अध्याय 3

त्रिकोणमितीय फलन

Trigonometric Functions

प्रश्नावली 3.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित डिग्री माप के संगत रेडियन माप ज्ञात कीजिए।

(i) $25°$ (ii) $-47° 30'$ (iii) $240°$ (iv) $520°$

डिग्री को रेडियन में परिवर्तित करने के लिए सदैव $1° = \frac{\pi}{180}$ रेडियन का प्रयोग करते हैं।

हल

(i) $25° = 25 \times \frac{\pi}{180}$ रेडियन $= \frac{5\pi}{36}$ रेडियन $\left(\because 1° = \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन}\right)$

(ii) $-47° 30' = -\left(47 + \frac{30}{60}\right)^° = -\left(47 + \frac{1}{2}\right)^°$ $\left[\because 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^°\right]$

$= -\left(\frac{94+1}{2}\right)^° = -\frac{95°}{2} = -\frac{95}{2} \times \frac{\pi}{180}$ रेडियन $= -\frac{19\pi}{72}$ रेडियन

(iii) $240° = 240 \times \frac{\pi}{180}$ रेडियन $= \frac{4\pi}{3}$ रेडियन

(iv) $520° = 520 \times \frac{\pi}{180}$ रेडियन $= \frac{26\pi}{9}$ रेडियन

नोट *भाग (ii) में, याद रखें कि दी गई संख्या को सबसे पहले डिग्री में परिवर्तित करें। तत्पश्चात् इसको रेडियन में परिवर्तित करें।*

प्रश्न 2. निम्नलिखित रेडियन माप के संगत डिग्री माप ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right.$ का प्रयोग करें$\left.\right)$

(i) $\left(\frac{11}{16}\right)$ (ii) -4 (iii) $\frac{5\pi}{3}$ (iv) $\frac{7\pi}{6}$

रेडियन को डिग्री में परिवर्तित करने के लिए हमेशा $1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^°$ का प्रयोग करते हैं तथा तब $\pi \left(= \frac{22}{7}\right)$ का मान रखते हैं।

हल (i) $\left(\frac{11}{16}\right)^c = \left(\frac{11}{16} \times \frac{180}{\pi}\right)^° = \left(\frac{11}{8} \times \frac{90}{22} \times 7\right)^° = \left(\frac{45 \times 7}{8}\right)^°$ $\left[\because 1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^°\right]$

$= \left(\frac{315}{8}\right)^° = 39° + \left(\frac{3}{8}\right)^° = 39° + \frac{3}{8} \times 60'$

$= 39° + \left(\frac{45}{2}\right)'$ $(\because 1° = 60')$

$= 39° + 22' + \frac{1'}{2}$

$= 39° 22' + \frac{1 \times 60''}{2} = 39° 22' 30''$ $(\because 1' = 60'')$

(ii) $-4^c = -\left(4 \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -\left(4 \times \frac{180}{22} \times 7\right)^\circ$

$$= \left(\frac{2 \times 1260}{11}\right)^\circ = -\left(\frac{2520}{11}\right)^\circ = -\left[229^\circ + \left(\frac{1}{11}\right)^\circ\right]$$

$$= -\left(229^\circ + \frac{1}{11} \times 60'\right) \qquad (\because 1^\circ = 60')$$

$$= -\left(229^\circ + 5' + \left(\frac{5}{11}\right)'\right)$$

$$= -\left(229^\circ\, 5' + \frac{5}{11} \times 60''\right) \qquad (\because 1' = 60'')$$

$$= -(229^\circ\, 5'\, 27'') \quad \text{(लगभग)}$$

(iii) $\left(\frac{5\pi}{3}\right)^c = \left(\frac{5\pi}{3} \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 300^\circ$ $\qquad \left[\because 1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\right]$

(iv) $\left(\frac{7\pi}{6}\right)^c = \left(\frac{7\pi}{6} \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 210^\circ$

नोट *जैसा कि भाग (i), (iii) तथा (iv) में है कि, यदि संख्याओं का भाग, भिन्न में है, तब हल करने के लिए यह जरूरी हो जाता है कि इसे मिनट तथा सेकण्ड में परिवर्तित कर लेना चाहिए। भाग (ii) में ऋणात्मक चिन्ह केवल दक्षिणावर्त दिशा को प्रदर्शित करता है, जब तक प्रश्न को हल किया जाता है, तब तक व्यंजक के बाहर कोष्ठक लगाना चाहिए।*

प्रश्न 3. एक पहिया एक मिनट में 360° परिक्रमण करता है, तो एक सेकण्ड में कितने रेडियन माप का कोण बनाएगा?

हल 1 मिनट में, पहिये के परिक्रमणों की संख्या = 360

अर्थात् 60 सेकण्ड में, पहिये के परिक्रमणों की संख्या = 360

$\therefore$ 1 सेकण्ड में, पहिये के परिक्रमणों की संख्या $= \frac{360}{60} = 6$

1 परिक्रमण में घुमा कोण $= 360^\circ = 2\pi$

6 परिक्रमण में घुमा कोण $= 2\pi \times 6 = 12\pi$ रेडियन

प्रश्न 4. एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या 100 सेमी है, की 22 सेमी लंबाई की चाप वृत्त के केंद्र पर कितने डिग्री माप का कोण बनाएगी $\left(\pi = \frac{22}{7}\right.$ का प्रयोग कीजिए$\left.\right)$।

यदि एक वृत्त की त्रिज्या r तथा चाप की लंबाई l है जो वृत्त के केंद्र पर θ कोण अंतरित करता है, तब हम निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं

$$\theta = \frac{l}{r}, \quad \text{अर्थात् कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$

हल यहाँ, $l = 22$ सेमी तथा $r = 100$ सेमी

निम्न सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$\theta = \frac{l}{r}$$

$\Rightarrow$ $$\theta = \frac{22}{100} = \frac{11}{50} \text{ रेडियन}$$

$$= \left(\frac{11}{50} \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{11 \times 18 \times 7}{5 \times 22}\right)^\circ = \left(\frac{63}{5}\right)^\circ$$

$$= 12^\circ + \left(\frac{3}{5}\right)^\circ$$

$$= 12^\circ + \frac{3}{5} \times 60' \qquad (\because 1^\circ = 60')$$

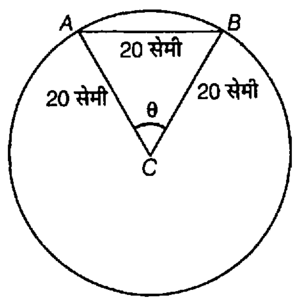
$$= 12^\circ 36'$$

प्रश्न 5. **एक वृत्त, जिसका व्यास 40 सेमी है, की एक जीवा 20 सेमी लंबाई की है, तो इसके संगत छोटे चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।**

हल दिया है, व्यास = 40 सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $CA = CB = \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{40}{2} = 20$ सेमी

तथा जीवा $AB = 20$ सेमी



अब चित्रानुसार, त्रिभुज ABC की तीनों भुजाओं की लंबाई बराबर है, अतः यह एक समबाहु त्रिभुज है।

अब, निम्न सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$\theta = \frac{l}{r}$$

$$60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{AB}{20}$$

$\Rightarrow$ $$AB = 60^\circ \times 20 \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{20\pi}{3} \text{ सेमी}$$

