$

या $$-\log|v| + \log|\log v - 1| = \log|x| + \log C$$

या $$\log|\log v - 1| = \log v + \log x + \log C$$
$$= \log|C.vx|$$

या $$\log v - 1 = C.vx$$

या $$\log v = 1 + C.vx$$

$v = \frac{y}{x}$ रखने पर $$\log\frac{y}{x} = 1 + C.\frac{y}{x}.x$$

अत: अभीष्ट हल $$\log\frac{y}{x} = 1 + C.y$$

या $$C.y = \log\frac{y}{x} - 1.$$ उत्तर

प्रश्न 10. $\mathbf{(1+e^{x/y})\,dx + e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0.}$

हल : दिया है :

$$(1+e^{x/y})\,dx + e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0$$

$\therefore \qquad \dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)}{1+e^{x/y}}$

चूँकि अंश तथा हर दोनों की घात समान हैं। अत: दिया गया अवकल समीकरण समघाती है।

मान लीजिए $\qquad x = vy$

$\therefore \qquad \dfrac{dx}{dy} = v + y\dfrac{dv}{dy}$

$\therefore \qquad v + y\dfrac{dv}{dy} = \dfrac{\left(\dfrac{vy}{y}-1\right).e^{vy/y}}{1+e^{vy/y}} = \dfrac{(v-1)\,e^{v}}{1+e^{v}}$

या $\qquad y\dfrac{dv}{dy} = \dfrac{(v-1)\,e^{v}}{1+e^{v}} - v$

$$= \frac{ve^{v} - e^{v} - v - ve^{v}}{1+e^{v}}$$

$$= \frac{-e^{v} - v}{1+e^{v}}$$

$$= -\frac{v+e^{v}}{1+e^{v}}$$

या $\qquad \dfrac{1+e^{v}}{v+e^{v}}\,dv = -\dfrac{dy}{y}$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{1+e^{v}}{v+e^{v}}\,dv = -\int \frac{dy}{y} + \log C$$

$v + e^{v} = t$ रखने पर

$\therefore \qquad (1 + e^{v})\,dv = dt$

$$\int \frac{dt}{t} = -\log|y| + \log C$$

या $\qquad \log|t| = \log(v + e^{v})$

$$= -\log|y| + \log C$$

या $\qquad \log(v + e^{v}) + \log|y| = \log C$

$\therefore \qquad \log|y\,(v + e^{v})| = \log C$

या $\qquad y\,(v + e^{v}) = C$

$v = \dfrac{x}{y}$ रखने पर

$\therefore$ अभीष्ट हल $\qquad y\left(\dfrac{x}{y} + e^{x/y}\right) = C$

या $$x + ye^{x/y} = C$$

अत: $$ye^{x/y} + x = C.$$ उत्तर

प्रश्न 11 से 15 तक के प्रश्नों में प्रत्येक अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करने वाला विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए :

प्रश्न 11. $(x + y)\, dy + (x - y)\, dx = 0;\ y = 1$ यदि $x = 1$.

हल : दिया है :

$$(x + y)\, dy + (x - y)\, dx = 0$$

या $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-y}{x+y}$$

मान लीजिए $$y = vx$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

या $$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{x - vx}{x + vx} = -\frac{x(1-v)}{x(1+v)} = -\frac{1-v}{1+v}$$

$\therefore$ $$x\frac{dv}{dx} = -\frac{1-v}{1+v} - v$$

$$= \frac{-1 + v - v - v^2}{1+v} = \frac{-1 - v^2}{1+v}$$

या $$\frac{1+v}{1+v^2}\, dv = -\frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{1+v}{1+v^2}\, dv = -\int \frac{dx}{x} + C$$

या $$\int \frac{1}{1+v^2}\, dv + \frac{1}{2}\int \frac{2v}{1+v^2}\, dv = -\log|x| + C$$

या $$\tan^{-1} v + \frac{1}{2}\log|1 + v^2| = -\log|x| + C$$

यहाँ $v = \dfrac{y}{x}$ रखने पर

$$\tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\log\left|1 + \frac{y^2}{x^2}\right| + \log|x| = C$$

या $$\tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right| + \frac{1}{2}\log|x|^2 = C$$

या $$\tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2 + y^2}{x^2} \times x^2\right| = C$$

या $$\tan^{-1}\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) = C$$

दिया है : $x = 1, y = 1$ रखने पर

$$\tan^{-1}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\log|1+1| = C$$

या $$C = \tan^{-1}1+\frac{1}{2}\log 2 = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$$

अत: अभीष्ट हल

$$\frac{1}{2}\log|x^2+y^2|+\tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$$

या $$\log(x^2+y^2)+2\tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}+\log 2.$$ उत्तर

प्रश्न 12. $x^2\,dy+(xy+y^2)\,dx = 0;\ y = 1$ यदि $x = 1$.

हल : दिया है :

$$x^2\,dy+(xy+y^2)\,dx = 0$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy+y^2}{x^2}$$

मान लीजिए $$y = vx$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = v+x\frac{dv}{dx}$$

$\therefore$ $$v+x\frac{dv}{dx} = -\frac{x.vx+v^2x^2}{x^2}$$

$$= -\frac{x^2(v+v^2)}{x^2} = -(v+v^2)$$

$\therefore$ $$x\frac{dv}{dx} = -(v+v^2)-v = -(2v+v^2)$$

$\therefore$ $$\frac{1}{2v+v^2}\,dv = -\frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int\frac{1}{2v+v^2}\,dv = -\int\frac{dx}{x}+\log C$$

या $$\int\frac{1}{v^2+2v+1-1}\,dv = \int\frac{1}{(v+1)^2-1}$$

$$= -\int\frac{dx}{x}+\log C$$

या $$\frac{1}{2}\log\left|\frac{v+1-1}{v+1+1}\right| = -\log|x| + \log C$$

या $$\frac{1}{2}\log\left|\frac{v}{v+2}\right| = -\log|x| + \log C$$

या $$\frac{1}{2}\log\frac{v}{v+2} + \frac{1}{2}\log|x|^2 = \log C$$

या $$\frac{1}{2}\log\left|\frac{v}{v+2}\times x^2\right| = \log C$$

या अब $v = \frac{y}{x}$ रखने पर

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+2}\times x^2\right| = \log C$$

या $$\frac{1}{2}\log\left|\frac{yx^2}{y+2x}\right| = \log C$$

या $$\log\sqrt{\frac{yx^2}{y+2x}} = \log C$$

$\Rightarrow$ $$\frac{\sqrt{y}x}{\sqrt{y+2x}} = C$$

या $$x^2y = C^2(y+2x)$$

दिया है : $x = 1, y = 1$ रखने पर,

$$1 = C^2(1+2)$$

या $$3C^2 = 1 \quad \text{या} \quad C^2 = \frac{1}{3}$$

अत: अभीष्ट हल

$$x^2y = \frac{1}{3}(y+2x)$$

या $$y + 2x = 3x^2y.$$ **उत्तर**

प्रश्न 13. $\left[x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right]dx + x\,dy = 0$; $y = \frac{\pi}{4}$ **यदि** $x = 1$.

