

अध्याय 5

सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण

Complex Numbers and
Quadratic Equations

प्रश्नावली 5.1

निर्देश (प्र. सं. 1 - 10) सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

(प्र.सं.1 - 3) निम्नलिखित प्रश्नों में $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ का प्रयोग करेंगे।

यदि 2 या 4 से अलग i की घात अधिक है, तब हम i की घात को 2 या 4 के गुणक के रूप में परिवर्तन करने का प्रयास करेंगे।

प्रश्न 1. $(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right)$

हल $5\left(-\frac{3}{5}\right)i^2 = (-3)(-1) = 3 = 3 + 0i$ ($\because i^2 = -1$)

प्रश्न 2. $i^9 + i^{19}$

हल $i^9 + i^{19} = i^9 (1 + i^{10}) = i^9 [1 + (i^2)^5]$ (i^9 उभयनिष्ठ लेने पर)
 $= i^9 [1 + (-1)^5] = i^9 [1 - 1] = 0 = 0 + 0i$

प्रश्न 3. i^{-39}

हल $i^{-39} = \frac{1}{i^{39}}$

अंश तथा हर में i से गुणा करने पर,

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{i^{40}} = \frac{i}{(i^4)^{10}} && \text{(हर में } i \text{ की घात 4 का गुणक है)} \\ &= \frac{i}{(1)^{10}} = \frac{i}{1} = i = 0 + i && (\because i^4 = 1) \end{aligned}$$

प्रश्न 4. $3(7 + i7) + i(7 + i7)$

(प्र.सं. 4 - 7) प्रत्येक प्रश्न में सर्वप्रथम सम्मिश्र संख्या में से वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को पृथक करेंगे, तत्पश्चात् इसे सरल करेंगे।

हल दिया है, $3(7+i7)+i(7+i7) = 21+21i+7i+i^27 = 21+28i-7 \quad (\because i^2 = -1)$
 $= 14+28i$

नोट विद्यार्थी हमेशा याद रखें कि सापेक्षिक, वास्तविक तथा काल्पनिक भाग ही जुड़ते या घटते हैं।

प्रश्न 5. $(1-i) - (-1+6i)$

हल $1-i+1-6i = (1+1) - (i+6i) = 2-7i$

प्रश्न 6. $\left(\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}\right) - \left(4 + i\frac{5}{2}\right)$

हल $\frac{1}{5} + i\frac{2}{5} - 4 - i\frac{5}{2} = \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{1}\right) + i\left(\frac{2}{5} - \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{1-20}{5}\right) + i\left(\frac{4-25}{10}\right) = -\frac{19}{5} - \frac{21i}{10}$

प्रश्न 7. $\left[\left(\frac{1}{3} + i\frac{7}{3}\right) + \left(4 + i\frac{1}{3}\right)\right] - \left(-\frac{4}{3} + i\right)$

हल $\left(\frac{1}{3} + i\frac{7}{3} + 4 + i\frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3} - i$
 $= \left(\frac{1}{3} + 4 + \frac{4}{3}\right) + i\left(\frac{7}{3} + \frac{1}{3} - 1\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{1} + \frac{4}{3}\right) + i\left(\frac{7}{3} + \frac{1}{3} - 1\right)$
 $= \frac{(1+12+4)}{3} + i\left(\frac{7+1-3}{3}\right) = \frac{17}{3} + i\frac{5}{3}$

प्रश्न 8. $(1-i)^4$

हल $(1-i)^4 = [(1-i)^2]^2 = (1+i^2-2i)^2 [(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ का प्रयोग करने पर}]$
 $= (1-1-2i)^2 \quad (\because i^2 = -1)$
 $= (-2i)^2 = (-2)^2 i^2 = 4(-1) = -4 + 0i$

प्रश्न 9. $\left(\frac{1}{3} + 3i\right)^3$

यहाँ पर हम, सूत्र $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ का प्रयोग करेंगे, तत्पश्चात् इसे सरल करेंगे।

हल $\left(\frac{1}{3} + 3i\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + (3i)^3 + 3 \times \frac{1}{3} \times 3i \left(\frac{1}{3} + 3i\right)$
 $= \frac{1}{27} + 27i^3 + 3i \left(\frac{1}{3} + 3i\right)$
 $= \frac{1}{27} - 27i + 3i \times \frac{1}{3} + 3i \times 3i \quad (\because i^3 = -i)$
 $= \frac{1}{27} - 27i + i + 9i^2$
 $= \frac{1}{27} - 27i + i - 9 \quad (\because i^2 = -1)$

$$= \left(\frac{1}{27} - \frac{9}{1} \right) - i(27 - 1) = \left(\frac{1 - 243}{27} \right) - 26i$$

$$= \frac{242}{27} - 26i$$

प्रश्न 10. $\left(-2 - \frac{1}{3}i\right)^3$

सर्वप्रथम ऋणात्मक चिन्ह को उभयनिष्ठ लेंगे तत्पश्चात् सूत्र

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \text{ का प्रयोग करके हल करेंगे।}$$