> **नोट** सूत्र $\theta = \frac{l}{r}$ *में हमेशा यह याद रखें कि θ रेडियन में मापा जाता है। अतः जब भी इस सूत्र का प्रयोग करना हो, तो सबसे पहले डिग्री को रेडियन में परिवर्तित करते हैं।*

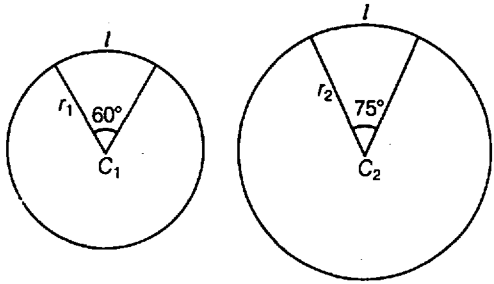
प्रश्न 6. **यदि दो वृत्तों के समान लंबाई वाले चाप अपने केंद्रों पर क्रमशः 60° तथा 75° के कोण बनाते हों, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।**

सबसे पहले, सूत्र $\theta = \frac{l}{r}$ का प्रयोग करते हुए हम दोनों वृत्तों की त्रिज्या ज्ञात करते हैं और तब उनका अनुपात प्राप्त करते हैं।

हल $\theta = \frac{l}{r}$ सूत्र का प्रयोग करने पर,

प्रथम वृत्त के लिए, $$60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{l}{r_1} \qquad \text{...(i)}$$

तथा द्वितीय वृत्त के लिए, $$75 \times \frac{\pi}{180} = \frac{l}{r_2} \quad \text{...(ii)}$$



समी (i) को समी (ii) से भाग करने पर,

$$\frac{60 \times \frac{\pi}{180}}{75 \times \frac{\pi}{180}} = \frac{\frac{l}{r_1}}{\frac{l}{r_2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{4}{5}$$

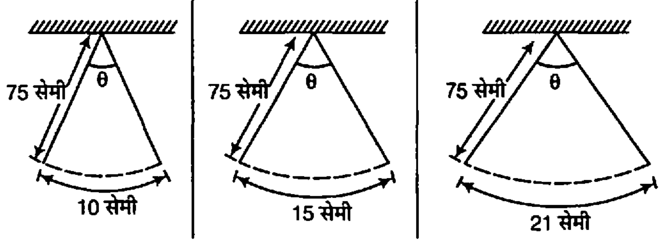
$$\Rightarrow \quad r_1 : r_2 = 5 : 4$$

प्रश्न 7. 75 सेमी लंबाई वाले एक दोलायमान दोलक का एक सिरे से दूसरे सिरे तक दोलन करने से जो कोण बनता है, उसका माप रेडियन में ज्ञात कीजिए, जबकि उसके नोक द्वारा बनाए गए चाप की लंबाई निम्नलिखित हैं

(i) 10 सेमी (ii) 15 सेमी (iii) 21 सेमी

$\theta = \frac{l}{r}$ सूत्र का प्रयोग कीजिए।

हल (i) $\theta = \frac{10}{75} = \frac{2}{15}$ रेडियन | (ii) $\theta = \frac{15}{75} = \frac{1}{5}$ रेडियन | (iii) $\theta = \frac{21}{75} = \frac{7}{25}$ रेडियन



प्रश्नावली 3.2

निर्देश (प्र. सं. 1 - 5) निम्नलिखित प्रश्नों में पाँच अन्य त्रिकोणमितीय फलनों का मान ज्ञात कीजिए।

सभी त्रिकोणमितीय फलनों को ज्ञात करने के लिए, सबसे पहले सर्वसमिका $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ का प्रयोग करते हुए हमें $\sin x$ तथा $\cos x$ को ज्ञात करना चाहिए। इसके बाद हम आसानी से अन्य त्रिकोणमितीय फलनों को भी ज्ञात कर सकते हैं। सभी त्रिकोणमितीय फलन प्राप्त होने के बाद हमें चतुर्थांश के आधार पर ही चिन्हों को लागू करना चाहिए।

प्रश्न 1. $\cos x = -\frac{1}{2}$, x तीसरे चतुर्थांश में स्थित है।

हल $\cos x = -\frac{1}{2}$

दिया है, x तीसरे चतुर्थांश में स्थित है।

अर्थात् $$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

हम जानते हैं कि $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 x = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

∵ तृतीय चतुर्थांश में $\sin x$ ऋणात्मक होता है, अतः हम यहाँ पर घनात्मक चिन्ह छोड़ देंगे

अर्थात् $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

अब, $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

तथा $$\sec x = \frac{1}{\cos x} = -2, \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

> **नोट** *हमेशा याद रखें कि घनात्मक तथा ऋणात्मक चिन्ह का प्रयोग त्रिकोणमितीय फलनों को उनके चतुर्थांशों में विचरण के द्वारा ही करना चाहिए।*

प्रश्न 2. $\sin x = \frac{3}{5}$, x दूसरे चतुर्थांश में स्थित है।

हल $\sin x = \frac{3}{5}$

दिया है, x दूसरे चतुर्थांश में स्थित है।

अर्थात् $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$\because$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\Rightarrow$ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$

$\Rightarrow$ $\cos x = \pm \frac{4}{5}$

$\because$ द्वितीय चतुर्थांश में $\cos x$ ऋणात्मक होता है, अतः हम यहाँ पर इसका धनात्मक चिन्ह छोड़ देंगे।

अर्थात् $\cos x = -\frac{4}{5} \Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4},$

$\cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{4}{3},$

$\sec x = \frac{1}{\cos x} = -\frac{5}{4}$ तथा $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{5}{3}$

प्रश्न 3. $\cot x = \frac{3}{4}$, x **तीसरे चतुर्थांश में स्थित है।**

हल $\cot x = \frac{3}{4}$

दिया है, x तीसरे चतुर्थांश में स्थित है।

अर्थात् $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $\tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{4}{3}$

$\because$ $\sec^2 x = \tan^2 x + 1 = \frac{16}{9} + 1$

$\sec^2 x = \frac{25}{9} \Rightarrow \sec x = \pm \frac{5}{3}$

$\because x$ तीसरे चतुर्थांश में स्थित है, जिसमें $\cos x$ ऋणात्मक होता है। अतः हम यहाँ पर ऋणात्मक चिन्ह लेंगे।

अर्थात् $\sec x = -\frac{5}{3} \Rightarrow \cos x = -\frac{3}{5}$

$\because$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{\sin x}{-\frac{3}{5}}$

$\Rightarrow$ $\sin x = -\frac{4}{5}$

तथा $\operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}$

प्रश्न 4. $\sec x = \frac{13}{5}$, x **चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।**

हल $\sec x = \frac{13}{5}$

दिया है, x चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।

अर्थात् $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \Rightarrow \cos x = \frac{5}{13}$

$\because$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169} = \left(\frac{12}{13}\right)^2$

$\Rightarrow \sin x = \pm \frac{12}{13}$

चूँकि x चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है, जिसमें sec x ऋणात्मक होता है, अतः हम यहाँ पर केवल ऋणात्मक चिन्ह लेंगे।