हल : दिया है :

$$\left[x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right]dx + x\,dy = 0$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x\sin^2\frac{y}{x} - y}{x}$$

मान लीजिए $y = vx$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

या $$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{x\sin^2\frac{vx}{x} - vx}{x}$$

$$= -\frac{x(\sin^2 v - v)}{x}$$

$$= -\sin^2 v + v$$

या $$x\frac{dv}{dx} = -\sin^2 v$$

या $$\text{cosec}^2 v\, dv = -\frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \text{cosec}^2 v\, dv = -\int\frac{dx}{x} + C$$

$$-\cot v = -\log x + C$$

अब $v = \frac{y}{x}$ रखने पर

$\therefore$ $$\log x - \cot\frac{y}{x} = C$$

अब $x = 1$ तथा $y = \frac{\pi}{4}$ रखने पर

$$\log 1 - \cot\frac{\pi}{4} = C$$

$\therefore$ $$C = -1$$

अतः अभीष्ट हल

$\therefore$ $$\log x - \cot\frac{y}{x} = -1$$

या $$\cot\frac{y}{x} - \log x = 1 = \log e$$

या $$\cot\frac{y}{x} = \log|e| + \log|x| = \log|ex|$$

या $$\cot\frac{y}{x} = \log|ex|.$$ उत्तर

प्रश्न 14. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \text{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) = 0; y = 0$ **यदि** $x = 1$.

हल : दिया है :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \text{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

या
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \text{cosec}\,\frac{y}{x}$$

मान लीजिए
$$y = vx$$

$\therefore$
$$\frac{dy}{dx} = v + x\,\frac{dv}{dx}$$

अत:
$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx}{x} - \text{cosec}\,\frac{vx}{x} = v - \text{cosec}\,v$$

या
$$x\frac{dv}{dx} = -\,\text{cosec}\,v$$

$\therefore$
$$\sin v\,dv = -\,\frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \sin v\,dv = -\int \frac{dx}{x} + C$$

या
$$-\cos v = -\log|x| + C$$

या
$$\cos v = \log|x| - C$$

या
$$\cos\frac{y}{x} = \log|x| - C$$

दिया है : $x = 1, y = 0$ रखने पर

$$1 = 0 - C$$
$$C = -1$$

अत: अभीष्ट हल

$$\cos\frac{y}{x} = \log|x| + 1$$

$\therefore$
$$\cos\frac{y}{x} = \log|x| + \log|e| = \log|ex|$$

या
$$\cos\frac{y}{x} = \log|ex|.$$
उत्तर

प्रश्न 15. $2xy + y^2 - 2x^2\,\frac{dy}{dx} = 0; y = 2$ **यदि** $x = 1$.

हल : दिया है :

$$2xy + y^2 - 2x^2\,\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy+y^2}{2x^2}$$

मान लीजिए $y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

या
$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2x.vx + v^2x^2}{2x^2}$$

$$= \frac{x^2(2v+v^2)}{2x^2}$$

$$= \frac{2v+v^2}{2}$$

$$= v + \frac{v^2}{2}$$

$\therefore$
$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{2}$$

या
$$v^{-2}\,dv = \frac{1}{2}\frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int v^{-2}\,dv = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} + C$$

या
$$\frac{v^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{2}\log|x| + C$$

या
$$-\frac{1}{v} = \frac{1}{2}\log|x| + C$$

अब $v = \dfrac{y}{x}$ रखने पर,

$$-\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\log|x| + C$$

दिया है : $x = 1, y = 2$ रखने पर

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log 1 + C$$

$\therefore$
$$C = -\frac{1}{2}$$

अतः अभीष्ट हल $$-\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\log|x| - \frac{1}{2}$$

या $$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}[1 - \log|x|]$$

या $$y = \frac{2x}{1-\log|x|}.$$ उत्तर

प्रश्न 16. $\frac{dx}{dy} = h\left(\frac{x}{y}\right)$ के रूप वाले समघातीय अवकल समीकरण को हल करने के लिए निम्नलिखित में से कौन-सा प्रतिस्थापन किया जाता है :

(A) $y = vx$ (B) $v = yx$

(C) $x = vy$ (D) $x = v$

उत्तर—(C) $x = vy$.

प्रश्न 17. निम्नलिखित में से कौन-सा समघातीय अवकल समीकरण है ?

(A) $(4x + 6y + 5)\,dy - (3y + 2x + 4)\,dx = 0$

(B) $(xy)\,dx - (x^3 + y^3)\,dy = 0$

(C) $(x^3 + 2y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

(D) $y^2\,dx + (x^2 - xy - y^2)\,dy = 0$

उत्तर—(D) $y^2\,dx + (x^2 - xy - y^2)\,dy = 0$.

प्रश्नावली 9·6

प्रश्न 1 से 12 तक के प्रश्नों में, प्रत्येक अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए—

प्रश्न 1. $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$.

हल : दिया है :

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$$

इसकी तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$P = 2$ तथा $Q = \sin x$

$$\therefore \quad \text{I.F.} = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

अवकल समीकरण का हल है

$$y\,e^{2x} = \int \sin x . e^{2x}\,dx + C \quad \text{...(i)}$$

माना $$I = \int e^{2x} \sin x\,dx$$

e^{2x} को पहला फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$I = e^{2x}(-\cos x) - \int 2e^{2x}(-\cos x)\,dx$$

$$= -e^{2x}\cos x + 2\int 2e^{2x}\cos x\,dx$$

पुन: e^{2x} को पहला फलन मानकर खण्डश: समाकलन करने पर

$$I = -e^{2x}\cos x + 2\left[e^{2x}\sin x - \int 2e^{2x}\sin x\,dx\right]$$

$$= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4I$$

$\therefore$ $$5I = e^{2x}(2\sin x - \cos x)$$

$$I = \frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x)$$

I का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$$ye^{2x} = \frac{e^{2x}}{5}[2\sin x - \cos x] + C$$

या $$y = \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x) + Ce^{-2x}.$$ उत्तर

प्रश्न 2. $\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$.

हल : दिया है :

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$$

इसकी तुलना $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$P = 3$ तथा $Q = e^{-2x}$

$\therefore$ $$\text{I.F.} = e^{\int 3dx} = e^{3x}$$

अत: रैखिक अवकल समीकरण का हल

$$y \times \text{I.F.} = \int \text{Q} \times \text{I.F.}\,dx + C$$

$$ye^{3x} = \int e^{-2x}e^{3x}\,dx + C$$

$$= \int e^{x}.\,dx + C$$

$$= e^{x} + C$$

या $$y = e^{-2x} + Ce^{-3x}.$$ उत्तर

प्रश्न 3. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^2$.

हल : दिया है :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}.y = x^2$$

इसकी तुलना $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$P = \dfrac{1}{x}$ तथा $Q = x^2$

$\therefore$ $$\text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\log x} = x$$

अतः रैखिक अवकल समीकरण का हल

$$y \times \text{I.F.} = \int Q \times \text{I.F.}\, dx + C$$

या
$$yx = \int x^2 . x\, dx + C$$

या
$$xy = \frac{x^4}{4} + C.$$
उत्तर

प्रश्न 4. $\frac{dy}{dx} + (\sec x)\, y = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right).$

हल : दिया है :

$$\frac{dy}{dx} + \sec x \,.\, y = \tan x$$

इसकी तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$P = \sec x$ तथा $Q = \tan x$

$\therefore$
$$\begin{aligned} \text{I.F.} &= e^{\int \sec dx} \\ &= e^{\log(\sec x + \tan x)} \\ &= \sec x + \tan x \end{aligned}$$

अतः रैखिक अवकल समीकरण का हल

$$\begin{aligned} y \times \text{I.F.} &= \int Q \times \text{I.F.}\, dx + C \\ y \times (\sec x + \tan x) &= \int \tan x (\sec x + \tan x)\, dx + C \\ &= \int \sec x \tan x\, dx + \int \tan^2 x\, dx + C \\ &= \sec x + \int (\sec^2 x - 1)\, dx + C \\ &= \sec x + \tan x - x + C \end{aligned}$$