हल $(-1)^3 \left(2 + \frac{1}{3}i\right)^3 = - \left[(2)^3 + \left(\frac{1}{3}i\right)^3 + 3 \times 2 \times \frac{1}{3}i \left(2 + \frac{1}{3}i\right) \right]$

$$= - \left[8 + \frac{1}{27}i^3 + 2i \left(2 + \frac{1}{3}i\right) \right]$$

$$= - \left[8 - \frac{1}{27}i + 4i + \frac{2}{3}i^2 \right] \quad (\because i^3 = -i)$$

$$= - \left[8 - \frac{1}{27}i + 4i - \frac{2}{3} \right] \quad (\because i^2 = -1)$$

$$= - \left[\left(\frac{8}{1} - \frac{2}{3}\right) + i \left(\frac{4}{1} - \frac{1}{27}\right) \right]$$

$$= - \left[\left(\frac{24 - 2}{3}\right) + i \left(\frac{108 - 1}{27}\right) \right] = - \left[\frac{22}{3} + i \frac{107}{27} \right]$$

निर्देश (प्र. सं. 11 - 13) सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 11 - 13) यदि सम्मिश्र संख्या z है, तब उसका गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{z}$ होगा। अब $\frac{1}{z}$ में z के संयुग्मी ($\bar{z}$) से अंश तथा हर में गुणा करेंगे, इसे हम तब तक हल करेंगे जब तक $\frac{1}{z}, (a + ib)$ के रूप में परिवर्तित नहीं होता है।

प्रश्न 11. $4 - 3i$

हल माना $z = 4 - 3i$

तब इसका गुणात्मक प्रतिलोम है

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{4 - 3i}$$

$$= \frac{1}{4 - 3i} \times \frac{4 + 3i}{4 + 3i} = \frac{4 + 3i}{16 - 9i^2}$$

$[(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \text{ का प्रयोग करने पर}]$

$$= \frac{4 + 3i}{16 + 9} \quad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{4 + 3i}{25} = \frac{4}{25} + \frac{3i}{25}$$

प्रश्न 12. $\sqrt{5} + 3i$

हल माना $z = \sqrt{5} + 3i$

तब इसका गुणात्मक प्रतिलोम है

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{\sqrt{5} + 3i} = \frac{1}{\sqrt{5} + 3i} \times \frac{\sqrt{5} - 3i}{\sqrt{5} - 3i} \\ &= \frac{\sqrt{5} - 3i}{5 - 9i^2} \quad [(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \text{ का प्रयोग करने पर}] \\ &= \frac{\sqrt{5} - 3i}{5 + 9} = \frac{\sqrt{5} - 3i}{14} = \frac{\sqrt{5}}{14} - \frac{3i}{14} \quad (\because i^2 = -1)\end{aligned}$$

प्रश्न 13. $-i$

हल माना $z = -i$

तब इसका गुणात्मक प्रतिलोम है

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= -\frac{1}{i} = -\frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{-i}{i^2} = \frac{-i}{-1} = i \\ &= 0 + i\end{aligned} \quad (\because i^2 = -1)$$

प्रश्न 14. निम्नलिखित व्यंजक को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए

$$\frac{(3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})}{(\sqrt{3} + i\sqrt{2}) - (\sqrt{3} - i\sqrt{2})}$$

हल माना $z = \frac{(3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})}{(\sqrt{3} + i\sqrt{2}) - (\sqrt{3} - i\sqrt{2})} = \frac{(3)^2 - (i\sqrt{5})^2}{\sqrt{3} + i\sqrt{2} - \sqrt{3} + i\sqrt{2}}$

$$[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$= \frac{9 - i^2 5}{2\sqrt{2}i} = \frac{9 + 5}{2\sqrt{2}i} \quad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{14}{2\sqrt{2}i} = \frac{7}{\sqrt{2}i} \times \frac{i}{i} = \frac{7i}{\sqrt{2}i^2} = -\frac{7i}{\sqrt{2}} = 0 - i\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)$$

प्रश्नावली 5.2

निर्देश (प्र. सं. 1-2) सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए।

यदि सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ के रूप की है, तब z का मापांक

$$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2} = +\sqrt{(\text{वास्तविक भाग})^2 + (\text{काल्पनिक भाग})^2}$$

तथा z का कोणांक, $\tan \theta = \left| \frac{b}{a} \right|$ के द्वारा प्राप्त होता है। (अर्थात् काल्पनिक भाग को

वास्तविक भाग से विभाजित करते हैं) हम θ का मान इस प्रकार से लेंगे कि वह अंतराल $-\pi < \theta \leq \pi$ में ही हों। (केवल मुख्य मान)

प्रश्न 1. $z = -1 - i\sqrt{3}$

हल $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

तथा $\tan \theta = \left| \frac{-\sqrt{3}}{-1} \right| = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

परन्तु बिंदु आर्गंड तल के तृतीय चतुर्थांश में स्थित है, क्योंकि z का वास्तविक तथा काल्पनिक दोनों भाग ऋणात्मक हैं।

$\therefore \arg(z) = -\pi + \theta = -\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{-2\pi}{3}$

प्रश्न 2. $z = -\sqrt{3} + i$

हल $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\tan \theta = \left| \frac{1}{-\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

चूँकि z का वास्तविक भाग ऋणात्मक तथा काल्पनिक भाग धनात्मक है। अतः बिंदु द्वितीय चतुर्थांश में स्थित होगा।

$\therefore \arg(z) = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

नोट जब हम z का कोणांक ज्ञात करते हैं, तब हमें यह अच्छी तरह से निश्चित कर लेना चाहिए कि बिंदु कौन-से चतुर्थांश में स्थित है।

निर्देश (प्र. सं. 3-8) सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक को ध्रुवीय रूप में रूपांतरित कीजिए।