अर्थात् $\sin x = -\frac{12}{13}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\left(\frac{12}{13}\right)}{\left(\frac{5}{13}\right)} = -\frac{12}{5}$$

$\Rightarrow$ $\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x} = -\frac{13}{12}, \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{5}{12}$

प्रश्न 5. $\tan x = -\frac{5}{12}$, x दूसरे चतुर्थांश में स्थित है।

हल $\tan x = -\frac{5}{12}$

दिया है, x दूसरे चतुर्थांश में स्थित है।

अर्थात् $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{12}{5}$$

अब, $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = 1 + \frac{25}{144} = \frac{169}{144}$

$$\sec^2 x = \left(\frac{13}{12}\right)^2 \Rightarrow \sec x = \pm \frac{13}{12}$$

$\because x$ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, जिसमें tan x ऋणात्मक होता है।

अतः हम यहाँ पर केवल ऋणात्मक चिन्ह लेंगे।

$\therefore$ $\sec x = -\frac{13}{12}$

$\Rightarrow$ $\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{-12}{13}$

अब, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\Rightarrow$ $-\frac{5}{12} = \frac{\sin x}{-\frac{12}{13}} \Rightarrow \sin x = \frac{5}{13}$

तथा $\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x} = \frac{13}{5}$

निर्देश (प्र. सं. 6 - 10) निम्नलिखित पाँच प्रश्नों में त्रिकोणमितीय फलनों के मान ज्ञात कीजिए।

यदि कोण 360° से अधिक दिया है, तब हमें दिए गए कोण को 360° के गुणक के रूप में बदलने का प्रयास करना चाहिए। जिससे इसको हल करना आसान हो जाता है।

प्रश्न 6. $\sin 765°$

हल $\sin 765° = \sin(360 \times 2 + 45)° = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $[\because \sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta]$

प्रश्न 7. $\text{cosec}(-1410°)$

हल $\text{cosec}(-1410°) = -\text{cosec}(1410°)$ $[\because \text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta]$

$= -\text{cosec}(360 \times 4 - 30)°$

$= -(-\text{cosec}\,30°)$

$= \text{cosec}\,30° = 2$ $[\because \text{cosec}(2n\pi - \theta) = -\text{cosec}\,\theta]$

> **नोट** *जब भी आपको प्रश्न में त्रिकोणमितीय फलन के कोण के साथ ऋणात्मक चिन्ह दिया होता है, तब सबसे पहले आप सूत्र* $\sin(-x) = -\sin x$ *तथा* $\cos(-x) = \cos x$ *का प्रयोग करते हुए ऋणात्मक चिन्ह को त्रिकोणमितीय फलन से बाहर ले आना चाहिए, यह आपकी गणना को आसान बना देता है।*

प्रश्न 8. $\tan\frac{19\pi}{3}$

हल $\tan\frac{19\pi}{3} = \tan\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(2\pi \times 3 + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ $[\because \tan(2n\pi + \theta) = \tan\theta]$

प्रश्न 9. $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

हल $\sin\left(\frac{-11\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)$ $[\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$

$= -\sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2\pi \times 2 - \frac{\pi}{3}\right)$

$= -\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $[\because \sin(2n\pi - \theta) = -\sin\theta]$

प्रश्न 10. $\cot\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$

हल $\cot\left(-\frac{15\pi}{4}\right) = -\cot\left(\frac{15\pi}{4}\right)$ $[\because \cot(-\theta) = -\cot\theta]$

$= -\cot\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cot\left(2\pi \times 2 - \frac{\pi}{4}\right)$

$= -\left(-\cot\frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{4} = 1$ $[\because \cot(2n\pi - \theta) = -\cot\theta]$

प्रश्नावली 3.3

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$

हल सिद्ध करना है $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$

बायाँ पक्ष $= \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} =$ दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए $2\sin^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2 \frac{7\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

यदि प्रश्न में किसी त्रिकोणमितीय फलन का कोण $\frac{\pi}{2}$ से अधिक होता है, तब चतुर्थांश निकाय का प्रयोग करके हम उस कोण को विभक्त कर लेते हैं। तत्पश्चात् आसानी से सरल करते हैं।

हल सिद्ध करना है $2\sin^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2 \frac{7\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

बायाँ पक्ष $= 2\sin^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2 \frac{7\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{3}$

$= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \operatorname{cosec}^2 \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \cos^2 \frac{\pi}{3}$

$= 2 \times \frac{1}{4} + \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{3}$ $[\because \operatorname{cosec}(\pi + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta]$

$= \frac{1}{2} + (2)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} =$ दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए $\cot^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6} + 3\tan^2 \frac{\pi}{6} = 6$

हल सिद्ध करना है $\cot^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6} + 3\tan^2 \frac{\pi}{6} = 6$

बायाँ पक्ष $= \cot^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6} + 3\tan^2 \frac{\pi}{6}$

$= (\sqrt{3})^2 + \operatorname{cosec}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$

$= 3 + \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} + 3 \times \frac{1}{3}$ $[\because \operatorname{cosec}(\pi - \theta) = \operatorname{cosec}\theta]$

$= 3 + 2 + 1 = 6 =$ दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए $2\sin^2\frac{3\pi}{4}+2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\sec^2\frac{\pi}{3}=10$

हल सिद्ध करना है $2\sin^2\frac{3\pi}{4}+2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\sec^2\frac{\pi}{3}=10$

बायाँ पक्ष $=2\sin^2\frac{3\pi}{4}+2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\sec^2\frac{\pi}{3}$

$=2\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\sec^2\frac{\pi}{3}$

$=2\sin^2\frac{\pi}{4}+2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+2(2)^2$ $[\because \sin(\pi-\theta)=\sin\theta]$

$=2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+2\times\frac{1}{2}+2\times4=1+1+8=10=$ दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 5. निम्न के मान ज्ञात कीजिए। (i) $\sin 75°$ (ii) $\tan 15°$

दिए हुए त्रिकोणमितीय फलनों के कोणों को $75°=45°+30°$ तथा $15°=45°-30°$ लिखने पर, क्योंकि कोण 45° तथा 30° त्रिकोणमितीय फलनों में आसानी से याद रखे जा सकते हैं। इसके बाद सूत्र $\sin(A+B)$ तथा $\tan(A-B)$ का प्रयोग करते हैं।

हल

(i) $\sin 75°=\sin(45°+30°)$ $[\because \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B]$

$=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

(ii) $\tan 15°=\tan(45°-30°)$ $\left[\because \tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}\right]$

$=\frac{\tan 45°-\tan 30°}{1+\tan 45°\tan 30°}$

$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}$

$=\frac{3+1-2\sqrt{3}}{2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sin(x+y)$

यहाँ पर दिए हुए व्यंजक के बाएँ पक्ष को संयुक्त करने के लिए सर्वसमिका $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ का उपयोग कीजिए।

हल सिद्ध करना है $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sin(x+y)$

$\because$ बायाँ पक्ष $=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)$

माना $\frac{\pi}{4}-x=A$ तथा $\frac{\pi}{4}-y=B$

तब, बायाँ पक्ष $=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}-y\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(x+y)\right]$$

