अध्याय 5

यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

बिंदु, रेखा, तल या पृष्ठ, अभिगृहीत, अभिधारणा और प्रमेय, एलीमेंट्स, प्राचीन भारत में अग्निकुंड या वेदियों के आकार, यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा के समतुल्य रूपांतरण, अभिगृहीतों के एक निकाय की संगतता।

प्राचीन भारत

- वैदिक काल की ज्यामिति का उद्‌गम वैदिक पूजा के लिए आवश्यक विभिन्न प्रकार की वेदियों और अग्निकुंडों के निर्माण से हुआ। घरेलू धार्मिक क्रियाओं के लिए वर्गाकार और वृत्ताकार वेदियों का प्रयोग होता था जबकि सार्वजनिक पूजा स्थलों के लिए आयतों, त्रिभुजों और समलंबों के समायोजनों के आकार की वेदियों के प्रयोग की आवश्यकता होती थी।

मिस्र, बेबीलोनिया और यूनान

- मिस्रवासियों ने सरल क्षेत्रफलों को परिकलित करने तथा सरल रचनाएँ करने के लिए अनेक ज्यामितीय तकनीक और नियम विकसित किए। बेबीलोनिया के निवासियों और मिस्रवासियों ने ज्यामितीय का प्रयोग अधिकांशतः व्यावहारिक उद्देश्यों के लिए किया तथा इसको एक क्रमबद्ध विज्ञान के रूप में विकसित करने के लिए बहुत कम कार्य किया। यूनानियों की रुचि अपने द्वारा खोजे गए कथनों की निगमन तर्कण द्वारा सत्यता स्थापित करने में थी। सर्वप्रथम ज्ञात उत्पत्ति प्रदान करने का श्रेय एक यूनानी गणितज्ञ थेल्स को जाता है।

यूक्लिड के एलीमेंट्स

- लगभग 300 B.C. में यूक्लिड ने उस समय तक ज्ञात गणित को क्षेत्र के संपूर्ण ज्ञान को एकत्रित किया तथा उसे एलीमेंट्स नामक अपनी प्रसिद्ध कृति के रूप में व्यवस्थित किया। यूक्लिड ने कुछ गुणों को बिना सिद्ध किए सत्य मान लिया। ये सत्य मान ली गई कल्पनाएँ वास्तव में स्पष्टतः सर्वव्यापी सत्य हैं। उन्होंने उन्हें दो वर्गों में बाँटा।

अभिगृहीत

1. वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, परस्पर बराबर होती हैं।
2. यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं।
3. यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होते हैं।
4. वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों, परस्पर बराबर होती हैं।
5. पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।
6. वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु की दोगुनी हों, परस्पर बराबर होती हैं।
7. वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु की आधी हों, परस्पर बराबर होती हैं।

अभिधारणाएँ

1. एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक सरल रेखा खींची जा सकती है।
2. एक सांत रेखा (रेखाखंड) को अनिश्चित रूप से विस्तृत किया जा सकता है।
3. किसी केंद्र और किसी त्रिज्या को लेकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।
4. सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।
5. यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिरकर अपने एक ही ओर दो अंत:कोण इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिलकर दो समकोणों से कम हो, तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाने पर उसी ओर मिलती हैं जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।

यूक्लिड ने उन कल्पनाओं के लिए अभिधारणा शब्द का प्रयोग किया जो विशिष्ट रूप से ज्यामिति से संबद्ध थे तथा अन्य कल्पनाओं को उन्होंने अभिगृहीत कहा। एक **प्रमेय** वह गणितीय कथन होता है जिसकी सत्यता तार्किक रूप से स्थापित कर ली जाती है।

वर्तमान ज्यामिति

- एक गणित निकाय (पद्धति) में अभिगृहीत, परिभाषाएँ और अपरिभाषित शब्द निहित हैं।
- बिंदु, रेखा और तल को अपरिभाषित पदों के रूप में मान लिया गया है।
- अभिगृहीतों का कोई निकाय संगत (या अविरोधी) कहलाता है, यदि इन अभिगृहीतों तथा इनसे निगमित प्रमेयों में कोई विरोधाभास न हो।
- दो दिए हुए भिन्न बिंदुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा जाती है।
- दो भिन्न रेखाओं में एक से अधिक बिंदु उभयनिष्ठ नहीं हो सकते।
- प्लेफेयर अभिगृहीत (यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा का एक समतुल्य रूपांतरण)