अतः अभीष्ट हल

$$y(\sec x + \tan x) = (\sec x + \tan x) - x + C.$$
उत्तर

प्रश्न 5. $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right).$

हल : दिया है :

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} + \sec^2 xy = \tan x . \sec^2 x$$

इसकी तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$P = \sec^2 x \text{ तथा } Q = \tan x \sec x$$

$\therefore$
$$\int P\, dx = \int \sec^2 x\, dx = \tan x$$

$\therefore$
$$\text{I.F.} = e^{\int P\, dx} = e^{\tan x}$$

अतः अवकल समीकरण का हल

$$y \times \text{I.F.} = \int Q \times \text{I.F.}\, dx + C$$

$$y\, e^{\tan x} = \int \tan x \sec^2 x \times e^{\tan x}\, dx + C$$

$\because$ $\tan x = t$ रखने पर,

$\therefore$ $\sec^2 x\, dx = dt$

अतः अवकल समीकरण का हल

$$y\, e^{\tan x} = \int t.e^t\, dt + C$$

या $$y\, e^{\tan x} = t.e^t - \int 1.e^t\, dt + C$$

$$= t.e^t - e^t + C$$

या $$y\, e^{\tan x} = \tan x.e^{\tan x} - e^{\tan x} + C$$

या $$y = (\tan x - 1) + C.e^{-\tan x}.$$ उत्तर

प्रश्न 6. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x.$

हल : दिया है :

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

या $$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x \log x$$

$\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ से इसकी तुलना करने पर

$P = \dfrac{2}{x}$ तथा $Q = x \log x$

$\therefore$ $$\int P dx = \int \frac{2}{x}\, dx = [2 \log x] = \log x^2$$

$\therefore$ $$\text{I.F.} = e^{\int P\, dx} = e^{\log x^2} = x^2$$

अतः अवकल समीकरण का हल

$$y \times \text{I.F.} = \int Q \times \text{I.F.}\, dx + C$$

या $$x^2 y = \int x \log x.x^2\, dx + C$$

$$= \int (\log x) x^3\, dx + C$$

$\log x$ का पहला फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$x^2 y = (\log |x|).\frac{x^4}{4} - \int \frac{1}{x}.\frac{x^4}{4}\, dx + C$$

$$= \frac{x^4}{4} \log |x| - \frac{1}{4}\int x^3\, dx + C$$

$$= \frac{x^4}{4} \log |x| - \frac{1}{4}.\frac{x^4}{4} + C$$

$$= \frac{x^4}{4}\log|x| - \frac{x^4}{16} + C$$

या $$y = \frac{x^2}{4}\log x - \frac{x^2}{16} + C$$

या $$y = \frac{x^2}{16}(4\log x - 1) + C.x^{-2}.$$ उत्तर

प्रश्न 7. $x \log x \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \log x.$

हल : दिया है :

$$x\log x\frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x}\log x$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x\log x}.y = \frac{2}{x}\log x \times \frac{1}{x\log x} = \frac{2}{x^2}$$

इसकी तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर

$Q = \frac{2}{x^2}$ तथा $P = \frac{1}{x\log x}$

$\therefore$ $$\int P\,dx = \int \frac{1}{x\log x}dx$$

मान लीजिए $$\log x = t$$

$$\frac{1}{x}dx = dt$$

$\therefore$ $$\int P\,dx = \int \frac{1}{t}dt = \log t = \log\log x$$

$\therefore$ $$\text{I.F.} = e^{\int P\,dx} = e^{\log\log x} = \log x$$

अत: अवकल समीकरण का हल

$$y \times \text{I.F.} = \int Q \times \text{I.F.}\,dx + C$$

$$y\log x = \int \frac{2}{x^2}\log x\,dx + C$$

$$y\log x = 2\int(\log x).\frac{1}{x^2}dx + C$$

$\log x$ को पहला फलन मानकर समाकलन करने पर

$$= 2\left[\log x\left(\frac{-1}{x}\right) - \int\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}\right)dx\right] + C$$

$$= -\frac{2}{x}\log|x| + 2\left(-\frac{1}{x}\right) + C$$

अत: अभीष्ट हल

$$y \log x = -\frac{2}{x}\log|x| - \frac{2}{x} + C$$

$$= -\frac{2}{x}(\log|x| + 1) + C$$

या $$y \log x = -\frac{2}{x}(1 + \log|x|) + C.$$ उत्तर

प्रश्न 8. $(1 + x^2)\, dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx\ (x \neq 0)$.

हल : दिया है :

$$(1 + x^2)\, dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}.y = \frac{\cot x}{1+x^2}$$

इसकी तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर

$$P = \frac{2x}{1+x^2} \text{ तथा } Q = \frac{\cot x}{1+x^2}$$

$\therefore$ $$\int P\, dx = \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

अब $1 + x^2 = t$ रखने पर

$\therefore$ $$2x\, dx = dt$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t = \log(1 + x^2)$$

$\therefore$ $$\text{I.F.} = e^{\int P\, dx} = e^{\log(1 + x^2)} = 1 + x^2$$

अत: अवकल समीकरण का हल

$$y \times \text{I.F.} = \int \text{Q} \times \text{I.F.}\, dx + C$$

$$y(1 + x^2) = \int \frac{\cot x}{1+x^2} \times (1 + x^2) + C$$

$$= \int \cot x\, dx + C$$

$$= \log|\sin x| + C$$

अत: अभीष्ट हल

$$(1 + x^2)\, y = \log|\sin x| + C$$

या $$y = (1 + x^2)^{-1} \log|\sin x| + C(1 + x^2)^{-1}.$$ उत्तर

प्रश्न 9. $x\frac{dy}{dx} + y - x + xy \cot x = 0\ (x \neq 0)$.

हल : दिया है :

$$x\frac{dy}{dx} + y - x + xy \cot x = 0$$

या $$x\frac{dy}{dx} + (1 + x \cot x)\, y = x$$

या $$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1+x\cot x}{x}\right)y = 1$$

इसकी तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर

$$P = \frac{1+x\cot x}{x} \text{ तथा } Q = 1$$

$\therefore$ $$\int P\,dx = \int\frac{1+x\cot x}{x}dx$$
$$= \int\left(\frac{1}{x}+\cot x\right)dx$$
$$= \int\frac{1}{x}dx+\int\cot x\,dx$$
$$= \log x + \log|\sin x|$$
$$= \log|x\sin x|$$

अत: $$\text{I.F.} = e^{\int P\,dx} = e^{\log|x\sin x|} = x\sin x$$

$\therefore$ अवकल समीकरण का हल

$$y\times\text{I.F.} = \int Q\times\text{I.F.}\,dx + C$$
$$y\times|x\sin x| = \int 1.x\sin x\,dx + C$$

खण्डश: समाकलन करने पर

$$x.y\sin x = x(-\cos x) - \int 1.(-\cos x)\,dx + C$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

अत: अभीष्ट हल

$$x.y\sin x = -x\cos x + \sin x + C$$

या $$y = \frac{1}{x} - \cot x + \frac{C}{x\sin x}.$$ उत्तर

प्रश्न 10. $(x+y)\frac{dy}{dx} = 1.$

हल : दिया है :

$$(x+y)\frac{dy}{dx} = 1$$

$\therefore$ $$\frac{dx}{dy} = x+y$$

या $$\frac{dx}{dy} - x = y$$

इसकी तुलना $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ से तुलना करने पर

यहाँ $$P = -1,\ Q = y$$
$$\text{I.F.} = e^{\int P\,dx} = e^{\int(-1)\,dy} = e^{-y}$$

$\therefore$ अवकल समीकरण का हल

$$x \times \text{I.F.} = \int Q \times \text{I.F.}\, dy + C$$

$$x \times e^{-y} = \int y\, e^{-y}\, dy + C$$

खण्डशः समाकलन करने पर

$$x\, e^{-y} = y\left(\frac{e^{-y}}{-1}\right) - \int 1.\left(\frac{e^{-y}}{-1}\right) dy + C$$

$$= -y\, e^{-y} + \frac{e^{-y}}{-1} + C$$

$$= -y\, e^{-y} - e^{-y} + C$$

या $\qquad x = -y - 1 + C.e^{y}$

अतः अभीष्ट हल है

$$x + y + 1 = C.e^{y}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 11. $y\, dx + (x - y^2)\, dy = 0$.