$=\sin(x+y)=$ दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$

दिए हुए व्यंजक के बाएँ पक्ष को विस्तारित करने के लिए हम सर्वसमिका $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ का प्रयोग कर सकते हैं, जहाँ $\frac{\pi}{4}$ को A तथा x को B की तरह मानते हैं।

हल सिद्ध करना है $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$

बायाँ पक्ष $=\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\times\dfrac{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}$

$\left[\because \tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\right.$ तथा $\left.\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}\right]$

$=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\times\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}=\left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2=$ दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 8. सिद्ध कीजिए $\dfrac{\cos(\pi+x)\cos(-x)}{\sin(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\cot^2 x$

हल सिद्ध करना है $\dfrac{\cos(\pi+x)\cos(-x)}{\sin(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\cot^2 x$

बायाँ पक्ष $= \dfrac{\cos(\pi + x)\cos(-x)}{\sin(\pi - x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)} \quad \dfrac{(-\cos x)(\cos x)}{(\sin x)(-\sin x)}$

$\left[\begin{array}{l} \because \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta \\ \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \sin(\pi-\theta) = \sin\theta \\ \sin(-\theta) = -\sin\theta \end{array}\right]$

$= \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cot^2 x =$ दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos(2\pi + x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi + x)\right] = 1$$

हल सिद्ध करना है $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)\cos(2\pi + x)\left[\cot\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi + x)\right] = 1$

बायाँ पक्ष $= \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)\cos(2\pi + x)\left[\cot\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi + x)\right]$

$= (\sin x)(\cos x)[\tan x + \cot x]$

$= \sin x \cos x\left(\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$

$\left[\begin{array}{l} \because \cot\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta \\ \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin\theta \end{array}\right]$

$= \sin x \cos x\left(\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}\right) = 1 =$ दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए

$$\sin(n+1)x\sin(n+2)x + \cos(n+1)x\cos(n+2)x = \cos x$$

बाएँ पक्ष को सरल करने के लिए $\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$
सूत्र का प्रयोग कीजिए।

हल सिद्ध करना है $\sin(n+1)x\sin(n+2)x + \cos(n+1)x\cos(n+2)x = \cos x$

बायाँ पक्ष $= \sin(n+1)x\sin(n+2)x + \cos(n+1)x\cos(n+2)x$

$= \cos[(n+2)x - (n+1)x]$ $[\because \cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B]$

$= \cos(nx + 2x - nx - x) = \cos x =$ दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\dfrac{3\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{2}\sin x$

यहाँ पर हम परिणाम को आसानी से प्राप्त करने के लिए,
$\cos C - \cos D = -2\sin\left(\dfrac{C+D}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{C-D}{2}\right)$, **सूत्र का प्रयोग करेंगे।**

हल सिद्ध करना है $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{2}\sin x$

बायाँ पक्ष $=\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$

$$=-2\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+x+\frac{3\pi}{4}-x}{2}\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+x-\frac{3\pi}{4}+x}{2}$$ (सूत्र द्वारा)

$$=-2\sin\frac{3\pi}{4}\sin x=-2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\sin x$$

$$=-2\sin\frac{\pi}{4}\sin x=-2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=-\sqrt{2}\sin x=$$ दायाँ पक्ष

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए $\sin^2 6x-\sin^2 4x=\sin 2x\sin 10x$

व्यंजक के बाएँ पक्ष को सरल करने के लिए हम सूत्र

$$\sin^2 A-\sin^2 B=\sin(A+B)\sin(A-B)$$

का प्रयोग करेंगे, जिससे परिणाम आसानी से प्राप्त होगा।

हल सिद्ध करना है $\sin^2 6x-\sin^2 4x=\sin 2x\sin 10x$

बायाँ पक्ष $=\sin^2 6x-\sin^2 4x=\sin(6x+4x)\sin(6x-4x)$

$=\sin 10x\sin 2x=$ दायाँ पक्ष

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए $\cos^2 2x-\cos^2 6x=\sin 4x\cdot\sin 8x.$

यहाँ पर ऐसा कोई भी सूत्र नहीं है जो $\cos^2 A-\cos^2 B$, के रूप का हो, इसलिए सबसे पहले हमें व्यंजक के बाएँ पक्ष को $\sin^2 A-\sin^2 B$ के रूप में परिवर्तित करना होगा, जिसके लिए हमें सर्वसमिका $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ की आवश्यकता होगी, इसके बाद हम इसे आसानी से सरल कर सकते हैं।

हल सिद्ध करना है $\cos^2 2x-\cos^2 6x=\sin 4x\sin 8x$

बायाँ पक्ष $=\cos^2 2x-\cos^2 6x$

$=(1-\sin^2 2x)-(1-\sin^2 6x)$ $(\because \sin^2 A+\cos^2 A=1)$

$=\sin^2 6x-\sin^2 2x$

$=\sin(6x+2x)\sin(6x-2x)$ $[\because \sin^2 A-\sin^2 B=\sin(A+B)\sin(A-B)]$

$=\sin 8x\sin 4x=$ दायाँ पक्ष

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए $\sin 2x+2\sin 4x+\sin 6x=4\cos^2 x\cdot\sin 4x$

हल सिद्ध करना है $\sin 2x+2\sin 4x+\sin 6x=4\cos^2 x\sin 4x$

बायाँ पक्ष $=\sin 2x+2\sin 4x+\sin 6x=\sin 6x+\sin 2x+2\sin 4x$

$$= 2\sin\frac{6x+2x}{2}\cos\frac{6x-2x}{2} + 2\sin 4x$$

$$\left[\because \sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]$$

$$= 2\sin 4x\cos 2x + 2\sin 4x = 2\sin 4x(\cos 2x + 1)$$

$$= 2\sin 4x(2\cos^2 x - 1 + 1) = 2\sin 4x\, 2\cos^2 x = 4\cos^2 x\sin 4x$$

= दायाँ पक्ष

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 15. सिद्ध कीजिए $\cot 4x(\sin 5x + \sin 3x) = \cot x(\sin 5x - \sin 3x)$

कभी-कभी बाएँ पक्ष को दाएँ पक्ष के बराबर आसानी से सिद्ध नहीं किया जा सकता है। इस स्थिति में, हम दोनों पक्षों को अलग-अलग सरल करते हैं, तत्पश्चात् दोनों पक्षों को बराबर दिखा देते हैं।

हल सिद्ध करना है $\cot 4x(\sin 5x + \sin 3x) = \cot x(\sin 5x - \sin 3x)$

बायाँ पक्ष $= \cot 4x(\sin 5x + \sin 3x) = \cot 4x \cdot 2\sin\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2}$

$$\left(\because \sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\right)$$

$$= \frac{\cos 4x}{\sin 4x} \times 2\sin 4x\cos x = 2\cos 4x\cos x$$

दायाँ पक्ष $= \cot x(\sin 5x - \sin 3x) = \cot x \cdot 2\cos\frac{5x+3x}{2}\sin\frac{5x-3x}{2}$

$$\left(\because \sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\right)$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} \times 2\cos 4x\sin x = 2\cos 4x\cos x$$

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए $\frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x} = -\frac{\sin 2x}{\cos 10x}$