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए–

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यूक्लिड की दूसरी अभिगृहीत (कक्षा IX की पाठ्यपुस्तक में दिए क्रम के अनुसार) है।

(A) वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, परस्पर बराबर होती हैं।

(B) यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण बराबर होते हैं।

(C) यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल बराबर होते हैं।

(D) वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों परस्पर बराबर होती हैं।

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा है

(A) पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।

(B) किसी केंद्र और किसी त्रिज्या को लेकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।

(C) सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।

(D) यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिरकर अपने एक ही ओर दो अंत:कोण इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिलकर दो समकोणों से कम हो तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाने पर उसी ओर मिलती हैं जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।

हल : उत्तर (D)

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : वे वस्तुएँ, जो एक ही वस्तु की दोगुनी हों, होती हैं

(A) बराबर

(B) बराबर नहीं

(C) उसी वस्तु की आधी

(D) उसी वस्तु की दोगुनी

हल : उत्तर (A)

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : अभिगृहीत ऐसी कल्पनाएँ हैं, जो

(A) गणित की सभी शाखाओं में सर्वव्यापी सत्य हैं

(B) विशिष्ट रूप से ज्यामिति से संबद्ध सर्वव्यापी तथ्य हैं

(C) प्रमेय हैं

(D) परिभाषाएँ हैं

हल : उत्तर (A)

प्रतिदर्श प्रश्न 5 : जॉन की आयु मोहन की आयु के बराबर है। राम की आयु वही है जो मोहन की है। यूक्लिड की वह अभिगृहीत बताइए जो जॉन और राम की आयु में संबंध स्पष्ट करती है।

(A) पहली अभिगृहीत (B) दूसरी अभिगृहीत

(C) तीसरी अभिगृहीत (D) चौथी अभिगृहीत

हल : उत्तर (A)

प्रतिदर्श प्रश्न 6 : यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिरकर अपने एक ही ओर दो अंतः कोण इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग 120° हो, तो दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाने पर, उस ओर परस्पर मिलेंगी जहाँ कोणों का योग होगा।

(A) 120° से कम (B) 120° से अधिक

(C) 120° के बराबर (D) 180° से अधिक

हल : उत्तर (A)

प्रश्नावली 5.1

1. ठोसों से बिंदुओं तक तीन चरण हैं:

(A) ठोस-पृष्ठ-रेखाएँ-बिंदु (B) ठोस-रेखाएँ-पृष्ठ-बिंदु

(C) रेखाएँ-बिंदु-पृष्ठ-ठोस (D) रेखाएँ-पृष्ठ-बिंदु-ठोस

2. एक ठोस की विमाओं की संख्या है:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

3. एक पृष्ठ की विमाओं की संख्या है:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

4. एक बिंदु की विमाओं की संख्या है:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

5. यूक्लिड ने अपनी प्रसिद्ध कृति "एलीमेंट्स" को निम्नलिखित में विभाजित किया:

(A) 13 अध्याय (B) 12 अध्याय (C) 11 अध्याय (D) 9 अध्याय

6. एलीमेंट्स में साध्यों की कुल संख्या है:

(A) 465 (B) 460 (C) 13 (D) 55

7. ठोसों की परिसीमाएँ हैं:

(A) पृष्ठ (B) वक्र (C) रेखाएँ (D) बिंदु

8. पृष्ठों की परिसीमाएँ हैं:

(A) पृष्ठ (B) वक्र (C) रेखाएँ (D) बिंदु

9. सिन्धु घाटी सभ्यता (लगभग 300 B.C.) में निर्माण कार्य में प्रयुक्त ईंटों की विमाओं का अनुपात था

(A) 1 : 3 : 4 (B) 4 : 2 : 1 (C) 4 : 4 : 1 (D) 4 : 3 : 2

10. पिरामिड एक ठोस आकृति है जिसका आधार होता है:

(A) केवल त्रिभुज (B) केवल वर्ग

(C) केवल आयत (D) कोई भी बहुभुज

11. एक पिरामिड के पार्श्व फलक होते हैं:

(A) त्रिभुज (B) वर्ग (C) बहुभुज (D) समलंब

12. यह ज्ञात है कि यदि $x+y=10$ हो, तो $x+y+z=10+z$ होगा। यूक्लिड की अभिगृहीत, जो इस कथन को स्पष्ट करती है, निम्नलिखित है:

(A) पहली अभिगृहीत (B) दूसरी अभिगृहीत
(C) तीसरी अभिगृहीत (D) चौथी अभिगृहीत

13. प्राचीन भारत में, घरेलू पूजा कार्य में प्रयोग की जाने वाली वेदियों के आकार होते थे:

(A) वर्ग और वृत्त (B) त्रिभुज और आयत
(C) समलंब और पिरामिड (D) आयत और वर्ग

14. (अथर्ववेद में दिए) 'श्रीयंत्र' में एक दूसरे के साथ जुड़े अंतर्निहित समद्विबाहु त्रिभुजों की संख्या है:

(A) सात (B) आठ (C) नौ (D) ग्यारह

15. यूनानियों ने निम्नलिखित पर बल दिया:

(A) अगमन तर्कण (B) निगमन तर्कण
(C) A और B दोनों (D) ज्यामिति का व्यावहारिक प्रयोग

16. प्राचीन भारत में, आयतों, त्रिभुजों और समलंबों से संयोजित आकारों की वेदियाँ निम्नलिखित में प्रयोग होती थीं:

(A) सार्वजनिक पूजा स्थल (B) घरेलू पूजा कार्य
(C) A और B दोनों (D) A, B और C में से कोई नहीं

17. यूक्लिड निम्नलिखित देश का वासी था:

(A) बेबीलोनिया (B) मिस्र (C) यूनान (D) भारत

18. थेल्स निम्नलिखित देश का वासी था:

(A) बेबीलोनिया (B) मिस्र (C) यूनान (D) रोम

19. पाइथागोरस एक विद्यार्थी था:

(A) थेल्स का (B) यूक्लिड का
(C) A और B दोनों का (D) आर्कमिडीज का

20. निम्नलिखित में से किसको उपपत्ति की आवश्यकता है?

(A) प्रमेय (B) अभिगृहीत (C) परिभाषा (D) अभिधारणा

21. यूक्लिड के कथन, सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं, निम्नलिखित के रूप में दिया गया है

(A) एक अभिगृहीत (B) एक परिभाषा (C) एक अभिधारणा (D) एक उपपत्ति

22. 'रेखाएँ समांतर होती हैं, यदि वे प्रतिच्छेद नहीं करती' का कथन, निम्नलिखित के रूप में दिया गया है

(A) एक अभिगृहीत (B) एक परिभाषा (C) एक अभिधारणा (D) एक उपपत्ति

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य** लिखिए। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) पिरामिड एक ठोस आकृति है, जिसका आधार एक त्रिभुज, एक वर्ग या कोई भी बहुभुज होता है तथा इसके पार्श्व फलक समबाहु त्रिभुज होते हैं जो ऊपर एक बिंदु पर मिलते हैं।

(ii) वैदिक काल में, वर्गाकार और वृत्ताकार वेदियाँ घरेलू पूजा के कार्यों में प्रयोग की जाती थीं जबकि सार्वजनिक पूजा स्थलों में ऐसी वेदियाँ प्रयोग की जाती थीं जिनका आकार आयतों, त्रिभुजों और समलंबों का संयोजन होता था।

(iii) ज्यामिति में हम बिंदु, रेखा और तल को अपरिभाषित पद मानते हैं।

(iv) यदि एक त्रिभुज का क्षेत्रफल एक आयत के क्षेत्रफल के बराबर है और आयत का क्षेत्रफल एक वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

(v) यूक्लिड की चौथी अभिगृहीत कहती है कि प्रत्येक वस्तु स्वयं के बराबर होती है।

(vi) यूक्लिडीय ज्यामिति केवल समतल (तल) में स्थित आकृतियों के लिए ही मान्य है।

हल :