हल : दिया है :

$$y\, dx + (x - y^2)\, dy = 0$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x - y = 0$$

या $$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}.x = y$$

$\dfrac{dx}{dy} + Px = Q$ से तुलना करने पर,

$P = \dfrac{1}{y}$ तथा $Q = y$.

$\therefore$ $$\int P\, dy = \int \frac{1}{y}\, dy = \log y$$

$\therefore$ $$\text{I.F.} = e^{\int P\, dy} = e^{\log y} = y$$

अतः अवकल समीकरण का हल

$$x \times \text{I.F.} = \int Q \times \text{I.F.}\, dy + C$$

$$x \times y = \int y.y\, dy + C$$

$$= \int y^2\, dy + C = \frac{y^3}{3} + C$$

अतः अभीष्ट हल $\qquad xy = \dfrac{y^3}{3} + C$

या $\qquad x = \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{C}{y}$. **उत्तर**

प्रश्न 12. $(x+3y^2)\dfrac{dy}{dx} = y(y>0)$.

हल : दिया है :

$$(x+3y^2)\frac{dy}{dx} = y$$

$\therefore$
$$y\frac{dx}{dy} = x+3y^2$$

या
$$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x = 3y$$

इसकी तुलना $\dfrac{dx}{dy}+Px = Q$ से करने पर,

$$P = -\frac{1}{y} \text{ तथा } Q = 3y$$

$\therefore$
$$\int P\,dy = \int -\frac{1}{y}\,dy = -\log y = \log\frac{1}{y}$$

अत:
$$\text{I.F.} = e^{\int P\,dy} = e^{\log\frac{1}{y}} = \frac{1}{y}$$

अत: अवकल समीकरण का हल

$$x\times\text{I.F.} = \int Q\times\text{I.F.}\,dx + C$$
$$x\times\frac{1}{y} = \int 3y\times\frac{1}{y}dy + C$$
$$= 3\int 1\cdot dy + C = 3y + C$$

अत: अभीष्ट हल $\quad x = 3y^2 + Cy.$ उत्तर

प्रश्न 13 से 15 तक के प्रश्नों में प्रत्येक अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करने वाला विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए—

प्रश्न 13. $\dfrac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x;\ y = 0$ **यदि** $x = \dfrac{\pi}{3}$.

हल : दिया है :

$$\frac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$$

इसकी तुलना $\dfrac{dy}{dx}+Py = Q$ से करने पर

$$P = 2\tan x \text{ तथा } Q = \sin x$$

$\therefore$
$$\int P\,dx = 2\int \tan x\,dx$$
$$= -2\log\cos x$$
$$= \log(\cos x)^{-2}$$
$$= \log\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= \log\sec^2 x$$

$$\text{I.F.} = e^{\int P\,dx} = e^{\log \sec^2 x} = \sec^2 x$$

अत: अवकल समीकरण का हल

$$y \times \text{I.F.} = \int Q \times \text{I.F.}\,dy + C$$

$$y \times \sec^2 x = \int \sin x \sec^2 x\,dx + C$$

$$= \int \sec x \tan x + C = \sec x + C$$

अब दिए गए मान $x = \frac{\pi}{3}$ तथा $y = 0$ रखने पर

$$0 = 2 + C \quad \text{या} \quad C = -2$$

अत: अभीष्ट हल $\quad y \sec^2 x = \sec x - 2$

या $\quad y = \cos x - 2\cos^2 x.$ उत्तर

प्रश्न 14. $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = \dfrac{1}{1+x^2}$; $y = 0$ **यदि** $x = 1$.

हल : दिया है :

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}.y = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

इसकी तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$P = \frac{2x}{1+x^2} \text{ तथा } Q = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$\therefore$
$$\int P\,dx = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$1 + x^2 = t$ रखने पर

$$2x\,dx = dt$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t = \log(1+x^2)$$

$\therefore$
$$\text{I.F.} = e^{\int P\,dx} = e^{\log(1+x^2)} = 1 + x^2$$

अत: समीकरण का हल

$$y \times \text{I.F.} = \int Q \times \text{I.F.}\,dy + C$$

$$y(1+x^2) = \int \frac{1}{(1+x^2)^2} \times (1+x^2)\,dx + C$$

$$y(1+x^2) = \int \frac{dx}{1+x^2} + C = \tan^{-1} x + C$$

अब दिए गए मान $x = 1$ तथा $y = 0$ रखने पर

$$0 = \tan^{-1} 1 + C$$

$$= \frac{\pi}{4} + C$$

$$\therefore \qquad C = -\frac{\pi}{4}$$

अतः अभीष्ट हल

$$y(1+x^2) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}.$$ उत्तर

प्रश्न 15. $\dfrac{dy}{dx} - 3y \cot x = \sin 2x;\ y = 2$ **यदि** $x = \dfrac{\pi}{2}$.

हल : दिया है :

$$\frac{dy}{dx} - 3y \cot x = \sin 2x$$

इसकी तुलना $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर

$$P = -3 \cot x \text{ तथा } Q = \sin 2x$$

$$\therefore \qquad \int P\,dx = -3\int \cot x\,dx$$
$$= -3 \log \sin x$$
$$= \log \operatorname{cosec}^3 x$$

अतः
$$\text{I.F.} = e^{\int P\,dx} = e^{\log(\operatorname{cosec}^3 x)} = \operatorname{cosec}^3 x$$

$\therefore$ अवकल समीकरण का हल

$$y \times \text{I.F.} = \int Q \times \text{I.F.}\,dx + C$$

अर्थात्
$$y \operatorname{cosec}^3 x = \int \sin 2x \operatorname{cosec}^3 x\,dx + C$$
$$= \int 2 \sin x \cos x \operatorname{cosec}^3 x\,dx + C$$
$$= 2\int \cot x \operatorname{cosec} x\,dx + C$$
$$= -2 \operatorname{cosec} x + C$$

या
$$y = -2 \sin^2 x + C \sin^3 x$$

अब दिए गए मान $x = \dfrac{\pi}{2}$ तथा $y = 2$ रखने पर,

$$2 = -2 + C \quad \text{या} \quad C = 4$$

अतः अभीष्ट हल
$$y = -2 \sin^2 x + 4 \sin^3 x$$

या
$$y = 4 \sin^3 x - 2 \sin^2 x.$$ उत्तर

प्रश्न 16. मूलबिन्दु से गुजरने वाले एक वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इस वक्र के किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिन्दु के निर्देशांकों के योग के बराबर है।

हल : प्रश्नानुसार,

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

या
$$\frac{dy}{dx} - y = x$$

इसकी तुलना $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$P = -1$ तथा $Q = x$.

