Chapter-6

कार्य, ऊर्जा तथा शक्ति

Work, Energy and Power

प्रश्नावली

प्रश्न 1. किसी वस्तु पर किसी बल द्वारा किए गए कार्य का चिह्न समझना महत्त्वपूर्ण है। सावधानीपूर्वक बताइए कि निम्नलिखित राशियाँ धनात्मक है या ऋणात्मक

(a) किसी व्यक्ति द्वारा किसी कुएँ में से रस्सी में बँधी बाल्टी को रस्सी द्वारा बाहर निकालने में किया गया कार्य।

(b) उपर्युक्त स्थिति में गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य।

(c) किसी आनत तल पर फिसलती हुई किसी वस्तु पर घर्षण द्वारा किया गया कार्य।

(d) किसी खुरदरे क्षैतिज तल पर एकसमान वेग से गतिमान किसी वस्तु पर लगाए गए बल द्वारा किया गया कार्य।

(e) किसी दोलायमान लोलक को विरामावस्था में लाने के लिए वायु के प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य।

किसी वस्तु द्वारा किया गया कार्य, $W = Fs\cos\theta$

जहाँ F आरोपित बल, s विस्थापन तथा θ, F तथा s के बीच का कोण है।

(i) यदि $\theta < 90°$ किया गया कार्य धनात्मक होगा।

(ii) यदि $\theta = 90°$ किया गया कार्य शून्य होगा।

(iii) यदि $\theta > 90°$ किया गया कार्य ऋणात्मक होगा।

हल (a) रस्सी से बंधी बाल्टी को कुएँ से बाहर निकालने के लिए ऊपर की ओर बाल्टी के भार के बराबर बल आरोपित करना होगा।

अतः आरोपित बल तथा विस्थापन के बीच कोण शून्य है। तब व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य

$$W = Fs\cos 0° = Fs \text{ धनात्मक}$$

(b) गुरुत्वीय बल नीचे की ओर बल लगाता है जबकि बाल्टी ऊपर की ओर बल लगाती है अतः गुरुत्वीय बल तथा विस्थापन के बीच कोण 180° है।

∴ गुरुत्व बल द्वारा किया गया कार्य

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = Fs\cos 180° = -Fs \qquad (\because \cos 180° = -1)$$

∴ गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक है।

(c) घर्षण बल नत समतल के विपरीत दिशा में कार्य करता है।

∴ घर्षण द्वारा किया गया कार्य $W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = Fs\cos 180°$

$= -Fs$ अर्थात् ऋणात्मक

(d) वस्तु आरोपित बल की दिशा में कार्य करती है

अर्थात् $\theta = 0°$

∴ आरोपित बल द्वारा किया गया कार्य

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = Fs\cos 0° = Fs \text{ अर्थात् धनात्मक}$$

(e) प्रतिरोध बल गति के विपरीत कार्य करता है। अतः प्रतिरोध तथा विस्थापन के बीच का कोण 180° है। अतः प्रतिरोधक बल द्वारा किया गया कार्य

$$W = F\cdot s = Fs\cos 180° = -Fs \text{ अर्थात् ऋणात्मक} \quad (\because \cos 180° = -1)$$

प्रश्न 2. 2 kg द्रव्यमान की कोई वस्तु जो आरंभ में विरामावस्था में है, 7 N के किसी क्षैतिज बल के प्रभाव से एक मेज पर गति करती है। मेज का गतिज-घर्षण गुणांक 0.1 है। निम्नलिखित का परिकलन कीजिए और अपने परिणामों की व्याख्या कीजिए।

(a) लगाए गए बल द्वारा 10 s में किया गया कार्य

(b) घर्षण द्वारा 10 s में किया गया कार्य

(c) वस्तु पर कुल बल द्वारा 10 s में किया गया कार्य

(d) वस्तु की गतिज ऊर्जा में 10 s में परिवर्तन।

हल वस्तु का द्रव्यमान $(m) = 2$ किग्रा

आरोपित बल $(F) = 7$ न्यूटन

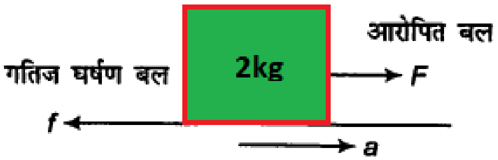
मेज का गतिज घर्षण गुणांक $\mu_k = 0.1$

गतिज घर्षण द्वारा लगाया गया बल

$$f = \mu_k R = \mu_k mg = 0.1 \times 2 \times 9.8 = 1.96 \text{ न्यूटन}$$

वस्तु पर आरोपित कुल बल $F' = F - f = 7 - 1.96 = 5.04$ न्यूटन

($\because$ गतिज घर्षण बल द्वारा लगाये गये बल की दिशा आरोपित बल की दिशा के विपरीत होगी।)