(i) असत्य। पिरामिड के पार्श्वफलक त्रिभुज होते हैं और इनका समबाहु त्रिभुज होना आवश्यक नहीं है।

(ii) सत्य। वैदिक काल की ज्यामिति का उद्गम वैदिक पूजा के कार्यों को करने के लिए वेदियों और अग्निकुंडों के निर्माण से हुआ। पवित्र अग्नियों के स्थान उनके आकारों और क्षेत्रफलों के बारे में स्पष्ट रूप से निर्धारित अनुदेशों के अनुसार होते थे।

(iii) सत्य। एक बिंदु, एक रेखा और एक तल को परिभाषित करने के लिए हमें अनेक अन्य वस्तुओं को परिभाषित करने की आवश्यकता होती है, जिससे परिभाषाओं की एक लंबी शृंखला प्राप्त होती है जिसका कोई अंत नहीं है। इन्हीं कारणवश, गणितज्ञ इन ज्यामितीय पदों को अपरिभाषित मानने के लिए सहमत हो गए।

(iv) सत्य। वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों बराबर होती हैं।

(v) सत्य। यह अध्यारोपण के सिद्धांत का औचित्य है।

(vi) सत्य। यह वक्रीय पृष्ठों पर कार्य नहीं करती है। उदाहरणार्थ, वक्रीय पृष्ठों पर, त्रिभुज के कोणों का योग $180°$ से अधिक हो सकता है।

प्रश्नावली 5.2

*निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य** लिखिए। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए –*

1. यूक्लिडीय ज्यामिति केवल वक्र पृष्ठों के लिए ही मान्य है।

2. ठोसों की परिसीमाएँ वक्र होती हैं।

3. एक पृष्ठ के किनारे वक्र होते हैं।

4. वस्तुएँ जो एक ही वस्तु की दोगुनी हों परस्पर बराबर होती हैं।

5. यदि एक राशि B एक अन्य राशि A का एक भाग है, तो A को B और एक अन्य राशि C के योग के रूप में लिखा जा सकता है।

6. वे कथन जिन्हें सिद्ध किया जाता है अभिगृहीत कहलाते हैं।

7. कथन "प्रत्येक रेखा l और उस पर न स्थित प्रत्येक बिंदु P के लिए, एक अद्वितीय रेखा का अस्तित्व है जो P से होकर जाती है और l के समांतर है" प्लेफेयर अभिगृहीत कहलाता है।

8. दो भिन्न प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर नहीं हो सकतीं।

9. यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा को अन्य अभिधारणाओं और अभिगृहीतों का प्रयोग करते हुए, सिद्ध करने के प्रयासों के फलस्वरूप अन्य अनेक ज्यामितियों की खोज हुई।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

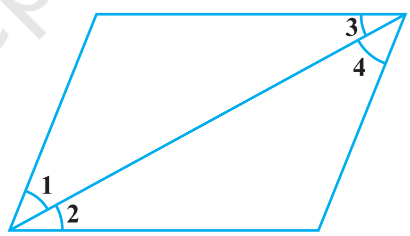
प्रतिदर्श प्रश्न 1 : राम और रवि का एक ही भार है। यदि दोनों में से प्रत्येक का भार 2 kg बढ़ जाता है, तो उनके नए भारों की तुलना कैसे होगी?

हल : मान लीजिए कि राम और रवि में से प्रत्येक का भार x kg है। 2 kg भार बढ़ने पर, प्रत्येक का भार $(x + 2)$ हो जाएगा। यूक्लिड की दूसरी अभिगृहीत के अनुसार, जब बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाता है, तो पूर्ण बराबर होते हैं। अत:, राम और रवि के भार पुन: बराबर होंगे।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : समीकरण $a - 15 = 25$ को हल कीजिए तथा बताइए कि आप यहाँ कौन सी अभिगृहीत का प्रयोग कर रहे हैं।

हल : $a - 15 = 25$ के दोनों पक्षों में 15 जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है : $a - 15 + 15 = 25 + 15 = 40$ (यूक्लिड की दूसरी अभिगृहीत द्वारा)।