$\therefore \quad \int P\,dx = \int (-1)\,dx = -x$

अत: $\quad \text{I.F.} = e^{-x}$

$\therefore$ अवकल समीकरण का हल

$$y \times \text{I.F.} = \int Q \times \text{I.F.}\,dx + C$$

या $\quad ye^{-x} = \int x\,e^{-x}\,dx + C$

खण्डश: समाकलन करने पर

$$ye^{-x} = x\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right) - \int 1.\frac{e^{-x}}{-1}\,dx + C$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x} + C$$

$$ye^{-x} = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

चूँकि वक्र मूलबिन्दु से गुजरता, अत: $x = 0, y = 0$ रखने पर

$$0 = 0 - 1 + C \quad \text{या} \quad C = 1$$

अत: अभीष्ट हल

$$ye^{-x} = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

या $\quad y = -x - 1 + e^{x}$

या $\quad y + x + 1 = e^{x}$. $\quad$ उत्तर

प्रश्न 17. बिन्दु (0, 2) से गुजरने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इस वक्र के किसी बिन्दु के निर्देशांकों का योग उस बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के परिणाम से 5 अधिक है।

हल : दिया है :

$$x + y = \frac{dy}{dx} + 5$$

या $\quad \frac{dy}{dx} - y = x - 5$

इसकी तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर

$$P = -1 \quad \text{तथा} \quad Q = x - 5$$

$\therefore \quad \int P\,dx = \int (-1)\,dx = -x$

$\therefore \quad \text{I.F.} = e^{\int P\,dx} = e^{-x}$

अत: अवकल समीकरण का हल

$$y \times \text{I.F.} = \int Q \times \text{I.F.}\,dx + C$$

या $\quad ye^{-x} = \int (x - 5)\,e^{-x}\,dx + C$

खण्डश: समाकलन करने पर

$$ye^{-x} = (x-5)\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right) - \int 1.\frac{e^{-x}}{-1}\,dx + C$$

$$= -(x-5)\,e^{-x} + \frac{e^{-x}}{-1} + C$$

$$= -(x-5)\,e^{-x} - e^{-x} + C$$

या $$y = -(x-5) - 1 + Ce^{x}$$

अब यह दिया है कि वक्र (0, 2) से गुजरता है। अत: $x = 0, y = 2$ रखने पर,

$$2 = 5 - 1 + C = 4 + C$$

या $$C = -2$$

$$y = -x + 5 - 1 - 2e^{x}$$

या $$y = 4 - x - 2e^{x}.$$ उत्तर

प्रश्न 18. अवकल समीकरण $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2$ का समाकलन गुणक है :

(A) e^{-x} (B) e^{-y}

(C) $\dfrac{1}{x}$ (D) x

हल : $$x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2$$

या $$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 2x$$

इसकी तुलना $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$P = -\frac{1}{x} \text{ तथा } Q = 2x$$

अब $$\text{समाकलन गुणक} = e^{-\int \frac{1}{x}dx}$$

$$= e^{-\log x} = e^{\log\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

अत: विकल्प (C) सही है। उत्तर

प्रश्न 19. अवकल समीकरण $(1-y^2)\dfrac{dx}{dy} + yx = ay\ (-1 < y < 1)$ का समाकलन गुणक है :

(A) $\dfrac{1}{y^2-1}$ (B) $\dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$

(C) $\dfrac{1}{1-y^2}$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

हल : दिया है :

$$(1-y^2)\frac{dx}{dy} + yx = ay$$

या $$\frac{dx}{dy}+\frac{y}{1-y^2}.x = \frac{ay}{1-y^2}$$

इसकी तुलना $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ से करने पर,

$$P = \frac{y}{1-y^2}$$

$\therefore$ $$\int P\,dy = \int\frac{y}{1-y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{2y}{1-y^2}\,dy$$

मान लीजिए $$1-y^2 = t$$
तब $$-2y\,dy = dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}$$

$$= -\frac{1}{2}\log t$$

$$= -\frac{1}{2}\log(1-y^2)$$

अब $$\text{समाकलन गुणक} = e^{\int P\,dy}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\log(1-y^2)}$$

$$= e^{\log\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

अत: विकल्प (D) सही है। उत्तर

अध्याय 9 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से प्रत्येक की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए—

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}+5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-6y=\log x.$

(ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+7y=\sin x.$

(iii) $\frac{d^4y}{dx^4}-\sin\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=0.$

हल : (i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6y = \log x$ की कोटि 2 है तथा घात 1 है। **उत्तर**

(ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 7y = \sin x$ की कोटि 1 तथा घात 3 है। **उत्तर**

(iii) $\frac{d^4y}{dx^4} - \sin\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$ की कोटि 4 परन्तु घात के लिए यह परिभाषित नहीं है। **उत्तर**

प्रश्न 2. निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक के लिए सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (अस्पष्ट अथवा स्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है :

(i) $\boldsymbol{y = ae^x + be^{-x} + x^2 : x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0.}$

हल : दिया है :

$$y = ae^x + be^{-x} + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = ae^x - be^{-x} + 2x$$

तथा

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ae^x + be^{-x} + 2$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2$$

$$= x(ae^x + be^{-x} + 2) + 2(ae^x - be^{-x} + 2x) - x(ae^x + be^{-x} + x^2) + x^2 - 2$$

$$= e^x(ax + 2a - ax) + e^{-x}(bx - 2b - bx) - x^3 + x^2 + 2x + 4x - 2$$

$$= 2ae^x - 2be^{-x} - x^3 + x^2 + 6x - 2 \neq 0$$

अत: $y = ae^x - be^{-x} + x^2$ अवकल समीकरण

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0$ का हल नहीं है। **उत्तर**

(ii) $\boldsymbol{y = e^x(a\cos x + b\sin x) : \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0.}$

हल : दिया है :

$$y = e^x(a\cos x + b\sin x)$$

$\therefore$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(a\cos x + b\sin x) + e^x(-a\sin x + b\cos x)$$

$$= e^x[(a+b)\cos x + (b-a)\sin x]$$

तथा

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x[(a+b)\cos x + (b-a)\sin x] + e^x[-(a+b)\sin x + (b-a)\cos x]$$

$$= e^x[\{(b+a) + (b-a)\}\cos x + \{(b-a) - (b-a)\}\sin x]$$

$$= 2e^x[b\cos x - a\sin x]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y$$

$$= 2e^x(b\cos x - a\sin x] - 2e^x[(a+b)\cos x + (b-a)\sin x] + 2e^x[a\cos x + b\sin x]$$
$$= e^x[(2b-2a-2b+2a)\cos x + (-2a-2b+2a+2b)\sin x]$$
$$= 0$$

अत: $y = e^x(a\cos x + b\sin x)$ अवकल समीकरण

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ का हल है। **उत्तर**

(iii) $y = x\sin 3x : \frac{d^2y}{dx^2} + 9y - 6\cos 3x = 0.$

हल : दिया है :

$$y = x\sin 3x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \sin 3x + x(\cos 3x)\,3$$
$$= \sin 3x + 3x\cos 3x$$

तथा
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3\cos 3x + 3[\cos 3x - x\sin 3x.3]$$
$$= 6\cos 3x - 9x\sin 3x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6\cos 3x - 9y$$

अथवा
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y - 6\cos 3x = 0$$

अत: $y = x\sin 3x$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y - 6\cos 3x = 0$ का हल है। **उत्तर**