(प्र. सं. 3-8) किसी सम्मिश्र संख्या को ध्रुवीय रूप में परिवर्तन करने के लिए, हम सम्मिश्र संख्या z को $r \cos \theta + ir \sin \theta$ के बराबर रख देते हैं, तत्पश्चात् दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करते हैं और r तथा θ के मानों के लिए सरल करते हैं।

प्रश्न 3. $1 - i$

हल माना $z = 1 - i$

तब $1 - i = r \cos \theta + ir \sin \theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$1 = r \cos \theta \quad \dots (i)$$

तथा $-1 = r \sin \theta \quad \dots (ii)$

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$(1)^2 + (-1)^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1 + 1 \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$$\Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \left| \frac{-1}{1} \right| \Rightarrow \tan \theta = |-1| = 1$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

चूँकि z का वास्तविक भाग घनात्मक तथा काल्पनिक भाग ऋणात्मक है, अतः बिंदु चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।

$$\therefore \arg(z) = -\theta = \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{अंततः} \quad z = 1 - i = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

जोकि $(1 - i)$ का आवश्यक ध्रुवीय रूप है।

प्रश्न 4. $-1 + i$

हल माना $z = -1 + i$

तब, $-1 + i = r \cos \theta + i r \sin \theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$-1 = r \cos \theta \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा} \quad 1 = r \sin \theta \quad \dots(ii)$$

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$(-1)^2 + (1)^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1 + 1$$

$$\Rightarrow r^2 = 2 \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2}$$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow \tan \theta = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

चूँकि z का वास्तविक भाग ऋणात्मक तथा काल्पनिक भाग धनात्मक है, अतः बिंदु द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

$$\therefore \arg(z) = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{अंततः} \quad z = -1 + i = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]$$

जोकि $(-1 + i)$ का आवश्यक ध्रुवीय रूप है।

प्रश्न 5. $-1 - i$

हल माना $z = -1 - i$

तथा $-1 - i = r \cos \theta + i r \sin \theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$-1 = r \cos \theta \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा} \quad -1 = r \sin \theta \quad \dots(ii)$$

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = (-1)^2 + (-1)^2$$

$$\Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1 + 1$$

$$\Rightarrow r^2 = 2 \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2}$$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\Rightarrow \tan \theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

चूँकि z का वास्तविक तथा काल्पनिक भाग दोनों ऋणात्मक हैं, अतः बिंदु तृतीय चतुर्थांश में स्थित है।

$$\therefore \arg(z) = -\pi + \theta = -\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4}$$

$$\text{अतः } z = -1 - i = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right]$$

जोकि $(-1 - i)$ का आवश्यक ध्रुवीय रूप है।

प्रश्न 6. - 3

हल माना $z = -3 + 0i$

तथा $-3 + 0i = r \cos \theta + ir \sin \theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$r \cos \theta = -3 \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा } r \sin \theta = 0 \quad \dots(ii)$$

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = (-3)^2 + (0)^2$$

$$\Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 9$$

$$\Rightarrow r^2 = 9 \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$$\Rightarrow r = 3$$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{0}{-3}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = 0 = \tan 0^\circ \Rightarrow \theta = 0^\circ$$

चूँकि z का वास्तविक भाग ऋणात्मक तथा काल्पनिक भाग घनात्मक है, अतः बिंदु द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

$$\therefore \arg(z) = \pi - \theta = \pi - 0 = \pi$$

$$\text{अतः } z = -3 + 0i = 3 [\cos \pi + i \sin \pi]$$

जोकि (-3) का आवश्यक ध्रुवीय रूप है।

प्रश्न 7. $\sqrt{3} + i$

हल माना $z = \sqrt{3} + i$

तथा $\sqrt{3} + i = r \cos \theta + ir \sin \theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर, हम पाते हैं कि

$$r \cos \theta = \sqrt{3} \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा} \quad r \sin \theta = 1 \quad \dots(ii)$$

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = (\sqrt{3})^2 + (1)^2$$

$$\Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 3 + 1 = 4$$

$$\Rightarrow r^2 = 4 \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$$\Rightarrow r = 2$$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right| \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

चूँकि z का वास्तविक तथा काल्पनिक भाग दोनों धनात्मक है, अतः बिंदु प्रथम चतुर्थांश में स्थित है।

$$\therefore \arg(z) = \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{अंततः} \quad z = \sqrt{3} + i = 2 \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

जोकि $(\sqrt{3} + i)$ का आवश्यक ध्रुवीय रूप है।

प्रश्न 8. i

हल माना $z = i = 0 + i$ तथा $0 + i = r \cos \theta + ir \sin \theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$r \cos \theta = 0 \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा} \quad r \sin \theta = 1 \quad \dots(ii)$$

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = (0)^2 + (1)^2$$

$$\Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1$$

$$\Rightarrow r^2 = 1 \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$$\Rightarrow r = 1$$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \left| \frac{1}{0} \right|$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \infty = \tan \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

चूँकि z का वास्तविक तथा काल्पनिक भाग दोनों धनात्मक हैं, अतः बिंदु प्रथम चतुर्थांश में स्थित है।

$$\therefore \arg(z) = \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{अतः} \quad z = 0 + i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

जोकि i का आवश्यक घुवीय रूप है।

नोट (प्र. सं. 3 - 8) उपरोक्त प्रश्नों में विद्यार्थी कोणांक का मान अंतराल $-\pi < \theta \leq \pi$ (लंबाई 2π) में लेना न भूलें अर्थात् प्रथम, द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ चतुर्थांश के लिए क्रमशः $\theta, \pi - \theta, -\pi + \theta$ तथा $-\theta$ मुख्य मान होंगे।