दिए गए व्यंजक के बाएँ पक्ष में, अंश में cos तथा हर में sin उपस्थित है, इसलिए हम निम्न सूत्रों

$$\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

तथा $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

का प्रयोग क्रमशः अंश और हर में करेंगे।

हल सिद्ध करना है $\frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x} = -\frac{\sin 2x}{\cos 10x}$

बायाँ पक्ष $= \frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x} = \frac{-2\sin\frac{9x+5x}{2}\sin\frac{9x-5x}{2}}{2\cos\frac{17x+3x}{2}\sin\frac{17x-3x}{2}}$ (सूत्र द्वारा)

$$= \frac{-\sin 7x \sin 2x}{\cos 10x \sin 7x}$$

$$= -\frac{\sin 2x}{\cos 10x} = \text{दायाँ पक्ष}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 17. सिद्ध कीजिए $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4x$

व्यंजक का बायाँ पक्ष भिन्न रूप का है जिसके अंश में sin तथा हर में cos है, अंश तथा हर को संयुक्त करने के लिए हम क्रमशः

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

तथा $$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

सूत्रों का प्रयोग अंश व हर में करेंगे।

हल सिद्ध करना है $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4x$

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \frac{2\sin\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2}}{2\cos\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2}}$$ (सूत्र द्वारा)

$$= \frac{\sin 4x \cdot \cos x}{\cos 4x \cdot \cos x} = \tan 4x = \text{दायाँ पक्ष}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 18. सिद्ध कीजिए $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan\frac{x-y}{2}$

व्यंजक के बाएँ पक्ष को सरल करने के लिए, हम निम्न सूत्रों का प्रयोग करेंगे।

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cdot\sin\frac{C-D}{2}$$

तथा $$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cdot\cos\frac{C-D}{2}$$

हल सिद्ध करना है $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan\frac{x-y}{2}$

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$$ (सूत्र द्वारा)

$$= \tan\frac{x-y}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 19. सिद्ध कीजिए $\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan 2x$

हल सिद्ध करना है $\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan 2x$

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x}$$

$$= \frac{2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}}{2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}} \quad \text{(सूत्र द्वारा)}$$

$$= \frac{\sin 2x \cos x}{\cos 2x \cos x} = \tan 2x = \text{दायाँ पक्ष}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

> **नोट** *चिन्ह की गलती को छोड़ने के लिए हम यहाँ पर बड़े कोण 3x को C तथा छोटे कोण x को D की तरह मानेंगे।*

प्रश्न 20. सिद्ध कीजिए $\dfrac{\sin x - \sin 3x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = 2\sin x$

व्यंजक के बाएँ पक्ष को सरल करने के लिए हमें,

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cdot\sin\frac{C-D}{2}$$

तथा $\cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B)\cdot\cos(A-B)$

सूत्रों का प्रयोग करना चाहिए।

हल सिद्ध करना है $\dfrac{\sin x - \sin 3x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = 2\sin x$

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\sin x - \sin 3x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\sin 3x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$= \frac{2\cos\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}}{\cos(x+x)\cos(x-x)} \quad \text{(सूत्र द्वारा)}$$

$$= \frac{2\cos 2x \sin x}{\cos 2x \cos 0}$$

$$= 2\sin x = \text{दायाँ पक्ष}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

> **नोट** *व्यंजक के बाएँ पक्ष को मानक सूत्रों के रूप में बनाने के लिए अंश तथा हर दोनों में से ऋणात्मक चिन्ह उभयनिष्ठ लेते हैं।*

प्रश्न 21. सिद्ध कीजिए $\dfrac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x$

व्यंजक के बाएँ पक्ष को सरल करने के लिए, हम अंश तथा हर दोनों में प्रथम तथा तृतीय पद का जोड़ा बनाएँगे, तत्पश्चात् मानक सूत्रों

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cdot\cos\frac{C-D}{2}$$

तथा $$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cdot\cos\frac{C-D}{2}$$

का प्रयोग करके परिणाम प्राप्त करेंगे।

यहाँ पर हम प्रथम तथा द्वितीय पदों या द्वितीय तथा तृतीय पदों के मध्य जोड़ा नहीं बना सकते हैं क्योंकि प्रथम तथा तृतीय पद को संयुक्त करने के बाद हम कोण $\frac{4x+2x}{2} = 3x$ प्राप्त करते हैं, जिसे हम द्वितीय पद के रूप में पहले से ही रखते हैं, इस प्रकार हम इसे आसानी से सरल कर सकते हैं।

हल सिद्ध करना है $\dfrac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x$

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \frac{(\cos 4x + \cos 2x) + \cos 3x}{(\sin 4x + \sin 2x) + \sin 3x}$$

$$= \frac{2\cos\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2} + \cos 3x}{2\sin\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2} + \sin 3x} \quad \text{(सूत्र द्वारा)}$$

$$= \frac{2\cos 3x\cos x + \cos 3x}{2\sin 3x\cos x + \sin 3x}$$

$$= \frac{\cos 3x(2\cos x + 1)}{\sin 3x(2\cos x + 1)} = \cot 3x = \text{दायाँ पक्ष}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

प्रश्न 22. सिद्ध कीजिए $\cot x\cot 2x - \cot 2x\cot 3x - \cot 3x\cot x = 1$

यहाँ पर हम कोण को $3x = 2x + x$ लिखेंगे, तत्पश्चात् सूत्र,

$$\cot(A+B) = \frac{\cot A\cdot\cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

का प्रयोग करके इसे सरल करेंगे।

हल सिद्ध करना है $\cot x\cot 2x - \cot 2x\cot 3x - \cot 3x\cot x = 1$

अब, $$\cot 3x = \cot(2x + x)$$

$$\frac{\cot 3x}{1} = \frac{\cot 2x\cot x - 1}{\cot 2x + \cot x} \quad \text{(सूत्र द्वारा)}$$

$\Rightarrow$ $\cot 3x\cot 2x + \cot 3x\cot x = \cot 2x\cot x - 1$

$\Rightarrow$ $\cot x\cot 2x - \cot 2x\cot 3x - \cot 3x\cot x = 1$ **इति सिद्धम्**

प्रश्न 23. सिद्ध कीजिए $\tan 4x = \frac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$

$\tan 4x$ को विस्तारित करने के लिए हम सूत्र $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ का दो बार प्रयोग करके हल करेंगे।

हल सिद्ध करना है $\tan 4x = \frac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$

$$\text{बायाँ पक्ष} = \tan 4x = \tan 2(2x) = \frac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x} = \frac{2\cdot\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}{1-\left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right)^2} \quad \text{(सूत्र द्वारा)}$$

$$= \frac{4\tan x}{1-\tan^2 x} \times \frac{(1-\tan^2 x)^2}{(1-\tan^2 x)^2 - 4\tan^2 x}$$

$$= \frac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1+\tan^4 x - 2\tan^2 x - 4\tan^2 x}$$

$$= \frac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x} = \text{दायाँ पक्ष}$$

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 24. सिद्ध कीजिए $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

$\cos 4x$ को विस्तारित करने के लिए, सर्वप्रथम हम सूत्र $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ का तत्पश्चात् सूत्र $\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x$ का प्रयोग करेंगे, जिससे आसानी से हमें आवश्यक परिणाम प्राप्त होगा।

हल सिद्ध करना है $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

बायाँ पक्ष $= \cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2(\sin 2x)^2$ (सूत्र द्वारा)