(iv) $x^2 = 2y^2\log y : (x^2+y^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$

हल : दिया है :
$$x^2 = 2y^2\log y$$
$$2x = 2\left[2y\log y + y^2\times\frac{1}{y}\right]\frac{dy}{dx}$$
$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y(1+2\log y)}$$

$$(x^2+y^2)\frac{dy}{dx} - xy$$
$$= \frac{x(x^2+y^2)}{y(1+2\log y)} - xy$$

$$= \frac{x^3 + xy^2 - xy^2 - 2xy^2 \log y}{y(1 + 2 \log y)}$$

$$= \frac{x(x^2 - 2y^2 \log y)}{y(1 + 2 \log y)} = 0 \qquad [\because x^2 = 2y^2 \log y]$$

अतः $x^2 = 2y^2 \log y$ अवकल समीकरण $(x^2 + y^2) \dfrac{dy}{dx} - xy = 0$ का हल है।

उत्तर

प्रश्न 3. $(x - a)^2 + 2y^2 = a^2$ द्वारा निरूपित वक्रों के कुल का अवकल समीकरण निर्मित कीजिए जहाँ a एक स्वेच्छ अचर है।

हल : दिया गया वक्र का समीकरण

$$(x - a)^2 + 2y^2 = a^2$$

या $$x^2 + 2y^2 - 2xa = 0 \qquad \text{...(i)}$$

अवकलन करने पर,

$$2x + 4y \frac{dy}{dx} - 2a = 0 \qquad \text{...(ii)}$$

या $$2x^2 + 4xy \frac{dy}{dx} - 2xa = 0 \qquad \text{...(iii)}$$

समीकरण (iii) में से समीकरण (i) को घटाने पर,

$$4xy \frac{dy}{dx} + x^2 - 2y^2 = 0$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - x^2}{4xy}$$

जो कि अभीष्ट अवकल समीकरण है।

उत्तर

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि $x^2 - y^2 = C(x^2 + y^2)$ जहाँ C एक प्राचल है, अवकल समीकरण $(x^3 - 3xy^2)\, dx = (y^3 - 3x^2y)\, dy$ का व्यापक हल है।

हल : दिया है :

$$(x^3 - 3xy^2)\, dx = (y^3 - 3x^2y)\, dy$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 3xy^2}{y^3 - 3x^2y}$$

यह समघातीय समीकरण है।

मान लीजिए $$y = vx$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x^3 - 3x.v^2x^2}{v^3x^3 - 3x^2.vx}$$

$$= \frac{x^3(1 - 3v^2)}{x^3(v^3 - 3v)}$$

$$= \frac{1 - 3v^2}{v^3 - 3v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-3v^2}{v^3-3v} - v$$

$$= \frac{1-3v^2-v^4+3v^2}{v^3-3v}$$

$$= \frac{1-v^4}{v^3-3v}$$

या $$\frac{v^3-3v}{1-v^4}\,dv = \frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int\frac{v^3-3v}{1-v^4}\,dv = \int\frac{dx}{x} + \log C'$$

$$\int\frac{v^3\,dv}{1-v^4} - 3\int\frac{v}{1-v^4}\,dv = \log x + \log C'' = \log C''x$$

मान लीजिए $$I_1 + I_2 = \log C''x \qquad \text{...(i)}$$

अब $$I_1 = \int\frac{v^3}{1-v^4}\,dv$$

$$= -\frac{1}{4}\int\frac{-4v^3}{1-v^4}\,dv$$

लीजिए $$1-v^4 = t$$

$\therefore$ $$-4v^3\,dv = dt$$

$$= -\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t}$$

$$= -\frac{1}{4}\log t$$

$$= -\frac{1}{4}\log(1-v^4)$$

तथा $$I_2 = -\frac{3}{2}\int\frac{2v}{1-v^4}\,dv$$

पुनः लीजिए $$v^2 = z$$

$\therefore$ $$2v\,dv = dz$$

$$= -\frac{3}{2}\int\frac{dz}{1-z^2}$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$= -\frac{3}{4}\log\frac{1+v^2}{1-v^2}$$

I_1 तथा I_2 के मान समीकरण (i) में रखने पर

$$-\frac{1}{4}\log(1-v^4)-\frac{3}{4}\log\frac{1+v^2}{1-v^2} = \log C'x$$

या $$-\frac{1}{4}\log\left[\frac{(1+v^2)^3}{(1-v^2)^3}\times(1-v^2)(1+v^2)\right] = \log C'x$$

या $$-\frac{1}{4}\log\frac{(1+v^2)^4}{(1-v^2)^2} = \log C'x$$

या $$\log\left[\frac{(1-v^2)^2}{(1+v^2)^4}\right]^{1/4} = \log C'x$$

या $$\log C'x = \log\left[\frac{(1-v^2)^{2\times\frac{1}{4}}}{(1+v^2)^{4\times\frac{1}{4}}}\right] = \log\frac{\sqrt{1-v^2}}{1+v^2}$$

अब $v = \dfrac{y}{x}$ रखने पर,

$$\log C'x = \log\left(\frac{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)$$

$$= \log\frac{(\sqrt{x^2-y^2})\times x}{x^2+y^2}$$

या $$C'x = \frac{x\sqrt{x^2-y^2}}{x^2+y^2}$$

या $$C'(x^2+y^2) = \sqrt{x^2-y^2}$$

वर्ग करने पर $C' = C$ रखने पर

$$C(x^2+y)^2 = x^2-y^2$$

$$x^2-y^2 = C(x^2+y^2)^2.$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 5. प्रथम चतुर्थांश में ऐसे वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक अक्षों को स्पर्श करते हैं।

हल : प्रथम चतुर्थांशों में वृत्तों के कुल का समीकरण जो निर्देशांक अक्षों का स्पर्श करता हो

$$(x-a)^2+(y-a)^2 = a^2 \qquad ...(i)$$

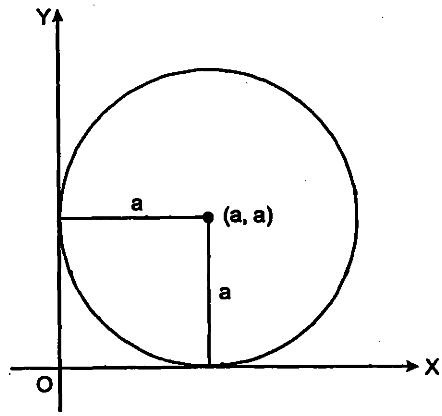
जहाँ a स्वेच्छ अचर है।

अब x के सापेक्ष समीकरण (i) का अवकलन करने पर

$$2(x-a)+2(y-a)\frac{dy}{dx} = 0$$

या $$x-a+(y-a)\frac{dy}{dx} = 0$$

या $$a\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = x+y\frac{dy}{dx}$$



या $$a = \frac{x+y\frac{dy}{dx}}{1+\frac{dy}{dx}} = \frac{x+Ay}{1+A} \qquad \left[\text{जहाँ } A=\frac{dy}{dx}\right]$$

a का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$$\left(x-\frac{x+Ay}{1+A}\right)^2+\left(y-\frac{x+Ay}{1+A}\right)^2 = \left(\frac{x+Ay}{1+A}\right)^2$$

या $$A^2(x-y)^2+(y-x)^2 = (x+Ay)^2$$

या $$(x-y)^2(A^2+1) = (x+Ay)^2$$

या $$(x-y)^2\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right] = \left(x+y\frac{dy}{dx}\right)^2$$ उत्तर