प्रश्नावली 5.3

निर्देश (प्र. सं. 1 - 10) निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए।

(प्र. सं. 1 - 10) यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ वास्तविक गुणांकों a, b, c के साथ तथा $a \neq 0$ है। तब,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ यदि } b^2 - 4ac > 0$$

$$\text{तथा} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} \cdot i}{2a} \text{ यदि } b^2 - 4ac < 0 \text{ का प्रयोग करेंगे।}$$

प्रश्न 1. $x^2 + 3 = 0$

हल दिया है, $x^2 + 3 = 0$

$$\therefore x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$$

प्रश्न 2. $2x^2 + x + 1 = 0$

हल दिया है, $2x^2 + x + 1 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = 1, c = 1$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 - 8 = -7 < 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 \times 2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4} \quad (\because \sqrt{-1} = i)$$

प्रश्न 3. $x^2 + 3x + 9 = 0$

हल दिया है, $x^2 + 3x + 9 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 3, c = 9$$

$$\begin{aligned} \text{अब, } D &= b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 9 - 36 = -27 < 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2 \times 1}, \quad x = \frac{-3 \pm i\sqrt{27}}{2} \quad (\because \sqrt{-1} = i) \\ &= \frac{-3 \pm i\sqrt{9 \times 3}}{2} = \frac{-3 \pm i3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

प्रश्न 4. $-x^2 + x - 2 = 0$

हल दिया है, $-x^2 + x - 2 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = -1, b = 1, c = -2$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-1)(-2) = 1 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 \times (-1)} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{-2} \quad (\because \sqrt{-1} = i)$$

प्रश्न 5. $x^2 + 3x + 5 = 0$

हल दिया है, $x^2 + 3x + 5 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 3, c = 5$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 9 - 20 = -11 < 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2 \times 1} \\ x &= \frac{-3 \pm i\sqrt{11}}{2} \quad (\because \sqrt{-1} = i) \end{aligned}$$

प्रश्न 6. $x^2 - x + 2 = 0$

हल दिया है, $x^2 - x + 2 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = -1, c = 2$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-7}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2} \quad (\because \sqrt{-1} = i)$$

प्रश्न 7. $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$

हल दिया है, $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{2}$$

$\therefore D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1 - 4 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 \times \sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \quad (\because \sqrt{-1} = i)$$

प्रश्न 8. $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$

हल दिया है, $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = \sqrt{3}, b = -\sqrt{2}, c = 3\sqrt{3}$$

अब,

$$D = b^2 - 4ac = (-\sqrt{2})^2 - 4 \times (\sqrt{3}) \times 3\sqrt{3}$$

$$= 2 - 4 \times 3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2 - 12 \times 3 = 2 - 36 = -34 < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-\sqrt{2}) \pm \sqrt{-34}}{2 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{34}}{2\sqrt{3}} \quad (\because \sqrt{-1} = i)$$

प्रश्न 9. $x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

हल दिया है, $x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 1, c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अब,

$$D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= 1 - \frac{4\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sqrt{2} < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{2}}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm i\sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \quad (\because \sqrt{-1} = i)$$

प्रश्न 10. $x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

हल दिया है, $x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

उपरोक्त समीकरण में दोनों पक्षों में $\sqrt{2}$ से गुणा करने पर,

$$\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$$

समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{2}$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1 - 4 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 \times \sqrt{2}}$$

$$= \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \quad (\because \sqrt{-1} = i)$$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. $\left[i^{18} + \left(\frac{1}{i} \right)^{25} \right]^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम इसे हल करने के लिए, हम i की घात को 2 या 4 के गुणक रूप में बदलेंगे तथा $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ का प्रयोग करके इसे हल करेंगे। तत्पश्चात् सूत्र $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ का प्रयोग करेंगे।

$$\begin{aligned}
 \text{हल} \quad \left[i^{18} + \left(\frac{1}{i} \right)^{25} \right]^3 &= \left[(i^2)^9 + \frac{1}{i^{25}} \right]^3 = \left[(i^2)^9 + \frac{1}{i \cdot i^{24}} \right]^3 \\
 &= \left[(-1)^9 + \frac{1}{i(i^4)^6} \right]^3 && (\because i^2 = -1) \\
 &= \left[-1 + \frac{1}{i} \right]^3 && (\because i^4 = 1) \\
 &= \left[-1 + \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} \right]^3 = \left[-1 + \frac{i}{i^2} \right]^3 \\
 &= [-1 - i]^3 && (\because i^2 = -1) \\
 &= (-1)^3 [1 + i]^3 \\
 &= -[(1)^3 + i^3 + 3 \times 1 \times i(1 + i)] && [\because (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)] \\
 &= -(1 - i + 3i + 3i^2) && (\because i^3 = -i) \\
 &= -(1 - i + 3i - 3) && (\because i^2 = -1) \\
 &= -(-2 + 2i) = 2 - 2i
 \end{aligned}$$

नोट विद्यार्थियों से आग्रह किया जाता है कि व्यंजक का शुरुआत में घन न करें अर्थात् शुरुआत में सूत्र $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ का प्रयोग न करें, ऐसा करने से गणना जटिल हो जाती है।

प्रश्न 2. किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए, सिद्ध कीजिए

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)$$

हल माना $z_1 = a + ib$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1) = a \text{ तथा } \operatorname{Im}(z_1) = b \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा} \quad z_2 = c + id \quad \dots(ii)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_2) = c \text{ तथा } \operatorname{Im}(z_2) = d$$

$$\begin{aligned}
 \text{अब,} \quad z_1 z_2 &= (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd \\
 &= ac + i(ad + bc) - bd && (\because i^2 = -1)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1 z_2) = ac - bd$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2) \quad [\text{समी (i) तथा (ii) से}]$$

