

अध्याय 4

गणितीय आगमन का सिद्धांत

MATHEMATICAL INDUCTION

प्रश्नावली

निर्देश (प्र. सं. 1-18) सभी $n \in N$ के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए।

(प्र. सं. 1-18) प्रश्नों का हल तीन चरणों में बाँटा गया है। चरण I में, दाएँ पक्ष में $n=1$ रखते हैं। यदि बाएँ पक्ष में एक ही पद है, तब यह $n=1$ के लिए सत्य है। दूसरे चरण में, $n=k$ रखने पर सत्य मानते हैं। समी (i) जैसा तीसरे चरण में, $n=k+1$ के लिए अंतिम पद में अगला पद जोड़ते हैं और समी (i) का प्रयोग कर हल करते हैं जब तक यह $n=k+1$ के प्रत्येक मान के लिए सत्य न हो जाए।

प्रश्न 1. $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

चरण I. $n=1$ के लिए,

$$P(1): \frac{3^1 - 1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{k-1} = \frac{3^k - 1}{2}$... (i)

चरण III. $n=k+1$ के लिए,

$$\begin{aligned} (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{k-1}) + 3^k &= \frac{3^k - 1}{2} + \frac{3^k}{1} && \text{[समी (i) से]} \\ &= \frac{3^k - 1 + 2 \times 3^k}{2} = \frac{3 \times 3^k - 1}{2} = \frac{3^{k+1} - 1}{2} \end{aligned}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

चरण I. $n=1$ के लिए,

$$P(1): \left[\frac{1(1+1)}{2} \right]^2 = \left(\frac{1 \times 2}{2} \right)^2 = 1^2 = 1 = 1^3$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

$$\text{अर्थात्} \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 \quad \dots(i)$$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए, $(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + k^3) + (k+1)^3$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{(k+1)^3}{1} = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \end{aligned} \quad [\text{समी (i) से}]$$

अंश भाग में $(k+1)^2$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$\begin{aligned} &= \frac{(k+1)^2 [k^2 + 4(k+1)]}{4} = \frac{(k+1)^2 (k^2 + 4k + 4)}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4} = \frac{(k+1)^2 [(k+1) + 1]^2}{4} \\ &= \left[\frac{(k+1) \{(k+1) + 1\}}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 3. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{2n}{n+1}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

$$\text{अर्थात्} \quad P(n): 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{2n}{n+1}$$

$$\text{अर्थात्} \quad P(n): 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2n}{n+1}$$

$$\left[\because \text{प्राकृत संख्याओं का योग} = \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

चरण I. $n = 1$ के लिए,

$$P(1): \frac{2 \times 1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

$$\text{अर्थात्} \quad 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2k}{k+1} \quad \dots(ii)$$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$\begin{aligned} &\left[1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{2}{k(k+1)} \right] + \frac{2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{2k}{k+1} + \frac{2}{(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

[समी (i) से]

$$\begin{aligned}
&= \frac{2k(k+2)+2}{(k+1)(k+2)} = \frac{2[k^2+2k+1]}{(k+1)(k+2)} \quad (\text{अंश भाग में 2 उभयनिष्ठ लेने पर}) \\
&= \frac{2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \quad [\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2] \\
&= \frac{2(k+1)}{k+2} = \frac{2(k+1)}{(k+1)+1}
\end{aligned}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

नोट यदि बाएँ पक्ष का अंतिम पद श्रेणी के रूप में दिया हुआ है जैसे प्रश्न 3 में है, तब सर्वप्रथम इसे हम सरल रूप में लिखते हैं। उचित सूत्र का प्रयोग कर श्रेणी को हल करने की कोशिश करते हैं।

प्रश्न 4. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n) : 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

चरण I. $n=1$ के लिए, $P(1) : \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{4} = 1 \cdot 2 \cdot 3$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1)(k+2)$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \quad \dots(i)$$

चरण III. $n=k+1$ के लिए,

$$\begin{aligned}
&[1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1)(k+2)] + (k+1)(k+2)(k+3) \\
&= \left[\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \right] + (k+1)(k+2)(k+3) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}
\end{aligned}$$

[समी (i) से]