$= 1 - 2(2\sin x\cos x)^2 = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x =$ दायाँ पक्ष

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 25. सिद्ध कीजिए $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$

$\cos 6x$ को सरल करने के लिए, सर्वप्रथम हम सूत्र $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ का तत्पश्चात् $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ का प्रयोग कर, इसे आसानी से सरल करेंगे।

हल सिद्ध करना है $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$

बायाँ पक्ष $= \cos 6x = \cos 2(3x) = 2\cos^2 3x - 1 = 2(\cos 3x)^2 - 1$

$(\because \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1)$

$= 2(4\cos^3 x - 3\cos x)^2 - 1$ $(\because \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

$= 2(16\cos^6 x + 9\cos^2 x - 24\cos^4 x) - 1$

$= 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1 =$ दायाँ पक्ष

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्नावली 3.4

निर्देश (प्र. सं. 1 - 4) निम्नलिखित समीकरणों का मुख्य तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

(प्र.सं.1 - 4) त्रिकोणमितीय समीकरण के हल जिसके लिए $0 \le x < 2\pi$ होता है, मुख्य हल कहलाता है। इन समीकरणों को हल करने के लिए चतुर्थांश निकाय का प्रयोग करेंगे।

प्रश्न 1. $\tan x = \sqrt{3}$

यदि $\tan x = \tan\alpha$

तब, $x = n\pi + \alpha$ इसका व्यापक हल है।

हल दिया है, $\tan x = \sqrt{3}$

$$\tan x = \tan\frac{\pi}{3}$$

या $\tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3}$ या $\tan\frac{4\pi}{3}$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} \text{ या } \frac{4\pi}{3}$$

यहाँ मुख्य मान $x = \frac{\pi}{3}$ है।

हम जानते हैं कि यदि $\tan x = \tan\alpha$

तब, व्यापक हल $x = n\pi + \alpha$ होता है।

$$\therefore \quad x = n\pi + \frac{\pi}{3} \qquad (n \in Z)$$

प्रश्न 2. $\sec x = 2$

यदि $\cos x = \cos\alpha$

तब, $x = 2n\pi \pm \alpha$ इसका व्यापक हल है। सबसे पहले $\sec x$ को $\cos x$ में परिवर्तित करना होगा, तत्पश्चात् इसे आसानी से हल करेंगे।

हल दिया है, $\sec x = 2$

$$\Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \text{ या } \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ या } \frac{5\pi}{3}$$

यहाँ मुख्य मान $x = \frac{\pi}{3}$ है।

हम जानते हैं कि यदि $\cos x = \cos\alpha$, तब

$x = 2n\pi \pm \alpha$ इसका व्यापक हल होता है।

$$\therefore \quad x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \qquad (n \in Z)$$

प्रश्न 3. $\cot x = -\sqrt{3}$

हल दिया है, $\cot x = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad \tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \quad \tan x = -\tan\dfrac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \quad \tan x = \tan\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$ या $\tan\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$

[$\because$ $\tan x$ द्वितीय तथा चतुर्थ चतुर्थांश में ऋणात्मक होता है तथा $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ और $\tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta$]

$\tan x = \tan\dfrac{5\pi}{6}$ या $\tan\dfrac{11\pi}{6}$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{5\pi}{6}$ या $\dfrac{11\pi}{6}$

यहाँ, मुख्य मान $x = \dfrac{5\pi}{6}$ है।

हम जानते हैं कि यदि $\tan x = \tan\alpha$, तब

व्यापक हल, $x = n\pi + \alpha$ होता है।

$\therefore \quad x = n\pi + \dfrac{5\pi}{6} \quad (n \in Z)$

प्रश्न 4. $\operatorname{cosec} x = -2$

यदि $\sin x = \sin\alpha$, तब $x = n\pi + (-1)^n \cdot \alpha$ इसका व्यापक हल होगा। सर्वप्रथम हम $\operatorname{cosec} x$ को $\sin x$ में परिवर्तित करेंगे। तत्पश्चात् इसको आसानी से हल करेंगे।

हल दिया है, $\operatorname{cosec} x = -2$

$\Rightarrow \quad \sin x = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \sin x = -\sin\dfrac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \quad \sin x = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$ या $\sin\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$

[$\because$ $\sin x$ तृतीय तथा चतुर्थ चतुर्थांश में ऋणात्मक होता है,

या $\quad \sin(\pi + \theta) = \sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$]

$\sin x = \sin\dfrac{7\pi}{6}$ या $\sin\dfrac{11\pi}{6}$

यहाँ मुख्य मान $x = \dfrac{7\pi}{6}$ है।

$\therefore$ व्यापक हल, $x = n\pi + (-1)^n \cdot \alpha$

$\Rightarrow \quad x = n\pi + (-1)^n \cdot \dfrac{7\pi}{6} \quad (n \in Z)$

नोट (प्र. सं. 1 - 4) *जब हम व्यापक हल को लिखते हैं, तब हमें मुख्य हलों के मध्य में से न्यूनतम मान का चयन करना चाहिए।*

निर्देश (प्र. सं. 5 - 9) निम्नलिखित प्रत्येक समीकरणों का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 5. $\cos 4x = \cos 2x$

सर्वप्रथम हम व्यंजक के दाएँ पक्ष से $\cos 2x$ को उसके बाएँ पक्ष में स्थानांतरित करेंगे। तत्पश्चात् सूत्र $\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\cdot\sin\frac{C-D}{2}$ का प्रयोग करेंगे तथा आसानी से इस समीकरण को हल करेंगे।

हल दिया है, $\cos 4x = \cos 2x$

$\Rightarrow \quad \cos 4x - \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \quad -2\sin\frac{4x+2x}{2}\sin\frac{4x-2x}{2} = 0$

$\Rightarrow \quad \sin 3x \sin x = 0$

$\Rightarrow \quad \sin 3x = 0$ या $\sin x = 0$

$\Rightarrow \quad 3x = n\pi$ या $x = n\pi$

$\Rightarrow \quad x = \frac{n\pi}{3}$ या $x = n\pi \qquad (n \in Z)$

> **नोट** *जब भी हम त्रिकोणमितीय समीकरण को हल करते हैं। हमें हमेशा याद रखना चाहिए कि सूत्र $\cos x = \cos\alpha$ के पदों को हम केवल तभी उपयोग कर सकते हैं जब व्यंजक का एक पक्ष चर तथा दूसरा पक्ष अचर हो।*

प्रश्न 6. $\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$

सर्वप्रथम, हम प्रथम दो पदों को सूत्र

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cdot\cos\frac{C-D}{2}$$

का प्रयोग करके संयुक्त करेंगे। तत्पश्चात् इसे सरल करेंगे।

हल दिया है, $\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \quad 2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} - \cos 2x = 0$

$$\left(\because \cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\right)$$

$\Rightarrow \quad 2\cos 2x\cos x - \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \quad \cos 2x(2\cos x - 1) = 0$

$\Rightarrow \quad \cos 2x = 0$ या $2\cos x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ या $\cos x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ या $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ या $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \qquad (n \in Z)$