वस्तु में उत्पन्न त्वरण $(a) = \frac{F}{m}$ (न्यूटन के द्वितीय नियम से)

$$= \frac{5.04}{2}$$

$$= 2.52 \text{ m/s}^2$$

10 सेकण्ड में तय किया गया वस्तु का विस्थापन

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$= 0 \times 10 + \frac{1}{2} \times 2.52 \times (10)^2$$

$$= 1.26 \times 100$$

$= 126$ मी

(a) आरोपित बल द्वारा 10 सेकण्ड में किया गया कार्य

$W_1 =$ आरोपित बल $\times$ विस्थापन

$$= 7 \times 126$$

$= 882$ जूल

(b) घर्षण बल द्वारा 10 सेकण्ड में किया गया कार्य

$W_2 =$ गतिज घर्षण बल $\times$ विस्थापन

$$= -f \times s$$

$$= -1.96 \times 126$$

$W_2 = -246.9$ जूल

(c) कुल बल द्वारा 10 सेकण्ड में किया गया कार्य

$W_3 =$ कुल बल $\times$ विस्थापन

$$= F' \times s$$

$$= 5.04 \times 126$$

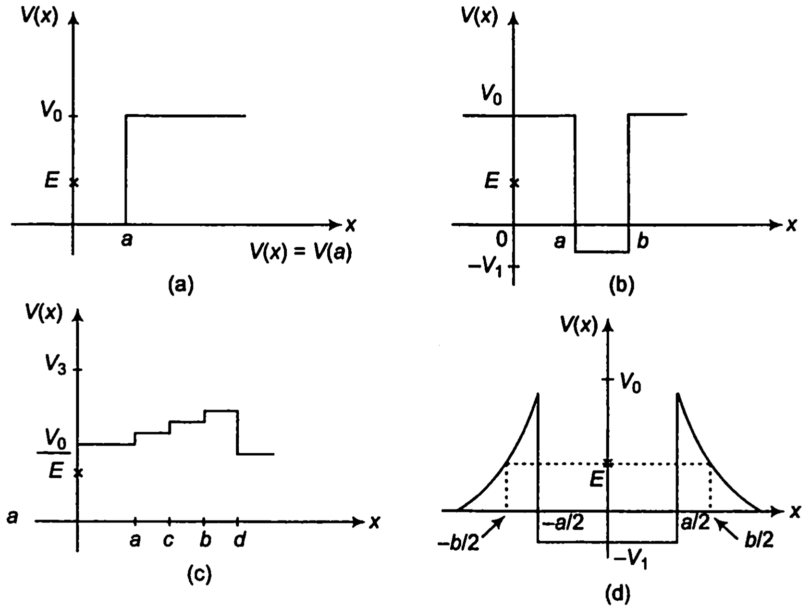
$= 635.04$ जूल

(d) कार्य ऊर्जा प्रमेय के अनुसार

गतिज ऊर्जा में परिवर्तन = किया गया कार्य

$= 635.04$ जूल

प्रश्न 3. चित्र में कुछ एकविमीय स्थितिज ऊर्जा-फलनों के उदाहरण दिए गए हैं। कण की कुल ऊर्जा कोटि-अक्ष पर क्रॉस द्वारा निर्देशित की गई है। प्रत्येक स्थिति में, कोई ऐसे क्षेत्र बताइए, यदि कोई हैं तो, जिनमें दी गई ऊर्जा के लिए, कण को नहीं पाया जा सकता। इसके अतिरिक्त, कण की कुल न्यूनतम ऊर्जा भी निर्देशित कीजिए। कुछ ऐसे भौतिक संदर्भों के विषय में सोचिए जिनके लिए ये स्थितिज ऊर्जा आकृतियाँ प्रासंगिक हो।



हल किसी वस्तु की कुल ऊर्जा, उस वस्तु की गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा के योग के बराबर होती है। अतः

$$E = KE + PE \quad \Rightarrow \quad KE = E - PE$$

किसी वस्तु की गतिज ऊर्जा ऋणात्मक नहीं हो सकती है तथा किसी भी वस्तु की स्थितिज ऊर्जा कुल ऊर्जा से अधिक नहीं हो सकती है अर्थात् कण ऐसे क्षेत्र में प्रवेश नहीं कर सकता है, जहाँ इसकी गतिज ऊर्जा ऋणात्मक या स्थितिज ऊर्जा कुल ऊर्जा से अधिक होगी। यदि कण की कुल ऊर्जा न्यूनतम होगी यदि गतिज ऊर्जा शून्य है।

(a) क्षेत्र $x = 0$ से $x = a$ तक स्थितिज ऊर्जा शून्य है इसलिए गतिज ऊर्जा धनात्मक होगी। अतः कण इस क्षेत्र में पाया जा सकता है। इस स्थिति में कण की न्यूनतम कुल ऊर्जा शून्य है (ली गयी गतिज ऊर्जा शून्य है)।

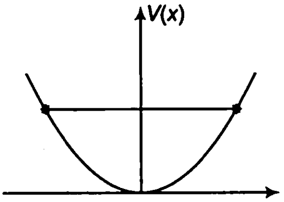
क्षेत्र $(x > a)$ में, स्थितिज ऊर्जा, कुल ऊर्जा से अधिक है इसलिए इस क्षेत्र में गतिज ऊर्जा ऋणात्मक है। अतः कण इस क्षेत्र $(x > a)$ में नहीं पाया जा सकता है।

(b) क्षेत्र $(x < a$ तथा $x > b)$ में हम देख सकते है कि स्थितिज ऊर्जा कुल ऊर्जा E से अधिक है, इसलिये गतिज ऊर्जा ऋणात्मक होगी ($\because KE = E - PE$) अतः कण इस क्षेत्र में नहीं पाया जा सकता है। क्षेत्र $(x < a)$ तथा $(x > b)$ में हम देख सकते हैं स्थितिज ऊर्जा ऋणात्मक है, इसलिए गतिज ऊर्जा धनात्मक है। ($\because$ गतिज ऊर्जा = कुल ऊर्जा − स्थितिज ऊर्जा) अतः कण इस क्षेत्र में नहीं पाया जाता है।