यहाँ Re वास्तविक भाग तथा Im काल्पनिक भाग को निरूपित करता है।

प्रश्न 3. $\left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$ को मानक रूप में परिवर्तित कीजिए।

सर्वप्रथम हम व्यंजक का लघुतम समापवर्तक लेंगे तत्पश्चात् व्यंजक के हर को शुद्ध वास्तविक संख्या के रूप में परिवर्तित करेंगे—

$$\begin{aligned} \text{हल} \quad & \left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right) = \frac{\{1+i-2(1-4i)\}}{(1-4i)(1+i)} \times \left(\frac{3-4i}{5+i}\right) \\ & = \frac{1+i-2+8i}{1+i-4i-4i^2} \times \frac{3-4i}{5+i} \\ & = \frac{(1-2)+i(1+8)}{1+i(1-4)-4(-1)} \times \frac{3-4i}{5+i} \quad (\because i^2 = -1) \\ & = \frac{-1+9i}{5-3i} \times \frac{3-4i}{5+i} = \frac{-3+4i+27i-36i^2}{25+5i-15i-3i^2} \\ & = \frac{-3+i(4+27)-36(-1)}{25+(5-15)i-3(-1)} \quad (\because i^2 = -1) \\ & = \frac{-3+31i+36}{25-10i+3} = \frac{33+31i}{28-10i} \times \frac{28+10i}{28+10i} \\ & = \frac{924+330i+868i+310i^2}{784-100i^2} \quad [\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2] \\ & = \frac{924+(330+868)i-310}{784+100} \quad (\because i^2 = -1) \\ & = \frac{614+1198i}{884} = \frac{307+i599}{442} \end{aligned}$$

प्रश्न 4. यदि $x - iy = \frac{a - ib}{c - id}$, तो सिद्ध कीजिए कि $(x^2 + y^2) = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$

आवश्यक व्यंजक को सिद्ध करने के लिए, सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक के दोनों पक्षों का मापांक लेंगे, तत्पश्चात् निम्न गुण का प्रयोग करेंगे

$$|z|^n = |z^n| \quad \text{तथा} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\text{हल दिया है, } x - iy = \frac{a - ib}{c - id}$$

$$\Rightarrow x + i(-y) = \left(\frac{a - ib}{c - id}\right)^{1/2}$$

दोनों पक्षों का मापांक लेने पर,

$$|x + i(-y)| = \left| \frac{a - ib}{c - id} \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \left| \frac{a - ib}{c - id} \right|^{\frac{1}{2}} \quad \left(\because |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

(तथा $|z^n| = |z|^n$)

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \left| \frac{a - ib}{c - id} \right|^{\frac{1}{2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$x^2 + y^2 = \left| \frac{a - ib}{c - id} \right|$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{|a - ib|}{|c - id|} \quad \left(\because \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \right)$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} \quad (\because |x - iy| = \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$$

नोट कृपया सावधानी रखें कि, दिए हुए व्यंजक में दोनों पक्षों का वर्ग करके वास्तविक तथा काल्पनिक भाग तुलना के द्वारा x व y के पृथक्-पृथक् मानों को ज्ञात करने की विधि बहुत जटिल व समय लेने वाली है, इसलिए विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि इस विधि का प्रयोग करें।

प्रश्न 5. निम्नलिखित को ध्रुवीय रूप में परिवर्तित कीजिए

(i) $\frac{1 + 7i}{(2 - i)^2}$

(ii) $\frac{1 + 3i}{1 - 2i}$

सर्वप्रथम दिए गए व्यंजक को $a + ib$ के रूप में बदलेंगे, तत्पश्चात् प्राप्त $a + ib$ को ध्रुवीय रूप में परिवर्तित करेंगे।

हल (i) माना $z = \frac{1 + 7i}{(2 - i)^2} = \frac{1 + 7i}{4 + i^2 - 4i}$ $[\because (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab]$

$$= \frac{1 + 7i}{4 - 1 - 4i}$$

$(\because i^2 = -1)$

$$= \frac{1 + 7i}{3 - 4i} \times \frac{3 + 4i}{3 + 4i} = \frac{3 + 4i + 21i + 28i^2}{(3)^2 - (4i)^2}$$

$[\because (a - b)(a + b) = a^2 - b^2]$

$$= \frac{3 + i(4 + 21) - 28}{9 - 16i^2} = \frac{-25 + 25i}{9 + 16}$$

$(\because i^2 = -1)$

$$z = \frac{-25 + 25i}{25} = -1 + i$$

अब, माना $-1 + i = r \cos \theta + ir \sin \theta$

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक व काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$r \cos \theta = -1 \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा} \quad r \sin \theta = 1 \quad \dots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = (-1)^2 + (1)^2$$

$$r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1 + 1$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 2 \quad (\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1)$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{2}$$

समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \left| \frac{1}{-1} \right| \Rightarrow \tan \theta = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

चूँकि z का वास्तविक भाग ऋणात्मक तथा काल्पनिक भाग धनात्मक है। अतः बिंदु द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

$$\therefore \quad \arg(z) = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \quad z = -1 + i = \sqrt{2} \left[\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right]$$