अंश भाग में $(k+1)(k+2)(k+3)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$\begin{aligned}
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2][(k+1)+3]}{4}
\end{aligned}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 5. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^n = \frac{(2n-1) 3^{n+1} + 3}{4}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^n = \frac{(2n-1) 3^{n+1} + 3}{4}$

चरण I. $n = 1$ के लिए,

$$P(1): \frac{(2 \cdot 1 - 1) 3^{1+1} + 3}{4} = \frac{3^2 + 3}{4} = \frac{9 + 3}{4} = \frac{12}{4}$$

$\Rightarrow$

$$3 = 1 \cdot 3$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + k \cdot 3^k = \frac{(2k-1) 3^{k+1} + 3}{4} \quad \dots(i)$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$\begin{aligned} & (1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + k \cdot 3^k) + (k+1) 3^{k+1} \\ &= \frac{(2k-1) 3^{k+1} + 3}{4} + (k+1) 3^{k+1} \quad \text{[समी (i) से]} \\ &= \frac{(2k-1) 3^{k+1} + 3 + 4(k+1) 3^{k+1}}{4} \end{aligned}$$

अंश भाग के प्रथम तथा अंतिम पद में 3^{k+1} उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= \frac{3^{k+1}(2k-1+4k+4)+3}{4} = \frac{3^{k+1}(6k+3)+3}{4}$$

अंश भाग के प्रथम पद में 3 उभयनिष्ठ लेने पर,

$$\begin{aligned} &= \frac{3^{k+1} \cdot 3(2k+1)+3}{4} = \frac{3^{k+1+1}(2k+2-1)+3}{4} \\ &= \frac{\{2(k+1)-1\} 3^{k+1+1} + 3}{4} \end{aligned}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 6. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \right]$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

चरण I. $n = 1$ के लिए, $P(1): \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 1 \cdot 2$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \quad \dots(ii)$

$$\begin{aligned}\text{चरण III. } n = k + 1 \text{ के लिए, } [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1)] + (k+1)(k+2) \\ = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \quad [\text{समी (i) से}] \\ = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3}\end{aligned}$$

अंश भाग में $(k+1)(k+2)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

$$\text{प्रश्न 7. } 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

$$\text{अर्थात् } P(n): 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$$

चरण I. $n=1$ के लिए,

$$\frac{1(4 \times 1^2 + 6 \times 1 - 1)}{3} = \frac{4 + 6 - 1}{3} = \frac{9}{3} = 3 = 1 \cdot 3$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

$$\text{अर्थात् } 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + (2k-1)(2k+1) = \frac{k(4k^2 + 6k - 1)}{3} \quad \dots (i)$$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$\begin{aligned}[1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + (2k-1)(2k+1)] + (2k-1+2)(2k+1+2) \\ = \frac{k(4k^2 + 6k - 1)}{3} + (2k+1)(2k+3) \quad [\text{समी (i) से}] \\ = \frac{k(4k^2 + 6k - 1) + 3(2k+1)(2k+3)}{3} \\ = \frac{4k^3 + 6k^2 - k + 12k^2 + 24k + 9}{3} = \frac{4k^3 + 18k^2 + 23k + 9}{3}\end{aligned}$$

अब, शेषफल प्रमेय द्वारा गुणनखंड करने पर,

$$\begin{aligned}= \frac{(k+1)(4k^2 + 14k + 9)}{3} \quad \frac{(k+1)(4k^2 + 8k + 4 + 6k + 5)}{3} \\ = \frac{(k+1)[4(k^2 + 2k + 1) + 6k + 6 - 1]}{3} \\ = \frac{(k+1)[4(k+1)^2 + 6(k+1) - 1]}{3}\end{aligned}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

नोट विद्यार्थी को उत्तर के अनुसार व्यवस्था कर लेनी चाहिए।

प्रश्न 8. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n-1) 2^{n+1} + 2$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n-1) 2^{n+1} + 2$

चरण I. $n=1$ के लिए, $P(1): (1-1) 2^{1+1} + 2 = 0 + 2 = 2 = 1 \cdot 2$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k = (k-1) 2^{k+1} + 2 \quad \dots(i)$