(c) इन सभी क्षेत्रों $(x > 0)$ में, स्थितिज ऊर्जा कुल ऊर्जा से अधिक है, इसलिए गतिज ऊर्जा ऋणात्मक होगी। अतः कण इन सभी क्षेत्रों $(x > 0)$ में नहीं पाया जा सकता है। इस स्थिति में कण की कुल न्यूनतम ऊर्जा v_1 होगी।

(d) क्षेत्र $-\frac{b}{2} < x < -\frac{a}{2}$ तथा $\frac{a}{2} < x < \frac{b}{2}$ में स्थितिज ऊर्जा कुल ऊर्जा से अधिक है इसलिए गतिज ऊर्जा ऋणात्मक होगी। अतः कण इन क्षेत्रों में नहीं पाया जा सकता है। क्षेत्र $\frac{a}{2} > x > -\frac{a}{a}$ में स्थितिज ऊर्जा ऋणात्मक है तथा क्षेत्र $x < -\frac{b}{2}$ और $x > \frac{b}{2}$ में भी स्थितिज ऊर्जा ऋणात्मक है तथा स्थिजित ऊर्जा कुल ऊर्जा से कम है इसलिए इन सभी क्षेत्रों में गतिज ऊर्जा धनात्मक होगी। अतः कण इन क्षेत्रों में पाया जा सकता है। इस स्थिति में कण की कुल न्यूनतम ऊर्जा $-U_1$ होगी।

प्रश्न 4. रेखीय सरल आवर्त गति कर रहे किसी कण का स्थितिज ऊर्जा फलन $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ है, जहाँ k दोलक का बल नियतांक है। $k = 0.5 \text{ Nm}^{-1}$ के लिए $V(x)$ व x के मध्य ग्राफ चित्र 6.12 में दिखाया गया है। यह दिखाइए कि इस विभव के अन्तर्गत गतिमान कुल 1 J ऊर्जा वाले कण को अवश्य ही 'वापिस आना' चाहिए अब यह $x = \pm 2$ m पर पहुँचता है।



हल किसी क्षण सरल आवर्त गति में दोलन करते कण की कुल ऊर्जा

$$E = PE + KE \quad \ldots(i)$$

दिया गया है, किसी कण की स्थितिज ऊर्जा $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

कुल ऊर्जा $E = 1\text{J}$

दोलन का बल नियतांक $k = 0.5 \text{ N/m}$

जब कण अपनी महत्त्म स्थिति पर है (वह स्थिति जहाँ से कण अपनी मध्यमान स्थिति में वापस लौटता है) तब कण का वेग शून्य होगा। अतः इसकी गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2 = 0 \quad (\because v = 0)$

यह मान समीकरण (i) में रखने पर

$$1 = \frac{1}{2}kx^2 + 0$$

$$1 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times x^2$$

$$x^2 = \frac{2}{0.5} = 4 \quad \text{तथा } x = \pm 2\text{ m}$$

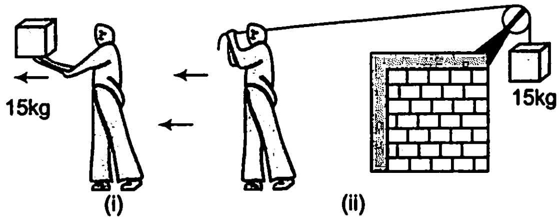
प्रश्न 5. निम्नलिखित का उत्तर दीजिए।

(a) किसी रॉकिट का बाह्य आवरण उड़ान के दौरान घर्षण के कारण जल जाता है। जलने के लिए आवश्यक ऊष्मीय ऊर्जा किसके व्यय पर प्राप्त की गई–राकेट या वातावरण?

(b) धूमकेतु सूर्य के चारों ओर बहुत ही दीर्घवृत्तीय कक्षाओं में घूमते हैं। साधारणतया धूमकेतु पर सूर्य का गुरुत्वीय बल धूमकेतु के लम्बवत् नहीं होता है। फिर भी धूमकेतु की सम्पूर्ण कक्षा में गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है। क्यों?

(c) पृथ्वी के चारों ओर बहुत ही क्षीण वायुमण्डल में घूमते हुए किसी कृत्रिम उपग्रह की ऊर्जा धीरे-धीरे वायुमण्डलीय प्रतिरोध (चाहे यह कितना ही कम क्यों न हो) के विरुद्ध क्षय के कारण कम होती जाती है फिर भी जैसे-जैसे कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी के समीप आता है तो उसकी चाल में लगातार वृद्धि क्यों होती है?

(d) चित्र (i) में एक व्यक्ति अपने हाथों में 15 kg का कोई द्रव्यमान लेकर 2 m चलता है। चित्र (ii) में वह उतनी ही दूरी अपने पीछे रस्सी को खींचते हुए चलता है। रस्सी घिरनी पर चढ़ी हुई है और उसके दूसरे सिरे पर 15 kg का द्रव्यमान लटका हुआ है। परिकलन कीजिए कि किस स्थिति में किया गया कार्य अधिक है?