या $a = 40$



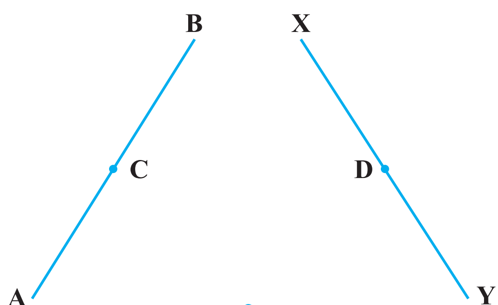
आकृति 5.1

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : आकृति 5.1 में, यदि $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ और $\angle 3 = \angle 4$ है, तो यूक्लिड की एक अभिगृहीत का प्रयोग करते हुए, $\angle 1$ और $\angle 2$ में संबंध लिखिए।

हल : यहाँ $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 1 = \angle 3$ और $\angle 2 = \angle 4$ है। यूक्लिड की पहली अभिगृहीत कहती है कि वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों परस्पर बराबर होती हैं।

अत:, $\angle 1 = \angle 2$ है।

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : आकृति 5.2 में, हमें प्राप्त है: AC = XD, C, AB का मध्य-बिंदु है तथा D, XY का मध्य-बिंदु है। यूक्लिड अभिगृहीत का प्रयोग करते हुए, दर्शाइए कि AB = XY है।



आकृति 5.2

हल : AB = 2AC (C, AB का मध्य-बिंदु है)

XY = 2AD (D, XY का मध्य-बिंदु है)

साथ ही, AC = XD (दिया है)

अत:, $AB = XY$, क्योंकि वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु की दोगुनी हों, परस्पर बराबर होती हैं।

प्रश्नावली 5.3

निम्नलिखित में से प्रत्येक प्रश्न को उपयुक्त यूक्लिड की अभिगृहीत का प्रयोग करते हुए, हल कीजिए:

1. दो सेल्समैन ने अगस्त के महीने में बराबर बिक्री की। सितंबर में, प्रत्येक सेल्समैन अपनी बिक्री अगस्त के महीने की बिक्री की दोगुनी कर लेता है। दोनों की सितंबर की बिक्रियों की तुलना कीजिए।

2. यह ज्ञात है कि $x + y = 10$ और $x = z$ है। दर्शाइए कि $z + y = 10$ है।

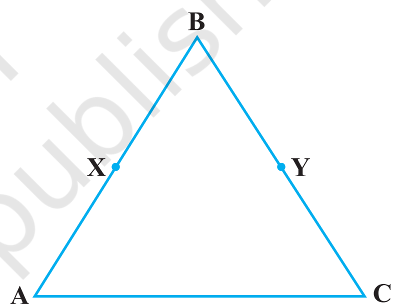
3. आकृति 5.3 को देखिए। दर्शाइए $AH > AB + BC + CD$ है।

आकृति 5.3

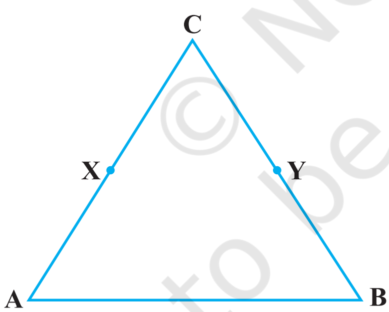
4. आकृति 5.4 में, हमें प्राप्त है:

$AB = BC$, $BX = BY$। दर्शाइए कि $AX = CY$ है।

5. आकृति 5.5 में, X और Y क्रमश: AC और BC के मध्य-बिंदु हैं तथा $AX = CY$ है। दर्शाइए कि $AC = BC$ है।



आकृति 5.4



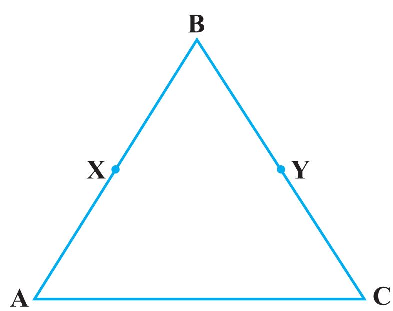
आकृति 5.5

6. आकृति 5.6 में, हमें प्राप्त है:

$BX = \frac{1}{2} AB$

$BY = \frac{1}{2} BC$ तथा $AB = BC$ है। दर्शाइए कि

$BX = BY$ है।

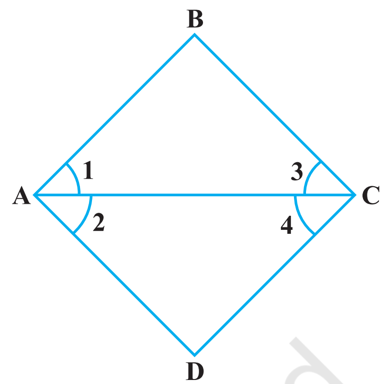


आकृति 5.6

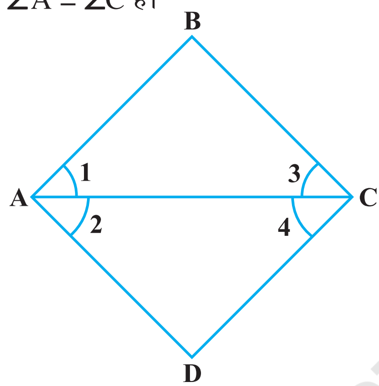
29052014

7. आकृति 5.7 में, $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 2 = \angle 3$ है। दर्शाइए कि $\angle 1 = \angle 3$ है।

8. आकृति 5.8 में, $\angle 1 = \angle 3$ और $\angle 2 = \angle 4$ है। दर्शाइए कि $\angle A = \angle C$ है।



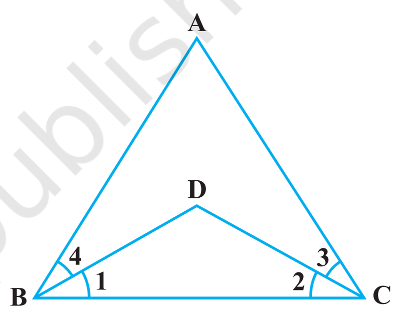
आकृति 5.7



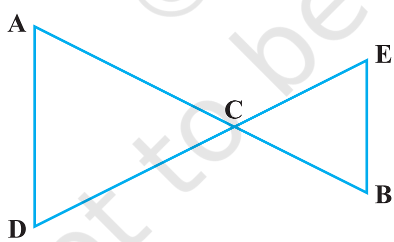
आकृति 5.8

9. आकृति 5.9 में, $\angle ABC = \angle ACB$ और $\angle 3 = \angle 4$ है। दर्शाइए कि $\angle 1 = \angle 2$ है।

10. आकृति 5.10 में $AC = DC$ और $CB = CE$ है। दर्शाइए कि $AB = DE$ है।

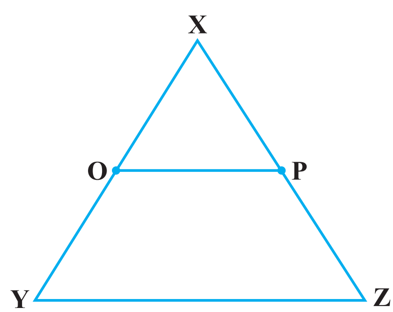


आकृति 5.9



आकृति 5.10

11. आकृति 5.11 में, यदि $OX = \frac{1}{2} XY$, $PX = \frac{1}{2} XZ$ और $OX = PX$ हो, तो दर्शाइए कि $XY = XZ$ है।



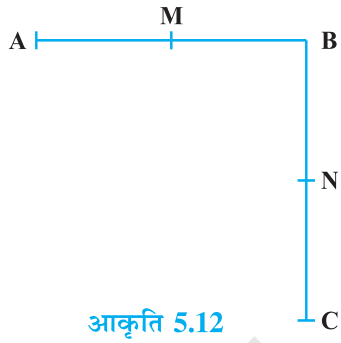
आकृति 5.11

29052014

12. आकृति 5.12 में,

(i) AB = BC, M रेखाखंड AB का मध्य-बिंदु है और N रेखाखंड BC का मध्य-बिंदु है। दर्शाइए कि AM = NC है।