चरण III. $n=k+1$ के लिए,

$$\begin{aligned} & (1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k) + (k+1) 2^{k+1} \\ &= [(k-1) 2^{k+1} + 2] + (k+1) 2^{k+1} \quad \text{[समी (i) से]} \\ &= (k-1) 2^{k+1} + 2 + (k+1) 2^{k+1} \end{aligned}$$

प्रथम तथा अंतिम पद में 2^{k+1} उभयनिष्ठ लेने पर,

$$\begin{aligned} &= 2^{k+1} (k-1 + k+1) + 2 = 2^{k+1} \times 2k + 2 \\ &= 2^{(k+1)+1} k + 2 = [(k+1)-1] 2^{(k+1)+1} + 2 \end{aligned}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 9. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

चरण I. $n=1$ के लिए, $P(1): 1 - \frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k} \quad \dots(i)$

चरण III. $n=k+1$ के लिए,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} \right) + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{[समी (i) से]} \\ &= 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k \cdot 2} \end{aligned}$$

अंतिम दो पदों में $\frac{1}{2^k}$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= 1 - \frac{1}{2^k} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 10. $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$

चरण I. $n=1$ के लिए, $\frac{1}{6 \times 1 + 4} = \frac{1}{10} = \frac{1}{2 \cdot 5}$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{k}{6k+4} \quad \dots(i)$

चरण III. $n=k+1$ के लिए,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} \right] + \left[\frac{1}{(3k-1+3)(3k+2+3)} \right] \\ &= \frac{k}{6k+4} + \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} \quad \text{[समी (i) से]} \\ &= \frac{k}{2(3k+2)} + \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} \\ &= \frac{k(3k+5)+2}{2(3k+2)(3k+5)} = \frac{3k^2+5k+2}{2(3k+2)(3k+5)} \\ &= \frac{3k^2+3k+2k+2}{2(3k+2)(3k+5)} = \frac{3k(k+1)+2(k+1)}{2(3k+2)(3k+5)} \\ &= \frac{(k+1)(3k+2)}{2(3k+2)(3k+5)} = \frac{k+1}{2(3k+3+2)} \\ &= \frac{k+1}{2[3(k+1)+2]} = \frac{k+1}{6(k+1)+4} \end{aligned}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 11. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
 $= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

चरण I. $n=1$ के लिए,

$$\frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{4}{4 \times 2 \times 3} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$... (i)

चरण III. $n = k+1$ के लिए,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \right] \\ & \quad + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)(k+2+1)} \\ &= \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \quad [\text{समी (i) से}] \\ &= \frac{k(k+3)^2 + 4}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k(k^2 + 9 + 6k) + 4}{4(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{k^3 + 6k^2 + 9k + 4}{4(k+1)(k+2)(k+3)} \end{aligned}$$

शेषफल प्रमेय द्वारा अंश का गुणनखंड करने पर,

$$\begin{aligned} &= \frac{(k+1)(k^2 + 5k + 4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k^2 + 5k + 4}{4(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{k^2 + 4k + k + 4}{4(k+2)(k+3)} = \frac{k(k+4) + (k+4)}{4(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)[(k+1)+3]}{4[(k+1)+1][(k+1)+2]} \end{aligned}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 12. $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

चरण I. $n = 1$ के लिए,

अर्थात् $P(1) = \frac{a(r^1 - 1)}{r - 1} = a$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{k-1} = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1}$... (i)

चरण III. $n = k+1$ के लिए,

$(a + ar + ar^2 + \dots + ar^{k-1}) + ar^{k+1-1} = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^k$ [समी (i) से]

$$= \frac{a(r^k - 1) + ar^k(r - 1)}{r - 1}$$

अंश भाग में a उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= \frac{a(r^k - 1 + r^k \cdot r - r^k)}{r - 1} = \frac{a(r^k - 1 + r^{k+1} - r^k)}{r - 1} = \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1}$$

इसलिए, कथन $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 13. $\left(1 + \frac{3}{1}\right)\left(1 + \frac{5}{4}\right)\left(1 + \frac{7}{9}\right) \dots \left(1 + \frac{2n+1}{n^2}\right) = (n+1)^2$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n) : \left(1 + \frac{3}{1}\right)\left(1 + \frac{5}{4}\right)\left(1 + \frac{7}{9}\right) \dots \left(1 + \frac{2n+1}{n^2}\right) = (n+1)^2$