हल (a) रॉकेट के उड़ान के दौरान, उसके बाह्य आवरण के जलने में आवश्यक ऊष्मीय ऊर्जा राकेट से प्राप्त होती है। यह ऊर्जा वातावरण से प्राप्त नहीं होती है जब बाह्य आवरण जलता है तब रॉकेट का द्रव्यमान घटता जाता है अतः रॉकेट की कुल ऊर्जा घटती जाती है।

(b) गुरुत्वीय बल एक संरक्षी बल है तथा बद्ध पथ पर संरक्षी बल द्वारा किया गया कुल कार्य शून्य होता है। इसलिए धूमकेतु की प्रत्येक सम्पूर्ण कक्षा के अनुदिश गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है।

(c) जब कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी के निकट आता है तो इसकी गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कम हो जाती है। (क्योंकि पृथ्वी की सतह से ऊँचाई कम होती जाती है) चूँकि ऊर्जा संरक्षण के नियम से गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा का वेग नियत रहता है इसलिए स्थितिज ऊर्जा घटने पर गतिज ऊर्जा बढ़ती जाती है। गतिज ऊर्जा का मान $K = \frac{1}{2}mv^2$ होता है। जब गतिज ऊर्जा बढ़ती है तो वेग भी बढ़ता है जबकि उपग्रह की ऊर्जा धीरे-धीरे वायुमण्डलीय प्रतिरोध के विरुद्ध क्षय के कारण कम होती जाती है।

(d) प्रथम स्थिति में व्यक्ति, 15 किग्रा वाले भार पर ऊपर की ओर बल लगाता है जिसकी दिशा भार की दिशा के विपरीत है तथा व्यक्ति 2 मी तक क्षैतिज दिशा में चलता है तब आरोपित बल तथा विस्थापन के बीच का कोण 90° होता है।

∴ किया गया कार्य $W = Fs\cos 90°$

$= 0$ $(\because \cos 90° = 0)$

द्वितीय स्थिति में व्यक्ति द्वारा आरोपित बल की दिशा क्षैतिज है तथा वह क्षैतिज दिशा में गति करता है इसलिए आरोपित बल तथा विस्थापन के कोण शून्य होगा।

∴ किया गया कार्य $W = Fs\cos 0° = 15 \times 9.8 \times 2 = 294\text{ J}$

अतः द्वितीय स्थिति में किया गया कार्य अधिक है।

प्रश्न 6. सही विकल्प को रेखांकित कीजिए

(a) **जब कोई संरक्षी बल किसी वस्तु पर धनात्मक कार्य करता है तो वस्तु की स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है/घटती है/अपरिवर्ती रहती है।**

(b) **किसी वस्तु द्वारा घर्षण के विरुद्ध किए गए कार्य का परिणाम हमेशा इसकी गतिज/स्थितिज ऊर्जा में क्षय होता है।**

(c) **किसी बहुकण निकाय के कुल संवेग-परिवर्तन की दर निकाय के बाह्य बल/आन्तरिक बलों के जोड़ के अनुक्रमानुपाती होती है।**

(d) **किन्हीं दो पिण्डों के अप्रत्यास्थ संघट्ट में वे राशियाँ, जो संघट्ट के बाद नहीं बदलती है। निकाय की कुल गतिज ऊर्जा/कुल रेखीय संवेग/कुल ऊर्जा है।**

हल (a) वस्तु की स्थितिज ऊर्जा घट जाती है। जब वस्तु आरोपित बल की दिशा में विस्थापित होती है तब संरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य धनात्मक होता है तथा वस्तु की गति बल के केन्द्र की ओर होती है जिससे x का मान घटता जाता है अतः इसकी स्थितिज ऊर्जा घटती जाती है।

(b) किसी वस्तु द्वारा घर्षण बल के विरुद्ध किया गया कार्य का परिणाम हमेशा इसकी गतिज ऊर्जा के रूप में क्षय होता है किसी वस्तु द्वारा घर्षण के विरुद्ध किया गया कार्य गतिज ऊर्जा में अधिक क्षय के बराबर होता है (घर्षण के कारण वस्तु की चाल घट जाती है।) अतः वस्तु की गतिज ऊर्जा घट जाती है।

(c) आन्तरिक बल, कणों के निकाय का कुल संवेग परिवर्तित नहीं कर सकते हैं। संवेग संरक्षण के नियम से हम जानते है कि यदि निकाय पर कोई बाह्य बल कार्य नहीं करता है तो इसका कुल संवेग नियत रहता है। इसका अर्थ यह है कि केवल बाह्य बल हो निकाय का संवेग परिवर्तित कर सकते हैं। अतः किसी बहुकण निकाय के कुल संवेग-परिवर्तन की दर निकाय के बाह्य बल, आन्तरिक बलों के योग के अनुक्रमानुपाती होती है।

(d) किन्हीं दो पिण्डों के अप्रत्यास्थ संघट्ट में कुल रेखीय संवेग तथा कुल ऊर्जा नहीं बदलती है।

प्रश्न 7. बतलाइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर के लिए कारण भी दीजिए।

(a) **किन्हीं दो पिण्डों के प्रत्यास्थ संघट्ट में, प्रत्येक पिण्ड का संवेग व ऊर्जा संरक्षित रहती है।**

(b) **किसी पिण्ड पर चाहे कोई भी आन्तरिक व बाह्य बल क्यों न लग रहा हो, निकाय की कुल ऊर्जा सर्वदा संरक्षित रहती है।**

(c) **प्रकृति में प्रत्येक बल के लिए किसी बन्द लूप में, किसी पिण्ड की गति में किया गया कार्य शून्य होता है।**

(d) **किसी अप्रत्यास्थ संघट्ट में, किसी निकाय की अन्तिम गतिज ऊर्जा, आरम्भिक गतिज ऊर्जा से हमेशा कम होती है।**