जोकि $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ का आवश्यक ध्रुवीय रूप है।

$$\begin{aligned} \text{(ii) माना } z &= \frac{1+3i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1+2i+3i+3i \times 2i}{1^2 - (2i)^2} \quad [\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2] \\ &= \frac{1+5i+6i^2}{1-4i^2} \quad (\because i^2 = -1) \\ &= \frac{1+5i-6}{1+4} = \frac{-5+5i}{5} = -1+i \end{aligned}$$

अब, आगे प्रथम भाग की भाँति करें।

निर्देश (प्र. सं. 6 - 9) दिए गए प्रत्येक समीकरण को हल कीजिए।

(प्र. सं. 6 - 9) यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ वास्तविक गुणांकों a, b, c के साथ तथा $a \neq 0$ है। तब,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{यदि } b^2 - 4ac > 0$$

$$\text{तथा} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} \cdot i}{2a}, \quad \text{यदि } b^2 - 4ac < 0 \text{ का प्रयोग करेंगे।}$$

प्रश्न 6. $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$

हल दिया है, $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 3, b = -4, c = \frac{20}{3}$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times \frac{20}{3} = 16 - 80 = -64 < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-64}}{2 \times 3} = \frac{4 \pm 8i}{2 \times 3} = \frac{2(2 \pm 4i)}{2 \times 3} = \frac{2 \pm 4i}{3} = \frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}i$$

प्रश्न 7. $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

हल दिया है, $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = -2, c = \frac{3}{2}$$

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times \frac{3}{2} = 4 - 6 = -2 < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-2}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm i\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} \pm \frac{i\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \frac{i\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$$

प्रश्न 8. $27x^2 - 10x + 1 = 0$

हल दिया है, $27x^2 - 10x + 1 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 27, b = -10, c = 1$$

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 27 \times 1 = 100 - 108 = -8 < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-8}}{2 \times 27} = \frac{10 \pm 2\sqrt{2}i}{2 \times 27} = \frac{2(5 \pm \sqrt{2}i)}{2 \times 27} = \frac{5 \pm \sqrt{2}i}{27}$$

प्रश्न 9. $21x^2 - 28x + 10 = 0$

हल दिया है, $21x^2 - 28x + 10 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 21, b = -28, c = 10$$

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (-28)^2 - 4 \times 21 \times 10 = 784 - 840 = -56 < 0$$

$$x = \frac{-(-28) \pm \sqrt{-56}}{2 \times 21} = \frac{28 \pm \sqrt{14 \times 4}i}{2 \times 21}$$

$$= \frac{28}{2 \times 21} \pm \frac{2\sqrt{14}i}{2 \times 21} = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{21}i$$

प्रश्न 10. यदि $z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i$, तब $\left| \frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + 1} \right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक में, z_1 तथा z_2 के मान रखेंगे, तत्पश्चात् व्यंजक को $a + ib$ के रूप में परिवर्तित करेंगे तथा आवश्यक मापांक के गुणों का प्रयोग करके इसे हल करेंगे।

$$\begin{aligned} \text{हल} \quad \left| \frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + 1} \right| &= \left| \frac{2 - i + 1 + i + 1}{2 - i - (1 + i) + 1} \right| & (\because z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i) \\ &= \left| \frac{4}{2 - i - 1 - i + 1} \right| \\ &= \left| \frac{4}{2 - 2i} \right| = \left| \frac{2}{1 - i} \right| = \frac{2}{|1 - i|} & \left[\because \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} & (\because |z| = \sqrt{a^2 + b^2}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

प्रश्न 11. यदि $a + ib = \frac{(x + i)^2}{2x^2 + 1}$, तो सिद्ध कीजिए कि $a^2 + b^2 = \frac{(x^2 + 1)^2}{(2x^2 + 1)^2}$

हल दिया है, $a + ib = \frac{(x + i)^2}{2x^2 + 1}$

दोनों ओर मापांक लेने पर,

$$\begin{aligned} |a + ib| &= \left| \frac{(x + i)^2}{2x^2 + 1} \right| \\ \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} &= \frac{|(x + i)^2|}{|2x^2 + 1|} = \frac{|x + i|^2}{2x^2 + 1} \\ & \left[\because \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, |z^n| = |z|^n \text{ तथा } \operatorname{Re}(|z|) = \operatorname{Re}(z) \right] \\ \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} &= \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2}{2x^2 + 1} \end{aligned}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{(x^2 + 1)^2}{(2x^2 + 1)^2}$$

नोट विद्यार्थी कृपया ध्यान रखें कि दिए हुए व्यंजक के दोनों पक्षों के वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना के द्वारा x व y के पृथक्-पृथक् मान ज्ञात करने की विधि बहुत जटिल व लंबी होगी तथा इसमें बहुत समय व्यर्थ होगा। अतः विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि इस विधि का प्रयोग कम-से-कम करें।

प्रश्न 12. माना $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + i$, निम्न का मान निकालिए।

(i) $\operatorname{Re} \left(\frac{z_1 z_2}{\bar{z}_1} \right)$ (ii) $\operatorname{Im} \left(\frac{1}{z_1 \bar{z}_1} \right)$

- (i) सर्वप्रथम दिए गए व्यंजक में z_1 व z_2 तथा z_1 के संयुग्मी का मान रखकर इसे $a + ib$ के रूप में सरल करेंगे, तत्पश्चात् प्राप्त $a + ib$ का वास्तविक भाग ज्ञात करेंगे।
 (ii) सर्वप्रथम हम मापांक के गुण $z\bar{z} = |z|^2$ का प्रयोग करके व्यंजक को $a + ib$ के रूप में परिवर्तित करेंगे, तत्पश्चात् $a + ib$ का काल्पनिक भाग ज्ञात करेंगे।