चरण I. $n = 1$ के लिए, $P(1) = (1+1)^2 = 2^2 = 4 = \left(1 + \frac{3}{1}\right)$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $\left\{\left(1 + \frac{3}{1}\right)\left(1 + \frac{5}{4}\right)\left(1 + \frac{7}{9}\right) \dots \left(1 + \frac{2k+1}{k^2}\right)\right\} = (k+1)^2 \quad \dots (i)$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$\begin{aligned} & \left\{\left(1 + \frac{3}{1}\right)\left(1 + \frac{5}{4}\right)\left(1 + \frac{7}{9}\right) \dots \left(1 + \frac{2k+1}{k^2}\right)\right\} \left\{1 + \frac{2k+1+2}{(k+1)^2}\right\} \\ &= (k+1)^2 \left[1 + \frac{2k+3}{(k+1)^2}\right] \quad \text{[समी (i) से]} \\ &= (k+1)^2 \left[\frac{(k+1)^2 + 2k+3}{(k+1)^2}\right] = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 \\ &= (k+2)^2 = [(k+1) + 1]^2 \quad [\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2] \end{aligned}$$

इसलिए, कथन $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 14. $\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = (n+1)$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n) : \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = (n+1)$

चरण I. $n = 1$ के लिए, $P(1) : 1 + 1 = 1 + \frac{1}{1}$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{k}\right) = k + 1 \quad \dots (i)$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$\left[\left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{k}\right) \right] \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = (k+1) \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) \quad [\text{समी (i) से}]$$

$$= (k+1) \left(\frac{k+1+1}{k+1}\right) = (k+1) + 1$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 15. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

चरण I. $n = 1$ के लिए,

अर्थात् $P(1): \frac{1(2-1)(2+1)}{3} = \frac{1 \times 1 \times 3}{3} = 1 = 1^2$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} \quad \dots (i)$

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$[1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2] + (2k-1+2)^2$$

$$= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 \quad [\text{समी (i) से}]$$

$$= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3}$$

अंश भाग में $(2k+1)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= \frac{(2k+1)[k(2k-1) + 3(2k+1)]}{3}$$

$$= \frac{(2k+1)(2k^2 - k + 6k + 3)}{3} = \frac{(2k+1)(2k^2 + 5k + 3)}{3}$$

मध्य पद विभक्त कर अंश का गुणनखंड करने पर,

$$= \frac{(2k+1)(2k^2 + 2k + 3k + 3)}{3}$$

$$= \frac{(2k+1)[2k(k+1) + 3(k+1)]}{3} = \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(2k+2-1)(2k+2+1)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 16. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

चरण I. $n=1$ के लिए, $\frac{1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{4} = \frac{1}{1 \cdot 4}$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1} \quad \dots(i)$

चरण III. $n=k+1$ के लिए,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \right] + \frac{1}{(3k-2+3)(3k+1+3)} \\ &= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} \quad [\text{समी (i) से}] \\ &= \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)} \end{aligned}$$

मध्य पद विभक्त कर अंश का गुणनखंड करने पर,

$$\begin{aligned} &= \frac{3k^2+3k+k+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3k(k+1)+1(k+1)}{(3k+1)(3k+4)} \\ &= \frac{(k+1)(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+3+1} = \frac{k+1}{3(k+1)+1} \end{aligned}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 17. $\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{3(2n+3)}$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{3(2n+3)}$

चरण I. $n=1$ के लिए, $P(1): \frac{1}{3(2 \times 1 + 3)} = \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{3 \cdot 5}$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{3(2k+3)} \quad \dots(i)$

चरण III. $n=k+1$ के लिए,

$$\left[\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \right] + \frac{1}{(2k+1+2)(2k+3+2)}$$

$$= \frac{k}{3(2k+3)} + \frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{k(2k+5)+3}{3(2k+3)(2k+5)} = \frac{2k^2+5k+3}{3(2k+3)(2k+5)}$$