हल (a) असत्य, प्रत्यास्थ संघट्ट में, कुल संवेग तथा कुल ऊर्जा नियत रहता है। तथा प्रत्येक पिण्ड का संवेग निकाय की तथा ऊर्जा संरक्षित नहीं रहती है।

(b) असत्य, क्योंकि निकाय पर कार्य करने वाला बाह्य बल निकाय की कुल ऊर्जा परिवर्तित कर सकता है।

(c) असत्य, क्योंकि वस्तु की गति के दौरान बंद पथ पर किया गया कार्य संरक्षी बल के लिए (जैसे गुरुत्वीय बल, विद्युत स्थैतिक आदि बल) शून्य होता है, लेकिन असंरक्षी बल (जैसे घर्षण बल आदि) के लिए शून्य नहीं होता है।

(d) सत्य, कभी-कभी ऐसा होता है लेकिन हमेशा ऐसा होना जरुरी नहीं होता है इसका कारण यह है अप्रत्यास्थ संघट्ट में कुल गतिज ऊर्जा ऊर्जाओं के अन्य रूप में परिवर्तित हो जाती है जैसे ध्वनि ऊर्जा, ऊष्मीय ऊर्जा आदि।

प्रश्न 8. निम्नलिखित का उत्तर ध्यानपूर्वक, कारण सहित दीजिए

(a) किन्हीं दो बिलियर्ड-गेंदों के प्रत्यास्थ संघट्ट में, क्या गेंदों के संघट्ट की अल्पावधि में (जब वे सम्पर्क में होती हैं) कुल गतिज ऊर्जा संरक्षित रहती है?

(b) दो गेंदों के किसी प्रत्यास्थ संघट्ट की लघु अवधि में क्या कुल रेखीय संवेग संरक्षित रहता है?

(c) किसी अप्रत्यास्थ संघट्ट के लिए प्रश्न (a) व (b) के लिए आपके उत्तर क्या हैं?

(d) यदि दो बिलियर्ड-गेंदों की स्थितिज ऊर्जा केवल उनके केन्द्रों के मध्य, पृथक्करण-दूरी पर निर्भर करती है तो संघट्ट प्रत्यास्थ होगा या अप्रत्यास्थ (ध्यान दीजिए कि यहाँ हम संघट्ट के दौरान बल के संगत स्थितिज ऊर्जा की बात कर रहे हैं, ना कि गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा की)

हल (a) नहीं, किन्हीं दो बिलियर्ड-गेंदों के प्रत्यास्थ संघट्ट में, गेंदों की संघट्ट की अल्पावधि कुल गतिज ऊर्जा संरक्षित नहीं रहती है।
क्योंकि संघट्ट की अल्पावधि के दौरान गतिज ऊर्जा का एक भाग गेंदों विकृत होने में प्रयोग हो जाता है। प्रत्यास्थ संघट्ट में गतिज ऊर्जा संघट्ट के पहले तथा संघट्ट के बाद समान रहती है।

(b) हाँ, दो गेंदों के किसी प्रत्यास्थ संघट्ट की लघु अवधि में कुल रेखीय संवेग संरक्षित रहता है।

(c) अप्रत्यास्थ संघट्ट में, संघट्ट के दौरान कुल ऊर्जा संरक्षित नहीं रहती है तथा संघट्ट के बाद कुल रेखीय संवेग नियत रहता है।

(d) यदि संघट्ट के दौरान संरक्षी बल कार्य करता है तो संघट्ट प्रत्यास्थ होता है।

प्रश्न 9. कोई पिण्ड जो विरामावस्था में है, अचर त्वरण से एकविमीय गति करता है। इसको किसी t समय पर दी गई शक्ति अनुक्रमानुपाती है।

(i) $t^{1/2}$ (ii) t (iii) $t^{3/2}$ (iv) t^2

हल (b) माना m द्रव्यमान की कोई वस्तु बल F के प्रभाव में त्वरण a के साथ एकविमीय गति करती है।

$$\text{त्वरण } (a) = \frac{F}{m} \quad \ldots(i)$$

गति की समीकरण से $v = u + at$

$$\Rightarrow \quad v = 0 + \frac{F}{m} \cdot t \quad (\because u = 0)$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{F}{m} t \quad \ldots(ii)$$

पिण्ड की शक्ति $(P) = Fv$

यह मान समी (ii) में रखने पर

$$\Rightarrow \quad P = F \times \frac{F}{m} \times t$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{F^2}{m} t$$

$$P = \frac{F^2}{m^2} \times mt \quad = a^2 mt \qquad \text{[समी (i) से]}$$

चूँकि द्रव्यमान m तथा त्वरण a नियत हैं।

$$\therefore \quad P \propto t$$

प्रश्न 10. एक पिण्ड अचर शक्ति के स्रोत के प्रभाव में एक ही दिशा में गतिमान है। इसका t समय में विस्थापन, अनुक्रमानुपाती है।

(a) $t^{1/2}$, (b) t, (c) $t^{3/2}$, (d) t^2.