(ii) BM = BN है, M रेखाखंड AB का मध्य-बिंदु है तथा N रेखाखंड BC का मध्य-बिंदु है। दर्शाइए कि AB = BC है।



आकृति 5.12

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : निम्नलिखित कथन को पढ़िए:

"एक वर्ग चार रेखाखंडों से बना एक बहुभुज है, जिसमें से तीन रेखाखंडों की लंबाइयाँ चौथे रेखाखंड की लंबाई के बराबर है तथा इसके सभी कोण समकोण हैं।"

इस परिभाषा में, उन पदों को परिभाषित कीजिए जिन्हें आप आवश्यक अनुभव करते हैं। क्या इनमें कुछ अपरिभाषित पद हैं? क्या आप इसका औचित्य दे सकते हैं कि एक वर्ग के सभी कोण और भुजाएँ बराबर होती हैं?

हल : परिभाषित किए जाने वाले पद हैं:

बहुभुज	:	तीन या अधिक रेखाखंड से बनी एक सरल बंद आकृति
रेखाखंड	:	रेखा का वह भाग जिसके दो अंत बिंदु हों
रेखा	:	अपरिभाषित पद
बिंदु	:	अपरिभाषित पद
कोण	:	उभयनिष्ठ शीर्ष वाली दो किरणों से बनी आकृति
किरण	:	रेखा का वह भाग जिसका एक अंत बिंदु हो
समकोण	:	कोण जिसकी माप 90° है।

अपरिभाषित पद जिनका प्रयोग हुआ है : रेखा, बिंदु

यूक्लिड की चौथी अभिधारणा कहती है कि "सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।"

एक वर्ग में सभी कोण समकोण होते हैं। अतः चारों कोण बराबर हैं। (यूक्लिड की चौथी अभिधारणा से)

तीन रेखाखंड चौथे रेखाखंड के बराबर हैं। (दिया है)

अतः वर्ग की सभी चारों भुजाएँ बराबर होंगी। (यूक्लिड की प्रथम अभिगृहीत से "वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, परस्पर बराबर होती हैं।")

प्रश्नावली 5.4

1. निम्नलिखित कथन को पढ़िए :

एक समबाहु त्रिभुज तीन रेखाखंडों से बना एक बहुभुज है जिनमें से दो रेखाखंड तीसरे रेखाखंड के बराबर हैं तथा इसका प्रत्येक कोण $60°$ का है।

इस परिभाषा में, उन पदों को परिभाषित कीजिए जिन्हें आप आवश्यक समझते हैं। क्या इसमें कोई अपरिभाषित पद है? क्या आप इसका औचित्य दे सकते हैं कि एक समबाहु त्रिभुज के सभी कोण और सभी भुजाएँ बराबर होती हैं।

2. निम्नलिखित कथन का अध्ययन कीजिए:

"दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा पर लंब नहीं हो सकती हैं।"

जाँच कीजिए कि क्या यह कथन यूक्लिड पाँचवीं अभिधारणा का समतुल्य रूपांतरण है। [**संकेत :** उपरोक्त कथन में, दो प्रतिच्छेदी रेखा l और m तथा एक अन्य रेखा n की पहचान कीजिए।]

3. निम्नलिखित कथनों को अभिगृहीत माना गया है:

(i) यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है तो संगत कोण आवश्यक रूप से बराबर नहीं होते हैं।

(ii) यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है तो एकांतर अंत:कोण बराबर होते हैं।

क्या अभिगृहीतों का यह निकाय संगत (अविरोधी) है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

4. निम्नलिखित कथनों को अभिगृहीत माना गया है:

(i) यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर नहीं होते हैं।

(ii) यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो तो इस प्रकार प्राप्त दोनों आसन्न कोणों का योग $180°$ होता है।

क्या अभिगृहीतों का यह निकाय संगत है?

5. निम्नलिखित अभिगृहीतों को पढ़िए:

(i) वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, परस्पर बराबर होती हैं

(ii) यदि बराबर को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण बराबर होते हैं

(iii) वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु की दोगुनी हों, परस्पर बराबर होती है

जाँच कीजिए कि क्या अभिगृहीतों का यह निकाय संगत है या असंगत है।