मध्य पद विभक्त कर अंश का गुणनखंड करने पर,

$$= \frac{2k^2+2k+3k+3}{3(2k+3)(2k+5)} = \frac{2k(k+1)+3(k+1)}{3(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{(k+1)(2k+3)}{3(2k+3)(2k+5)} = \frac{k+1}{3(2k+2+3)} = \frac{k+1}{3(2(k+1)+3)}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 18. $1 + 2 + 3 + \dots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$

चरण I. $n = 1$ के लिए,

$$1 < \frac{1}{8}(2 \cdot 1 + 1)^2 \Rightarrow 1 < \frac{1}{8} \times 3^2 \Rightarrow 1 < \frac{9}{8}$$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $1 + 2 + 3 + \dots + k < \frac{1}{8}(2k+1)^2$... (i)

चरण III. $n = k+1$ के लिए,

$$(1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k+1) < \frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1) \quad [\text{समी (i) से}]$$

$$= \frac{(2k+1)^2}{8} + \frac{k+1}{1} = \frac{(2k+1)^2 + 8k+8}{8} = \frac{4k^2+1+4k+8k+8}{8}$$

$$= \frac{4k^2+12k+9}{8} = \frac{(2k+3)^2}{8} = \frac{(2k+2+1)^2}{8} = \frac{[2(k+1)+1]^2}{8}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) < \frac{[2(k+1)+1]^2}{8}$$

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 19. $n(n+1)(n+5)$ संख्या 3 का एक गुणज है।

चरण I में $n = 1$ रखने पर प्राप्त परिणाम 3 का गुणज होना चाहिए। **चरण II** में (जोकि शर्त वाला गुण है), $n = k$ रखते हैं तथा कोई शून्येतर अचर λ (माना) 3 के गुणज के समान रखते हैं। **चरण III** में $n = k+1$ रखते हैं और इसे तब तक हल करते हैं जब तक यह 3 का गुणज न हो जाए।

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): n(n+1)(n+5)$, संख्या 3 का एक गुणज है।

चरण I. $n=1$ के लिए,

$$1(1+1)(1+5) = 1 \times 2 \times 6 = 12 = 3 \times 4$$

जो संख्या 3 का गुणज है, जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $k(k+1)(k+5) = 3\lambda$

$$k(k^2 + 5k + k + 5) = 3\lambda$$

$$k^3 + 6k^2 + 5k = 3\lambda$$

...(i)

चरण III. $n=k+1$ के लिए,

$$(k+1)(k+1+1)(k+1+5)$$

$$= (k+1)(k+2)(k+6) = (k^2 + 2k + k + 2)(k+6)$$

$$= (k^2 + 3k + 2)(k+6) = k^3 + 6k^2 + 3k^2 + 18k + 2k + 12$$

$$= (k^3) + 9k^2 + 20k + 12$$

$$= (3\lambda - 6k^2 - 5k) + 9k^2 + 20k + 12$$

[समी (i) से]

$$= 3\lambda + 3k^2 + 15k + 12 = 3(\lambda + k^2 + 5k + 4)$$

जोकि संख्या 3 का गुणज है।

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 20. $10^{2n-1} + 1$, संख्या 11 से भाज्य है।

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 10^{2n-1} + 1$, 11 से भाज्य है।

चरण I. $n=1$ के लिए, $10^{2 \times 1 - 1} + 1 = 10^{2-1} + 1 = 10^1 + 1 = 10 + 1 = 11 \times 1$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n=k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $10^{2k-1} + 1 = 11\lambda$

...(i)

चरण III. $n=k+1$ के लिए,

$$10^{2(k+1)-1} + 1 = 10^{2k+2-1} + 1 = 10^{(2k-1)+2} + 1$$

$$= 10^{2k-1} 10^2 + 1 = (11\lambda - 1) 100 + 1$$

[समी (i) से]

$$= 11\lambda \times 100 - 100 + 1$$

$$= 11\lambda \times 100 - 99 = 11(100\lambda - 9)$$

जोकि संख्या 11 का गुणज है।

इसलिए, कथन $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 21. $x^{2n} - y^{2n}, x + y$ से भाज्य है।

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): x^{2n} - y^{2n}, x + y$ से भाज्य है।

चरण I. $n = 1$ के लिए, $P(1): x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