हल (c) हम जानते है।

$$\text{KE} = \text{किया गया कार्य} = \text{शक्ति} \times \text{समय}$$

लेकिन

$$\text{KE} = \frac{1}{2} mv^2$$

$$\therefore \quad \text{KE} = \frac{1}{2} mv^2 = P \times t$$

या

$$v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}} = \sqrt{\frac{2P}{m}}\, t^{1/2} \qquad \ldots(i)$$

किसी पिण्ड का वेग विस्थापन में परिवर्तन की दर के बराबर होता है।

अर्थात् $v = \frac{dx}{dt}$ या $dx = vdt$

यह मान समी (i) में रखने पर

$$dx = \sqrt{\frac{2P}{m}}\, t^{1/2} dt$$

t समय में वस्तु द्वारा तय किया गया विस्थापन

$$\int dx = \int \sqrt{\frac{2P}{m}}\, t^{1/2} dt$$

$$x = \sqrt{\frac{2P}{m}} \left(\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2P}{m}} \frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2P}{m}}\, t^{3/2}$$

पिण्ड की शक्ति P तथा द्रव्यमान m नियत हैं

$\therefore \qquad x \propto t^{3/2}$

द्वितीय विधि

समय t में वस्तु द्वारा प्राप्त किया गया वेग,

$$v = u + at$$

$$v = 0 + at \qquad (\because u = 0)$$

या $\qquad v = at \qquad \ldots(i)$

शक्ति $P = F.v$

लेकिन $\qquad F = ma$

$\therefore \qquad P = ma \times at \qquad$ [समी (i) से]

$$P = ma^2t$$

या $\qquad a = \sqrt{\dfrac{P}{mt}} \qquad \ldots(ii)$

गति की समीकरण से

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = 0.t + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{P}{mt}}\right) \times t^2$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{m}}t^{2-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{m}}t^{3/2}$$

पिण्ड की शक्ति P तथा द्रव्यमान m नियत हैं।

$\therefore \qquad x \propto t^{3/2}$

प्रश्न 11. **किसी पिण्ड पर नियत बल लगाकर उसे किसी निर्देशांक प्रणाली के अनुसार z-अक्ष के अनुदिश गति करने के लिए बाध्य किया गया है जो इस प्रकार है।**

$$\mathbf{F} = (-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})\ \text{N}$$

जहाँ $\hat{i}$, $\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ क्रमशः x, y एवं z-अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश हैं। इस वस्तु को z-अक्ष के अनुदिश 4 मी की दूरी तक गति कराने के लिए आरोपित बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा?

किया गया कार्य $(W) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$

स्केलर गुणन $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$

और $\qquad \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$

हल पिण्ड पर लगा नियत बल, $\mathbf{F} = (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}})\,\text{N}$

विस्थापन, $\mathbf{s} = (4\hat{\mathbf{k}})\,\text{m} = (0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}})\,\text{m}$

अतः बल द्वारा किया गया कार्य

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$$
$$= (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}})\cdot(0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}})$$
$$= (-1\times 0) + (2\times 0) + (3\times 4)$$
$$= 0 + 12$$
$$[\because \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1 \text{ और } \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0]$$
$$= 12\,\text{J}$$

प्रश्न 12. किसी अंतरिक्ष किरण प्रयोग में एक इलेक्ट्रॉन और एक प्रोटॉन का संसूचन होता है जिसमें पहले कण की गतिज ऊर्जा 10 keV है और दूसरे कण की गतिज ऊर्जा 100 keV है। इनमें कौन-सा तीव्रगामी है, इलेक्ट्रॉन या प्रोटॉन? इनकी चालों का अनुपात ज्ञात कीजिए। (इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान $= 9.11\times 10^{-31}$ kg, प्रोटॉन का द्रव्यमान $= 1.67\times 10^{-27}$ kg, 1 eV $= 1.60\times 10^{-19}$ J)

हल इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान, $(m_e) = 9.11\times 10^{-31}$ kg

प्रोटॉन का द्रव्यमान, $(m_p) = 1.67\times 10^{-27}$ kg

हम जानते हैं कि $1\,\text{eV} = 1.60\times 10^{-19}\,\text{J}$

इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा, $(K_e) = 10\,\text{keV}$

$$= 10\times 10^3\,\text{eV}$$
$$= 10\times 10^3 \times 1.60\times 10^{-19}\,\text{J}$$
$$= 1.6\times 10^{-15}\,\text{J}$$

यदि इलेक्ट्रॉन, वेग v_e से गति कर रहा है, तब इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा

$$K_e = \frac{1}{2}m_e v_e^2$$

लेकिन, $K_e = 1.6\times 10^{-15}$ J

$\therefore$ $\frac{1}{2}m_e v_e^2 = 1.6\times 10^{-15}$

मान रखने पर

$$\frac{1}{2}\times 9.11\times 10^{-31} v_e^2 = 1.6\times 10^{-15}\,\text{J}$$

या $$v_e = \sqrt{\frac{2\times 1.6\times 10^{-15}}{9.11\times 10^{-31}}} = \sqrt{\frac{3.2}{9.11}\times 10^{16}}$$

या $v_e = 5.93 \times 10^7$ m/s

प्रोटॉन की गतिज ऊर्जा, $(K_p) = 100\,\text{keV}$

$= 100 \times 10^3$ eV

$= 100 \times 10^3 \times 1.60 \times 10^{-19}$ J

$= 1.6 \times 10^{-14}$ J

यदि प्रोटॉन, वेग v_p से गति कर रहा है, तब प्रोटॉन की गतिज ऊर्जा

$$K_p = \frac{1}{2} m_p v_p^2$$

लेकिन $K_p = 1.6 \times 10^{-14}$ J

∴ $\frac{1}{2} m_p v_p^2 = 1.6 \times 10^{-14}$

मान रखने पर $\frac{1}{2} \times 1.67 \times 10^{-27} v_1^2 = 1.6 \times 10^{-14}$

या $v_p = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-14}}{1.67 \times 10^{-27}}} = \sqrt{\frac{3.2}{1.67} \times 10^{13}}$