हल

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{z_1 z_2}{\bar{z}_1} &= \frac{(2-i)(-2+i)}{(2-i)} = \frac{-(2-i)(2-i)}{(2+i)} && (\because z_1 = 2-i, z_2 = -2+i) \\ &= \frac{-(2-i)^2}{2+i} = \frac{-(4+i^2-4i)}{2+i} = \frac{-(4-1-4i)}{2+i} && (\because z = a+ib \Rightarrow \bar{z} = a-ib) \\ &= \frac{-(3-4i)}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} && (\because i^2 = -1) \\ &= \frac{-(6-3i-8i+4i^2)}{(2)^2 - (i)^2} && [\because (a+b)(a-b) = (a^2 - b^2)] \\ &= \frac{-(6-11i-4)}{4-i^2} && (\because i^2 = -1) \\ &= \frac{-(2-11i)}{4+1} && (\because i^2 = -1) \\ &= -\left(\frac{2}{5} - \frac{11i}{5}\right) = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i \\ \therefore \operatorname{Re} \left(\frac{z_1 z_2}{\bar{z}_1} \right) &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z_1 \bar{z}_1} \right) & \\ \because \quad z\bar{z} = |z|^2 &\Rightarrow z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2 \\ \Rightarrow \quad z_1 \bar{z}_1 &= |-2+i|^2 = (\sqrt{4+1})^2 = 5 + 0i \\ \therefore \quad \frac{1}{z_1 \bar{z}_1} &= \frac{1}{5} + 0i \\ \Rightarrow \quad \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z_1 \bar{z}_1} \right) &= 0 \end{aligned}$$

प्रश्न 13. सम्मिश्र संख्या $\frac{1+2i}{1-3i}$ का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम दिए व्यंजक को $a + ib$ के रूप में परिवर्तित करेंगे, तत्पश्चात् प्राप्त $a + ib$ का मापांक व कोणांक ज्ञात करेंगे।

हल माना $z = \frac{1+2i}{1-3i}$

$$\begin{aligned}\therefore z &= \frac{1+2i}{1-3i} \times \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{1+3i+2i+6i^2}{1^2-(3i)^2} \quad [\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2] \\ &= \frac{1+5i+6(-1)}{1-9i^2} \quad (\because i^2 = -1) \\ &= \frac{1+5i-6}{1+9} = \frac{-5+5i}{10} = \frac{-1+i}{2} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore |z| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad (\because |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}) \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\text{अब, } \tan \theta = \left| \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} \right| \quad \left[\because \theta = \tan^{-1} \left| \left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \right) \right| \right]$$

$$\Rightarrow \tan \theta = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

चूँकि z का वास्तविक भाग ऋणात्मक तथा काल्पनिक भाग धनात्मक है, अतः बिंदु द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

$$\therefore \arg(z) = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{अंततः मापांक} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ तथा कोणांक } (z) = \frac{3\pi}{4}$$

प्रश्न 14. यदि $(x-iy)(3+5i)$, $(-6-24i)$ की संयुग्मी है, तो वास्तविक संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए।

व्यंजक $(x-iy)(3+5i)$ तथा $(-6-24i)$ के संयुग्मी में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करके, हम x तथा y के मान ज्ञात करेंगे।

$$\begin{aligned}\text{हल } (x-iy)(3+5i) &= 3x+5xi-3yi-5yi^2 \\ &= 3x+(5x-3y)i+5y \quad (\because i^2 = -1) \\ &= (3x+5y) + (5x-3y)i \quad \dots(i)\end{aligned}$$

$$\text{दिया है, } (x-iy)(3+5i) = (-6-24i)$$

$$\Rightarrow (3x+5y) + i(5x-3y) = -6+24i$$

[समी (i) तथा $z = (a+ib) \Rightarrow \bar{z} = (a-ib)$ का प्रयोग करने पर]

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक व काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$3x+5y = -6$$

तथा

$$5x-3y = 24$$

अब, प्रतिस्थापन या विलोपन विधि के द्वारा उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर,

$$x = 3 \text{ तथा } y = -3$$

प्रश्न 15. $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक को इसके मानक रूप $a+ib$ में परिवर्तित करेंगे, तत्पश्चात् हम इसका मापांक ज्ञात करेंगे।

$$\begin{aligned} \text{हल माना } z &= \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i^2+2i) - (1+i^2-2i)}{1-i^2} \\ &= \frac{4i}{2} = 2i = 0 + 2i \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{l} \because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\ \text{तथा } (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \end{array} \right]$$

$$\therefore |z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

प्रश्न 16. यदि $(x+iy)^3 = u+iv$, तो दर्शाइए कि $\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 4(x^2 - y^2)$

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक के बाएँ पक्ष में सूत्र $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ का प्रयोग करेंगे, तत्पश्चात् दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करेंगे।

$$\begin{aligned} \text{हल } (x+iy)^3 &= u+iv \Rightarrow x^3 + (iy)^3 + 3x(iy)(x+iy) = u+iv \\ \Rightarrow x^3 + i^3y^3 + 3ix^2y + 3xy^2i^2 &= u+iv \\ \Rightarrow x^3 - iy^3 + 3ix^2y - 3xy^2 &= u+iv \quad (\because i^3 = -i, i^2 = -1) \\ \Rightarrow (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) &= u+iv \end{aligned}$$