प्रश्न 6. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

या $$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\sin^{-1}y = -\sin^{-1}x+C$$

अत: अभीष्ट हल $$\sin^{-1}x = -\sin^{-1}y+C$$

या $$\sin^{-1}y+\sin^{-1}x = C.$$ उत्तर

प्रश्न 7. दर्शाइए कि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{y^2+y+1}{x^2+x+1} = 0$ का व्यापक हल

$$(x+y+1) = A(1-x-y-2xy)$$

है जिसमें A एक प्राचल है।

हल : दिया गया अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2+y+1}{x^2+x+1}$$

या
$$\frac{1}{y^2+y+1}dy = -\frac{dx}{x^2+x+1}$$

या
$$\frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dy = -\frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int\frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = -\int\frac{dx}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+C$$

या
$$\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C$$

या
$$\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2y+1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = C$$

या
$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{2y+1}{\sqrt{3}}+\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right] = C$$

या
$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\frac{2y+1}{\sqrt{3}}+\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}\right)\right] = C$$

या
$$\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}(2y+1+2x+1)}{3-(2y+1)(2x+1)}\right) = C$$

या
$$\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}\,(x+y+1)}{2(1-x-y-2xy)}\right) = C$$

$\therefore$
$$\frac{2\sqrt{3}\,(x+y+1)}{2(1-x-y-2xy)} = \tan\frac{\sqrt{3}}{2}\ C$$

या
$$\frac{x+y+1}{1-x-y-2xy} = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{\sqrt{3}}{2}\ C = A \quad \text{(मान लिया)}$$

अत: अभीष्ट हल

$$x+y+1 = A(1-x-y-2xy).$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 8. बिन्दु $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ के गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण $\sin x \cos y\, dx + \cos x \sin y\, dy = 0$ है।

हल : दिया है :

$$\sin x \cos y\, dx + \cos x \sin y\, dy = 0$$

या
$$\frac{\sin x}{\cos x} dx + \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0$$

समाकलन करने पर

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \log C$$

$$\int \tan x\, dx + \int \tan y\, dy = \log C$$

$$\log \sec x + \log \sec y = \log C$$

या
$$\log \sec x \sec y = \log C$$

या
$$\sec x \sec y = C$$

चूँकि बिन्दु $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ से गुजरता है, अत: $x = 0$ तथा $y = \frac{\pi}{4}$ रखने पर

$$1.\sec \frac{\pi}{4} = C$$

या
$$C = \sqrt{2}$$

$\therefore$ अभीष्ट वक्र का समीकरण

$$\sec x \sec y = \sqrt{2}$$

या
$$\cos y = \frac{\sec x}{\sqrt{2}}.$$
उत्तर

प्रश्न 9. अवकल समीकरण $(1 + e^{2x})\, dy + (1 + y^2)\, e^x\, dx = 0$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 1$ यदि $x = 0$.

हल : ज्ञात है :

$$(1 + e^{2x})\, dy + (1 + y^2)\, e^x\, dx = 0$$

या
$$\frac{1}{1+y^2} dy + \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = 0$$

समाकलन करने पर

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy + \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1} y + \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = 0$$

मान लीजिए
$$e^x = t$$
$$e^x\, dx = dt$$

$$\therefore \quad \tan^{-1} y + \int \frac{dt}{1+t^2} = C$$

या
$$\tan^{-1} y + \tan^{-1} t = C$$

या $$\tan^{-1} y + \tan^{-1} e^x = C$$

अब दिया हुआ है : $x = 0, y = 1$ रखने पर

$$\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 1 = C$$

या $$2 \tan^{-1} 1 = C$$

या $$2 \times \frac{\pi}{4} = C$$

या $$C = \frac{\pi}{2}$$

अत: अभीष्ट हल $$\tan^{-1} y + \tan^{-1} e^x = \frac{\pi}{2}.$$ उत्तर

प्रश्न 10. अवकल समीकरण $ye^{x/y}\, dx = (xe^{x/y} + y^2)\, dy, (y \neq 0)$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है :

$$ye^{x/y}\, dx = (xe^{x/y} + y^2)\, dy$$

$$ye^{x/y} \frac{dx}{dy} = xe^{x/y} + y^2$$

या $$\frac{ye^{x/y} \frac{dx}{dy} - xe^{x/y}}{y^2} = 1$$

या $$\frac{e^{x/y}\left(y\frac{dx}{dy} - x\right)}{y^2} = 1 \qquad \text{...(i)}$$

मान लीजिए $$e^{x/y} = z$$

$$e^{x/y} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{dz}{dy}$$

या $$e^{x/y}\left(\frac{\frac{dx}{dy}.y - x.1}{y^2}\right) = \frac{dz}{dy} \qquad \text{...(ii)}$$

समीकरण (i) व (ii) से, $$\frac{dz}{dy} = 1$$

$\therefore$ $$dz = dy$$

समाकलन करने पर

$$\int dz = \int dy + 0$$

या $$z = y + C$$

$\therefore$ अभीष्ट हल $$e^{x/y} = y + C.$$ उत्तर

प्रश्न 11. अवकल समीकरण $(x - y)(dx + dy) = dx - dy$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = -1$ यदि $x = 0$ (संकेत : $x - y = t$ रखें)।

हल : दिया है :

$$(x - y)(dx + dy) = dx - dy$$

या $$(x - y - 1)\, dx + (x - y + 1)\, dy = 0$$

$\therefore \qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x-y-1}{x-y+1}$

मान लीजिए $\qquad x - y = t$

$$1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

$\therefore \qquad \dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \qquad 1 - \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{t-1}{t+1}$

या $\qquad \dfrac{dt}{dx} = 1 + \dfrac{t-1}{t+1}$

या $\qquad \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{t+1+t-1}{t+1} = \dfrac{2t}{t+1}$

या $\qquad \dfrac{t+1}{t}\, dt = 2\, dx$

समाकलन करने पर

$$\int \frac{t+1}{t}\, dt = 2\int dx + C$$

या $\qquad \displaystyle\int \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = 2x + C$

या $\qquad \displaystyle\int 1\, dt + \int \frac{1}{t}\, dt = 2x + C$

या $\qquad t + \log|t| = 2x + C$

$\therefore$ $t = x - y$ रखने पर

$$x - y + \log|x-y| = 2x + C$$

या $\qquad \log|x-y| = x + y + C$

अब दिया है : $x = 0$ तथा $y = -1$ रखने पर

$$0 = 0 - 1 + C \quad \text{या} \quad C = 1$$

अतः अभीष्ट हल

$$\log|x-y| = x + y + 1.$$ उत्तर

प्रश्न 12. अवकल समीकरण $\left[\dfrac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \dfrac{y}{\sqrt{x}}\right]\dfrac{dx}{dy} = 1, (x \neq 0)$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है :

$$\left[\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right]\frac{dx}{dy} = 1$$

या $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \dfrac{y}{\sqrt{x}}$

या $\qquad \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}y = \dfrac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

इसकी तुलना $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ से करने पर

$$P=\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ तथा } Q=\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$\therefore$
$$\int P\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{x}$$

अतः
$$\text{I.F.}=e^{\int P\,dx}=e^{2\sqrt{x}}$$

अवकल समीकरण का हल

$$y\times \text{I.F.}=\int Q\times I.F.\,dx+C$$

या
$$y\times e^{2\sqrt{x}}=\int\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\times e^{2\sqrt{x}}\,dx+C$$
$$=\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx+C$$
$$=2\sqrt{x}+C$$

अतः अभीष्ट हल
$$ye^{2\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C.$$
उत्तर

प्रश्न 13. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\cot x=4x\operatorname{cosec} x,\ (x\neq 0)$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y=0$ यदि $x=\frac{\pi}{2}$.