या $v_p = 4.38 \times 10^6$ m/s

उपरोक्त स्थिति से हमें ज्ञात होता है, कि $v_e > v_p$

अर्थात् इलेक्ट्रॉन का वेग प्रोटॉन के वेग से अधिक होता है इसलिए इलेक्ट्रॉन की गति प्रोटॉन से अधिक होती है।

इलेक्ट्रॉन तथा प्रोटॉन की चाल का अनुपात

$$\frac{v_e}{v_p} = \frac{5.93 \times 10^7}{4.38 \times 10^6} = \frac{5930}{438} = 13.5$$

प्रश्न 13. 2 मिमी त्रिज्या की वर्षा की कोई बूँद 500 मी की ऊँचाई से पृथ्वी पर गिरती है। यह अपनी आरम्भिक ऊँचाई के आधे हिस्से तक (वायु के श्यान प्रतिरोध के कारण) घटते त्वरण के साथ गिरती है और अपनी अधिकतम (सीमान्त) चाल प्राप्त कर लेती है और उसके बाद एकसमान चाल से गति करती है। वर्षा की बूँद पर उसकी यात्रा के पहले व दूसरे अर्ध भागों में गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा? यदि बूँद की चाल पृथ्वी तक पहुँचने पर 10 मी/से हो तो सम्पूर्ण यात्रा में प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा?

हल बूँद की त्रिज्या $(r) = 2\text{ mm} = 2 \times 10^{-3}$ m

जल का घनत्व $(\rho) = 10^3\ \text{kg/m}^3$

बूँद का आयतन $(V) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times (2 \times 10^{-3})^3$

$= \frac{4 \times 3.14 \times 8 \times 10^{-9}}{3}$

$= 3.35 \times 10^{-8}\ \text{m}^3$

बूँद का द्रव्यमान (m) = आयतन × घनत्व

$= 3.35 \times 10^{-8} \times 10^{3}$

$= 3.35 \times 10^{-5}$ kg

(जब बूँद पर लगने वाला कुल बल शून्य हो जाता है तब बूँद सीमान्त वेग प्राप्त करती है।)

बूँद पर लगने वाला गुरुत्व बल = बूँद का भार

$$F = mg$$

$$= 3.35 \times 10^{-5} \times 9.8$$

$$= 32.83 \times 10^{-5} = 328 \times 10^{-4} \text{ N}$$

यात्रा के पहले भाग में तय की गयी दूरी

$$S = \frac{H}{2} = \frac{500}{2} = 250 \text{ m}$$

यात्रा के पहले अर्द्ध भाग में गुरुत्वीय बल द्वारा बूँद पर किया गया कार्य

$$W = F \times s$$

$$= 328 \times 10^{-4} \times 250$$

$$= 820.00 \times 10^{-4} \text{ J} = 0.082 \text{ J}$$

गुरुत्वीय बल यात्रा के दूसरे भाग में समान रहता है तथा तय की गयी दूरी भी समान होती है।

∴ यात्रा के दूसरे अर्द्ध भाग में गुरुत्वीय त्वरण द्वारा किया गया कार्य

= यात्रा के पहले अर्द्ध भाग में गुरुत्वीय बल द्वारा बूँद पर किया गया कार्य

= 0.082 J

यदि प्रारम्भ में बूँद विराम अवस्था में है, तब प्रारम्भिक वेग $(u) = 0$

धरातल पर पहुँचने पर अन्तिम वेग $(v) = 10$ m/s (दिया है)

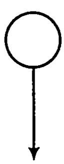
∴ बूँद की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन = अन्तिम गतिज ऊर्जा − प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 - 0 \qquad (\because u = 0, \text{ अतः } \frac{1}{2}mu^2 = 0)$$

$$= \frac{1}{2} \times 3.35 \times 10^{-5} \times (10)^2$$

$$= 1.675 \times 10^{-3} \text{ J} = 0.001675 \text{ J}$$


mg

गुरुत्वीय बल द्वारा बूँद पर किया गया कुल कार्य

$$W = 0.082 + 0.082 = 0.164 \text{ J}$$

यात्रा के दौरान प्रतिरोध बल द्वारा किया गया कार्य

= गतिज ऊर्जा में परिवर्तन − गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य

$= 0.001675 - 0.164 = -0.16225$ J

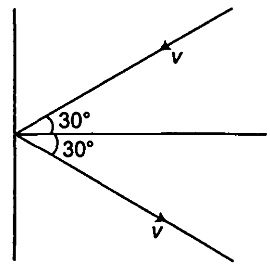
$= -0.162$ J

इसका अर्थ यह है कि प्रतिरोधक बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक है।

प्रश्न 14. किसी गैस-पात्र में कोई अणु 200 मी/से की चाल से अभिलंब के साथ 30° का कोण बनाता हुआ क्षैतिज दीवार से टकराकर पुनः उसी चाल से वापस लौट जाता है। क्या इस संघट्ट में संवेग संरक्षित है? यह संघट्ट प्रत्यास्थ है या अप्रत्यास्थ?