अब, वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$x^3 - 3xy^2 = u \quad \text{तथा} \quad 3x^2y - y^3 = v$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{u}{x} + \frac{v}{y} &= \frac{x^3 - 3xy^2}{x} + \frac{3x^2y - y^3}{y} \\ &= x^2 - 3y^2 + 3x^2 - y^2 = 4x^2 - 4y^2 = 4(x^2 - y^2) \text{ इति सिद्धम्} \end{aligned}$$

प्रश्न 17. यदि α और β भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ हैं, जहाँ $|\beta| = 1$, तब $\left| \frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल } \left| \frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right| &= \left| \frac{(\beta - \alpha)\bar{\beta}}{(1 - \bar{\alpha}\beta)\bar{\beta}} \right| = \left| \frac{(\beta - \alpha)\bar{\beta}}{\beta - \bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} \right| \quad (\text{अंश तथा हर में } \bar{\beta} \text{ से गुणा करने पर}) \\ &= \left| \frac{(\beta - \alpha)\bar{\beta}}{\beta - \bar{\alpha}} \right| \quad (\because \beta\bar{\beta} = |\beta|^2 = |1|^2 = 1) \\ &= \frac{|(\beta - \alpha)\bar{\beta}|}{|\beta - \bar{\alpha}|} \quad \left(\because \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \right) \\ &= \frac{|\beta - \alpha| |\bar{\beta}|}{|\beta - \bar{\alpha}|} \quad (\because |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \text{ तथा } |\bar{z}_1 - \bar{z}_2| = |\overline{z_1 - z_2}|) \\ &= \frac{|\beta - \alpha| |\beta|}{|\beta - \bar{\alpha}|} \quad (\because |\bar{z}| = |z|) \\ &= |\beta| = 1 \end{aligned}$$

नोट विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि यहाँ पर व्यंजक में α तथा β के मान सम्मिश्र संख्या के रूप में मानकर न रखें क्योंकि यह विधि बहुत लंबी व जटिल तथा अधिक समय लगने वाली होगी।

प्रश्न 18. समीकरण $|1 - i|^x = 2^x$ के शून्येत्तर पूर्णांक मूलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक के बाएँ पक्ष का मापांक लेंगे, तत्पश्चात् दोनों पक्षों में घातों की तुलना करेंगे।

हल दिया है, $|1 - i|^x = 2^x$

$$\Rightarrow (\sqrt{(1)^2 + (-1)^2})^x = 2^x \quad (\because |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2})$$

$$\Rightarrow (\sqrt{1+1})^x = 2^x$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2})^x = 2^x \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^x$$

दोनों पक्षों में 2 की घात की तुलना करने पर,

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = x \Rightarrow x = 2x \Rightarrow 2x - x = 0$$

$$x = 0$$

परंतु हमें अशून्य हल की आवश्यकता है। अतः हलों की संख्या शून्य है।

नोट यहाँ, $x = 0$ एक हल को निरूपित करता है। विद्यार्थियों को यहाँ शब्द 'हल' तथा 'हलों की संख्या' के मध्य अंतर समझना अनिवार्य है।

प्रश्न 19. यदि $(a + ib)(c + id)(e + if)(g + ih) = A + iB$, तब सिद्ध कीजिए

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)(g^2 + h^2) = A^2 + B^2$$

दिए गए व्यंजक में सर्वप्रथम हम दोनों पक्षों का मापांक लेंगे, तत्पश्चात् मापांक के गुण का प्रयोग करेंगे।

$$\text{हल } (a + ib)(c + id)(e + if)(g + ih) = A + iB$$

दोनों पक्षों का मापांक लेने पर,

$$|(a + ib)(c + id)(e + if)(g + ih)| = |A + iB|$$

$$\Rightarrow |a + ib||c + id||e + if||g + ih| = |A + iB|$$

$$(\because |z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| |z_3| \dots |z_n|)$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \sqrt{e^2 + f^2} \sqrt{g^2 + h^2} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$(\because \text{यदि } z = a + ib, \text{ तब } |z| = \sqrt{a^2 + b^2})$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)(g^2 + h^2) = A^2 + B^2$$

प्रश्न 20. यदि $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$, तब m का न्यूनतम घनात्मक पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम व्यंजक के बाएँ पक्ष को इसके मानक रूप अर्थात् $a + ib$ में बदलेंगे, तत्पश्चात् दोनों पक्षों में यदि आधार समान है, तब उनकी घातों की तुलना करेंगे।

$$\text{हल} \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1 \Rightarrow \left[\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}\right]^m = 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right]^m = 1 \Rightarrow \left[\frac{1+i^2+2i}{1+1}\right]^m = 1$$

$$[\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \text{ तथा } i^2 = -1]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1-1+2i}{2}\right]^m = 1$$

$$\Rightarrow i^m = 1$$

$$\Rightarrow (\sqrt{-1})^m = 1 \quad (\because i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1})$$

$$\Rightarrow (-1)^{\frac{m}{2}} = (-1)^2$$

$$\text{दोनों पक्षों में घातों की तुलना करने पर, } \frac{m}{2} = 2 \Rightarrow m = 4$$

अतः m का न्यूनतम घनात्मक पूर्णांक मान 4 है।

नोट 1 को हम $(-1)^2, (-1)^4, (-1)^6, \dots$ आदि के रूप में लिख सकते हैं परंतु न्यूनतम मान हेतु हम $(-1)^2$ लेंगे।