हल : दिया है :

$$\frac{dy}{dx}+y\cot x=4x\operatorname{cosec} x$$

इसकी तुलना $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ से करने पर

$$P=\cot x \text{ तथा } Q=4x\operatorname{cosec} x$$

$\therefore$
$$\int P\,dx=\int\cot x\,dx=\log\sin x$$

अतः
$$\text{I.F.}=e^{\int P\,dx}=e^{\log\sin x}=\sin x$$

अतः दी गई अवकल समीकरण का हल

$$y\times \text{I.F.}=\int Q\times \text{I.F.}\,dx+C$$
$$y\times\sin x=\int 4x\operatorname{cosec} x\times\sin x\,dx+C$$
$$=\int 4x\,dx+C=2x^2+C$$

अब दिया हुआ है : $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$ तब

$$0=2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+C$$

या $$C = -\frac{\pi^2}{2}$$

अत: अभीष्ट हल

$$y \sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}. (\sin x \neq 0).$$ उत्तर

प्रश्न 14. अवकल समीकरण $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2e^{-y} - 1$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x = 0$.

हल : दिया है :

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = 2e^{-y} - 1$$

या $$\frac{1}{2e^{-y}-1}\, dy = \frac{dx}{x+1}$$

या $$\frac{e^y}{2-e^y}\, dy = \frac{dx}{x+1}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{e^y}{2-e^y}\, dy = \int \frac{dx}{x+1} + C$$

मान लीजिए $$2 - e^y = t$$

$\therefore$ $$-e^y\, dy = dt$$

$\therefore$ $$-\int \frac{dt}{t} = \log|x+1| + C$$

या $$-\log|t| = \log|x+1| + C$$

या $$-\log|2-e^y| = \log|x+1| + C$$

या $$\log|2-e^y| + \log|x+1| = -C$$

या $$\log|(2-e^x)(x+1)| = -C = \log A \text{ (मान लिया)}$$

$\therefore$ $$(2-e^y)(x+1) = A$$

दिया हुआ है : $x = 0, y = 0$ रखने पर

$$1 \times 1 = A \quad \text{या} \quad A = 1$$

$\therefore$ $$(2-e^y)(x+1) = 1$$

या $$2 - e^y = \frac{1}{x+1}$$

या $$e^y = 2 - \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$$

अत: अभीष्ट हल

$$y = \log\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|, \; x \neq -1.$$ उत्तर

प्रश्न 15. किसी गाँव की जनसंख्या की वृद्धि की दर किसी भी समय उस गाँव के निवासियों की संख्या के समानुपाती है। यदि सन् 1999 में गाँव की जनसंख्या 20,000 थी और सन् 2004 में 25,000 थी, तो ज्ञात कीजिए कि सन् 2009 में गाँव की जनसंख्या क्या होगी ?

हल : माना t समय में गाँव की जनसंख्या y होगी।

दिया है :

जनसंख्या में वृद्धि की दर $\propto$ निवासियों की संख्या

$$\frac{dy}{dt} \propto y$$

या $$\frac{dy}{dt} = ky$$

जहाँ k एक समानुपाती नियतांक है।

या $$\frac{dy}{y} = k\,dt$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dt + C$$

$\therefore$ $$\log y = kt + C \qquad \text{...(i)}$$

वर्ष 1999 में मान लिया $t = 0$ पर जनसंख्या = 20,000

$\therefore$ $$\log 20{,}000 = 0 + C$$

$\Rightarrow$ $$C = \log 20{,}000$$

C का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\log y = kt + \log 20{,}000$$

या $$\log y - \log 20{,}000 = kt$$

$\therefore$ $$\log \frac{y}{20000} = kt \qquad \text{...(ii)}$$

वर्ष 2004 में, $t = 5$ तथा $y = 25{,}000$

$\therefore$ $$\log \frac{25000}{20000} = k \times 5$$

या $$\log \frac{5}{4} = k \times 5$$

या $$k = \frac{1}{5} \log \frac{5}{4}$$

k का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$\log \frac{y}{20000} = \left(\frac{1}{5} \log \frac{5}{4}\right)t$$

वर्ष 2009 में, $t = 10$

$\therefore$ $$\log \frac{y}{20000} = \left(\frac{1}{5} \log \frac{5}{4}\right) \times 10$$

$$= 2 \log \frac{5}{4}$$

$$= \log \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \log \frac{25}{16}$$

या $$\frac{y}{20000} = \frac{25}{16}$$

$\therefore \qquad y = \frac{25}{16} \times 20000$

$= 25 \times 1250 = 31250.$ **उत्तर**

प्रश्न 16. अवकल समीकरण $\frac{y\,dx - x\,dy}{y} = 0$ का व्यापक हल है :

(A) $xy = C$ (B) $x = Cy^2$

(C) $y = Cx$ (D) $y = Cx^2$

हल : दिया है :

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y} = 0$$

या $$dx - \frac{x}{y}dy = 0$$

या $$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$$

अवकल करने पर

$$\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dy}{y} = C'$$

$$\log x - \log y = C'$$

$\Rightarrow$ $$\frac{x}{y} = C'$$

$C' = \frac{1}{C}$ रखने पर

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{C}, \quad y = Cx \text{ वांछित हल है।}$$

अत: विकल्प (C) सही है। **उत्तर**

प्रश्न 17. $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ के रूप वाले अवकल समीकरण का व्यापक हल है :

(A) $ye^{\int P_1\,dy} = \int (Q_1 e^{\int P_1\,dy})\,dy + C$ (B) $ye^{\int P_1\,dx} = \int (Q_1 e^{\int P_1\,dx})\,dx + C$

(C) $xe^{\int P_1\,dy} = \int (Q_1 e^{\int P_1\,dy})\,dy + C$ (D) $xe^{\int P_1\,dx} = \int (Q_1 e^{\int P_1\,dx})\,dx + C$

हल : अवकल समीकरण का व्यापक हल है :

$$\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$$

जहाँ P_1 और Q_1 क्रमश: y के फलन है।

$\therefore$ $$\text{I.F.} = e^{\int P_1\,dy}$$

अत: हल है :

$$x.e^{\int P_1\,dy} = \int\left(Q_1 \times e^{\int P_1\,dy}\right)dy + C$$

$\therefore$ अत: विकल्प (C) सही है। **उत्तर**

प्रश्न 18. अवकल समीकरण $e^x\, dy + (y\, e^x + 2x)\, dx = 0$ का व्यापक हल है :

(A) $x\, e^y + x^2 = C$ (B) $x\, e^y + y^2 = C$

(C) $y\, e^x + x^2 = C$ (D) $y\, e^y + x^2 = C$

हल : दिया है :

$$e^x\, dy + (ye^x + 2x)\, dx = 0$$

या
$$e^x \frac{dy}{dx} + e^x y = -2x$$

या
$$\frac{dy}{dx} + 1.y = -2xe^{-x}$$

$$\text{I.F.} = e^{\int dx} = e^x$$

∴ अभीष्ट हल है :

$$ye^x = \int(-2x)\, e^{-x} \times e^x\, dx + C$$
$$= -\int 2x\, dx + C$$
$$= -x^2 + C$$

या
$$ye^x + x^2 = C$$

अतः विकल्प (C) सही है। **उत्तर**