जो $(x + y)$ से भाज्य है, जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $x^{2k} - y^{2k} = \lambda(x + y)$... (i)

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$\begin{aligned} x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)} &= x^{2k+2} - y^{2k+2} = x^{2k} x^2 - y^{2k} y^2 \\ &= [\lambda(x + y) + y^{2k}] x^2 - y^{2k} y^2 \quad \text{[समी (i) से]} \\ &= \lambda(x + y) x^2 + y^{2k} x^2 - y^{2k} y^2 \\ &= \lambda(x + y) x^2 + y^{2k} (x^2 - y^2) \\ &= \lambda(x + y) x^2 + y^{2k} (x - y)(x + y) \\ &= (x + y) [\lambda x^2 + y^{2k} (x - y)] \end{aligned}$$

जोकि $(x + y)$ का गुणज है अर्थात् $(x + y)$ से भाज्य है।

इसलिए, कथन $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 22. $3^{2n+2} - 8n - 9$ संख्या 8 से भाज्य है।

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 3^{2n+2} - 8n - 9$ संख्या 8 से भाज्य है।

चरण I. $n = 1$ के लिए,

अर्थात् $P(1): 3^{2 \times 1 + 2} - 8 \times 1 - 9 = 3^4 - 8 - 9 = 81 - 17 = 64 = 8 \times 8$

जोकि संख्या 8 से भाज्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $3^{2k+2} - 8k - 9 = 8\lambda$... (i)

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9 &= 3^{2k+2+2} - 8k - 8 - 9 = 3^{2k+2} 3^2 - 8k - 17 \\ &= (8\lambda + 8k + 9) 3^2 - 8k - 17 \quad \text{[समी (i) से]} \\ &= (8\lambda + 8k + 9) 9 - 8k - 17 \\ &= 72\lambda + 72k + 81 - 8k - 17 \\ &= 72\lambda + 64k + 64 = 8(9\lambda + 8k + 8) \end{aligned}$$

जोकि संख्या 8 से भाज्य है।

इसलिए, कथन $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 23. $41^n - 14^n$ संख्या 27 का एक गुणज है।

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): 41^n - 14^n$, संख्या 27 का एक गुणज है।

चरण I. $n = 1$ के लिए,

अर्थात् $P(1) = 41^1 - 14^1 = 27 = 1 \times 27$

जो 27 का एक गुणज है, जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $41^k - 14^k = 27\lambda$... (i)

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$\begin{aligned} 41^{k+1} - 14^{k+1} &= 41^k \cdot 41 - 14^k \cdot 14 = (27\lambda + 14^k) \cdot 41 - 14^k \cdot 14 \quad [\text{समी (i) से}] \\ &= 27\lambda \times 41 + 14^k \times 41 - 14^k \times 14 \\ &= 27\lambda \times 41 + 14^k (41 - 14) \\ &= 27\lambda \times 41 + 14^k \times 27 = 27 (41\lambda + 14^k) \end{aligned}$$

जोकि 27 का गुणज है।

इसलिए, कथन $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्न 24. $(2n + 7) < (n + 3)^2$

हल माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n): (2n + 7) < (n + 3)^2$

चरण I. $n = 1$ के लिए, $P(1): 2 \times 1 + 7 < (1 + 3)^2 = 9 < 16$

जोकि सत्य है।

चरण II. माना $n = k$ के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $2k + 7 < (k + 3)^2$... (i)

चरण III. $n = k + 1$ के लिए,

$$\begin{aligned} 2(k + 1) + 7 &= 2k + 2 + 7 = (2k + 7) + 2 < (k + 3)^2 + 2 \\ &= k^2 + 9 + 6k + 2 \quad [\text{समी (i) से}] \\ &= k^2 + 8k + 16 - 2k - 5 \\ &= (k + 4)^2 - (2k + 5) < (k + 4)^2 \quad [\because (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2] \\ &= [(k + 1) + 3]^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [2(k + 1) + 7] < [(k + 1) + 3]^2$$

इसलिए, कथन $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णाकों $n \geq 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

नोट सभी प्रश्नों में, चरण III में यह स्पष्ट है कि जब $n = k + 1$, तब हम अगले पद से अंतिम पद लेते हैं।