प्रश्न 7. $\sin 2x + \cos x = 0$

हल दिया है, $\sin 2x + \cos x = 0$

$\Rightarrow \quad 2\sin x \cos x + \cos x = 0 \quad (\because \sin 2x = 2\sin x \cos x)$

$\Rightarrow \quad \cos x (2\sin x + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad \cos x = 0$ या $\sin x = -\frac{1}{2}$

जब $\cos x = 0$

$\Rightarrow \quad x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

तथा जब $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \sin x = -\sin\frac{\pi}{6}$

$\sin x = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \quad [\because \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta]$

$\sin x = \sin\frac{7\pi}{6}$

$\Rightarrow \quad x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6} \quad (n \in Z)$

> **नोट** *व्यंजक में उभयनिष्ठ पदों को कभी भी समाप्त नहीं करना चाहिए, जो गुणनफल के रूप में होते हैं, इससे आपको हलों की संख्या की हानि हो सकती है।*

प्रश्न 8. $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

हल दिया है, $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

$1 + \tan^2 2x = 1 - \tan 2x \quad (\because \sec^2 x - \tan^2 x = 1)$

$\Rightarrow \quad \tan^2 2x + \tan 2x = 0$

$\Rightarrow \quad \tan 2x \ (\tan 2x + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad \tan 2x = 0$ या $\tan 2x = -1$

जब $\tan 2x = 0$, तब $2x = n\pi$

$\Rightarrow \quad x = \frac{n\pi}{2}$

तथा जब $\tan 2x = -1$, तब $\tan 2x = -\tan\frac{\pi}{4}$

$\tan 2x = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{3\pi}{4} \quad [\because \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta]$

$\therefore \quad 2x = n\pi + \frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$

प्रश्न 9. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

हल दिया है, $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

$\Rightarrow \quad (\sin 5x + \sin x) + \sin 3x = 0$

$\Rightarrow \quad 2\sin\frac{5x+x}{2}\cos\frac{5x-x}{2}+\sin 3x=0$

$\left[\because \sin C+\sin D=2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)\right]$

$\Rightarrow \quad 2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x=0$

$\Rightarrow \quad \sin 3x(2\cos 2x+1)=0$

$\sin 3x=0$ या $2\cos 2x+1=0$

जब $\sin 3x=0$

तब, $3x=n\pi \Rightarrow x=\frac{n\pi}{3}$

तथा जब $2\cos 2x+1=0$

तब, $\cos 2x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x=-\cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad \cos 2x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ $[\because \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta]$

$\Rightarrow \quad \cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$

यहाँ पर, प्रथम पद में हम सबसे पहले सूत्र

$2\cos A\cdot\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$ का प्रयोग करेंगे।

तत्पश्चात् सूत्र $\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cdot\cos\frac{C-D}{2}$ का प्रयोग कर इसे सरल करेंगे।

हल सिद्ध करना है, $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$

बायाँ पक्ष $=2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$

$=\cos\left(\frac{9\pi}{13}+\frac{\pi}{13}\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{13}-\frac{\pi}{13}\right)+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}$ (सूत्र द्वारा)

$=\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}$

$=\left(\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}\right)+\left(\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}\right)$

$=2\cos\frac{\frac{10\pi}{13}+\frac{3\pi}{13}}{2}\cos\frac{\frac{10\pi}{13}-\frac{3\pi}{13}}{2}+2\cos\frac{\frac{8\pi}{13}+\frac{5\pi}{13}}{2}\cos\frac{\frac{8\pi}{13}-\frac{5\pi}{13}}{2}$

(सूत्र द्वारा)

$= 2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{7\pi}{26} + 2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{26} = 0 + 0 = 0$ = दायाँ पक्ष $\left(\because \cos\frac{\pi}{2} = 0\right)$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

नोट *याद रखें कि,* $\cos\frac{10\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} \neq \cos\frac{13\pi}{13}$

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए $(\sin 3x + \sin x)\sin x + (\cos 3x - \cos x)\cos x = 0$

हल सिद्ध करना है, $(\sin 3x + \sin x)\sin x + (\cos 3x - \cos x)\cos x = 0$

$\because$ बायाँ पक्ष $= (\sin 3x + \sin x)\sin x + (\cos 3x - \cos x)\cos x$

$$= 2\sin\frac{3x + x}{2}\cos\frac{3x - x}{2}\sin x - 2\sin\frac{3x + x}{2}\sin\frac{3x - x}{2}\cos x$$ (सूत्र द्वारा)

$= 2\sin 2x\cos x\sin x - 2\sin 2x\sin x\cos x = 0$ = दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\cos^2\frac{x + y}{2}$

हल सिद्ध करना है, $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\cos^2\frac{x + y}{2}$

बायाँ पक्ष $= (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$

$$= \left(2\cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2}\right)^2 + \left(2\cos\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2}\right)^2$$ (सूत्र द्वारा)

$$= 4\cos^2\frac{x + y}{2}\cos^2\frac{x - y}{2} + 4\cos^2\frac{x + y}{2}\sin^2\frac{x - y}{2}$$

$$= 4\cos^2\frac{x + y}{2}\left(\cos^2\frac{x - y}{2} + \sin^2\frac{x - y}{2}\right)$$

$$= 4\cos^2\frac{x + y}{2}$$ $(\because \cos^2 x + \sin^2 x = 1)$

= दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए $(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\sin^2\frac{x - y}{2}$

हल सिद्ध करना है, $(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\sin^2\frac{x - y}{2}$

$\because$ बायाँ पक्ष $= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$

$$= \left(-2\sin\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2}\right)^2 + \left(2\cos\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2}\right)^2$$ (सूत्र द्वारा)

$$= 4\sin^2\frac{x + y}{2}\sin^2\frac{x - y}{2} + 4\cos^2\frac{x + y}{2}\sin^2\frac{x - y}{2}$$

$$= 4\sin^2\frac{x - y}{2}\left(\sin^2\frac{x + y}{2} + \cos^2\frac{x + y}{2}\right)$$

$= 4\sin^2 \frac{x-y}{2}$ = दायाँ पक्ष $(\because \cos^2 x + \sin^2 x = 1)$

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

नोट *यह याद रखना चाहिए कि,* $\sin^2 A \neq \sin A^2$

अर्थात् $\left(\sin \frac{x+y}{2}\right)^2 \neq \sin \frac{(x+y)^2}{4}$

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4\cos x \cos 2x \sin 4x$

गणना को आसान बनाने के लिए, सर्वप्रथम हम $7x + x = 8x$ तथा $5x + 3x = 8x$ के युग्म प्राप्त करेंगे। तत्पश्चात् सूत्र

$$\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

का प्रयोग करेंगे।

हल सिद्ध करना है, $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4\cos x \cos 2x \sin 4x$

बायाँ पक्ष $= \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$

$= (\sin 7x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 3x)$

$= 2\sin\frac{7x+x}{2}\cos\frac{7x-x}{2} + 2\sin\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2}$ (सूत्र द्वारा)

$= 2\sin 4x \cos 3x + 2\sin 4x \cos x$

$= 2\sin 4x(\cos 3x + \cos x)$

$= 2\sin 4x \, 2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}$ (सूत्र द्वारा)

$= 4\sin 4x \cos 2x \cos x$ = दायाँ पक्ष

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

नोट *याद रखें कि* $\sin 7x + \sin x \neq \sin 8x$

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए $\frac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)} = \tan 6x$

हल सिद्ध करना है, $\frac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)} = \tan 6x$

बायाँ पक्ष $= \frac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)}$

$$= \frac{2\sin\frac{7x+5x}{2}\cos\frac{7x-5x}{2} + 2\sin\frac{9x+3x}{2}\cos\frac{9x-3x}{2}}{2\cos\frac{7x+5x}{2}\cos\frac{7x-5x}{2} + 2\cos\frac{9x+3x}{2}\cos\frac{9x-3x}{2}}$$

(सूत्र द्वारा)

$$= \frac{2\sin 6x\cos x + 2\sin 6x\cos 3x}{2\cos 6x\cos x + 2\cos 6x\cos 3x}$$

$$= \frac{2\sin 6x(\cos x + \cos 3x)}{2\cos 6x(\cos x + \cos 3x)} = \tan 6x = \text{दायाँ पक्ष}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 4\sin x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

हल सिद्ध करना है, $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 4\sin x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

बायाँ पक्ष $= \sin 3x + \sin 2x - \sin x = (\sin 3x - \sin x) + \sin 2x$

$$= 2\cos\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2} + \sin 2x$$

$$\left(\because \sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\right)$$

$$= 2\cos 2x\sin x + 2\sin x\cos x \qquad (\because \sin 2x = 2\sin x\cos x)$$

$$= 2\sin x(\cos 2x + \cos x) = 2\sin x \, 2\cos\frac{2x+x}{2}\cos\frac{2x-x}{2}$$

$$\left(\because \cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\right)$$

$$= 4\sin x\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

निर्देश (प्र. सं. 8 - 10) **निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न में $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ तथा $\tan\frac{x}{2}$ ज्ञात कीजिए।**

यहाँ, हमारे पास $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ तथा $\tan\frac{x}{2}$ के मानों को ज्ञात करने के लिए दो विधियाँ हैं

(i) सर्वसमिका $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ का प्रयोग करके या

(ii) सूत्र $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ का प्रयोग करके

x को $\frac{x}{2}$ से स्थानांतरित करके इसे सरल करेंगे। इसके पश्चात् चतुर्थांश निकाय का उपयोग करते हुए चिन्हों को लागू करेंगे।

प्रश्न 8. $\tan x = -\frac{4}{3}$, x **द्वितीय चतुर्थांश में है।**

हल $\tan x = -\frac{4}{3}$

दिया है, कि x द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, अर्थात् $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$$\because \qquad \tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = -\frac{4}{3}$$

$\therefore \quad 3\tan\frac{x}{2} = -2\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad 3\tan\frac{x}{2} = -2 + 2\tan^2\frac{x}{2}$

$\Rightarrow \quad 2\tan^2\frac{x}{2} - 3\tan\frac{x}{2} - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad 2\tan^2\frac{x}{2} - (4-1)\tan\frac{x}{2} - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad 2\tan\frac{x}{2}\left(\tan\frac{x}{2} - 2\right) + 1\left(\tan\frac{x}{2} - 2\right) = 0$

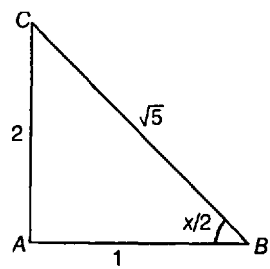
$\Rightarrow \quad \left(2\tan\frac{x}{2} + 1\right)\left(\tan\frac{x}{2} - 2\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \tan\frac{x}{2} = 2$ या $\tan\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$

$\because \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

अर्थात् $\frac{x}{2}$ प्रथम चतुर्थांश में होगा।

इस प्रकार, $\tan\frac{x}{2} = 2 = \frac{2}{1} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{AB}$



पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर,

$$(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2$$

$\Rightarrow \quad (BC)^2 = 4 + 1 = 5$

$\Rightarrow \quad BC = \sqrt{5}$

अब, $\sin\frac{x}{2} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \quad \cos\frac{x}{2} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

> **नोट** *विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि धनात्मक तथा ऋणात्मक चिन्हों का सावधानीपूर्वक प्रयोग करने के लिए चतुर्थांश को ध्यान में रखें।*

प्रश्न 9. $\cos x = -\frac{1}{3}$, x **तृतीय चतुर्थांश में है।**

हल $\cos x = -\frac{1}{3}$

दिया है, कि x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है।

अर्थात् $\quad \pi < x < \frac{3\pi}{2}$

($\because$ तृतीय चतुर्थांश में θ, π तथा $3\pi/2$ के मध्य स्थित होता है)

सूत्र से, $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$

$\Rightarrow \quad 2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x = 1 - \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad 2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \qquad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \qquad \cos\frac{x}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

अब, $\quad \pi < x < \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$

अर्थात् $\frac{x}{2}$ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित होगा। इस प्रकार, $\cos\frac{x}{2}$ ऋणात्मक होगा।

$\Rightarrow \qquad \cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

अब, $\qquad \sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos^2\frac{x}{2}$

$$\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$\Rightarrow \qquad \sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad$ ($\because$ $\frac{x}{2}$ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है)

$\Rightarrow \qquad \tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{2}$

प्रश्न 10. $\sin x = \frac{1}{4}$, x **द्वितीय चतुर्थांश में है।**

हल $\because \sin x = \frac{1}{4}$

दिया है, कि x द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

अर्थात् $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$\because \qquad \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad \therefore \quad \frac{1}{4} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow \quad 1+\tan^2\frac{x}{2} = 8\tan\frac{x}{2} \qquad \Rightarrow \quad \tan^2\frac{x}{2} - 8\tan\frac{x}{2} + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad \tan\frac{x}{2} = \frac{8\pm\sqrt{64-4}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\frac{x}{2} = \frac{8\pm 2\sqrt{15}}{2}$

$\Rightarrow \qquad \tan\frac{x}{2} = 4\pm\sqrt{15}$

$\because \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

अर्थात् $\frac{x}{2}$ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है।

$\Rightarrow \qquad \tan\frac{x}{2} = 4+\sqrt{15}$

अब, $\sec^2\frac{x}{2} = 1 + \tan^2\frac{x}{2} = 1 + (4+\sqrt{15})^2 = 1 + 16 + 15 + 8\sqrt{15}$

$\Rightarrow \quad \sec^2\frac{x}{2} = 32 + 8\sqrt{15} \quad \Rightarrow \quad \sec^2\frac{x}{2} = 8(4+\sqrt{15})$

$\Rightarrow \quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{8(4+\sqrt{15})} \times \frac{4-\sqrt{15}}{4-\sqrt{15}}$

$\Rightarrow \quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{(4-\sqrt{15})}{8} \times \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{8-2\sqrt{15}}{8}$

$\Rightarrow \quad \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{15}}{8}}$

अब, $\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos^2\frac{x}{2} = 1 - \frac{8-2\sqrt{15}}{8}$

$\Rightarrow \quad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{8-8+2\sqrt{15}}{8}$

$\Rightarrow \quad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{15}}{8} \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{\sqrt{15}}}{2}$ $\left(\because \frac{x}{2} \text{ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है}\right)$