रेखीय संवेग प्रत्यास्थ तथा अप्रत्यास्थ संघट्ट में नियत रहता है जबकि गतिज ऊर्जा केवल प्रत्यास्थ संघट्ट में नियत रहती है।

हल हाँ, चूँकि रेखीय संवेग प्रत्यास्थ तथा अप्रत्यास्थ संघट्ट में नियत रहता है इसलिए इस संघट्ट में रेखीय संवेग नियत रहता है।



अणुओं की चाल संघट्ट से पहले तथा बाद में समान रहती है इसलिए गतिज ऊर्जा नियत रहेगी है। अतः संघट्ट प्रत्यास्थ है।

प्रश्न 15. किसी भवन के भूतल पर लगा कोई पम्प 30 मी^{3} आयतन की पानी की टंकी को 15 मिनट में भर देता है। यदि टंकी पृथ्वी तल से 40 मीटर ऊपर हो और पंप की दक्षता 30% हो तो पंप द्वारा कितनी विद्युत शक्ति का उपयोग किया गया?

हल टंकी का आयतन $(V) = 30\,m^3$

जल का घनत्व $(\rho) = 10^3\ kg/m^3$

$\therefore$ टंकी में भरे जल का द्रव्यमान $m = V \times \rho$ $\left(\because \text{घनत्व} = \dfrac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}}\right)$

$$= 30 \times 10^3$$
$$= 3 \times 10^4\ kg$$

टंकी की ऊँचाई $(h) = 40\,m$

टंकी को भरने में पंप द्वार किया गया कार्य

$$W = mgh$$
$$= 3 \times 10^4 \times 9.8 \times 40$$
$$= 1.176 \times 10^7\ J$$

टंकी को भरने में लिया गया समय = 15 मिनट

$$= 15 \times 60 = 900\,s$$

$\therefore$ $$\text{शक्ति } (P) = \frac{\text{किया गया कार्य}}{\text{लिया गया समय}}$$

$$P = \frac{1.176 \times 10^7}{900}$$

$$= 13.07 \times 10^3 \text{ W}$$

$$= 13.07 \text{ kW}$$

$$\text{पम्प की दक्षता } (\eta) = \frac{\text{निर्गत शक्ति}}{\text{आरोपित शक्ति}} \times 100$$

$\therefore$ $$\text{आरोपित शक्ति} = \frac{\text{निर्गत शक्ति}}{\eta} \times 100$$

$$= \frac{13.07}{30} \times 100$$

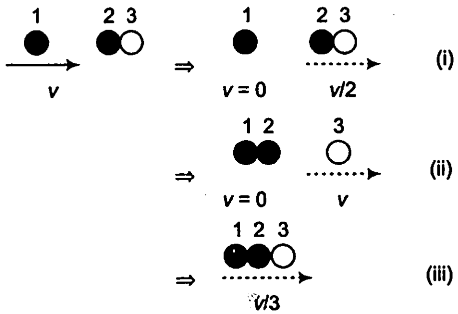
$$= \frac{130.7}{3} \text{ kW}$$

$$= 43.56 \text{ kW}$$

$$= 43.6 \text{ kW}$$

पम्प द्वारा 43.6 किलो वाट शक्ति उपयोग की जाती है।

प्रश्न 16. दो समरूपी बॉल-बियरिंग एक-दूसरे के सम्पर्क में हैं और किसी घर्षणरहित मेज पर विरामावस्था में हैं। इनके साथ समान द्रव्यमान का कोई दूसरा बॉल-बियरिंग, जो आरम्भ में v चाल से गतिमान है, सम्मुख संघट्ट करता है। यदि संघट्ट प्रत्यास्थ है तो संघट्ट के पश्चात् निम्नलिखित (चित्र) में से कौन-सा परिणाम सम्भव है?



हल माना प्रत्येक बॉल-बियरिंग का द्रव्यमान m है।

संघट्ट से पहले

$$\text{बाल बियरिंग की कुल गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m(0)^2 + \frac{1}{2}m(0)^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2$$

संघट्ट के बाद

प्रथम स्थिति में, बॉल बियरिंग की गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2}m(0)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\frac{mv^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{mv^2}{4}$$

$$= \frac{mv^2}{4}$$

द्वितीय स्थिति में, बॉल बियरिंग की गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2}m(0)^2 + \frac{1}{2}m(0)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2$$

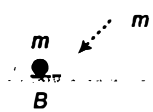
तृतीय स्थिति में, बॉल-बियरिंग की गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{3}\right)^2$$

$$= 3 \times \frac{1}{2}m\frac{v^2}{9} = \frac{mv^2}{6}$$

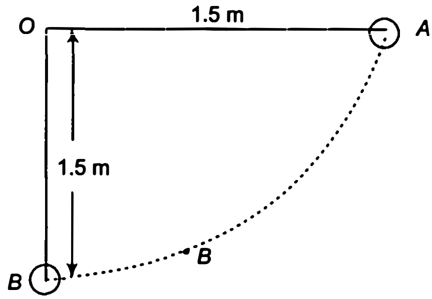
प्रत्यास्थ संघट्ट में, गतिज ऊर्जा संरक्षित रहती है। तथा द्वितीय स्थिति में बॉल-बियरिंग की गतिज ऊर्जा संरक्षित रहती है (यह स्थिति संघट्ट के पश्चात् ही सम्भव है)।

प्रश्न 17. किसी लोलक के गोलक A को, जो ऊर्ध्वाधर से $30°$ का कोण बनाता है, छोड़े जाने पर मेज पर, विरामावस्था में रखे दूसरे गोलक B से टकराता है जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है। ज्ञात कीजिए कि संघट्ट के पश्चात् गोलक A कितना ऊँचा उठता है? गोलकों के आकारों की उपेक्षा कीजिए और मान लीजिए कि संघट्ट प्रत्यास्थ है।



हल जब दो समान द्रव्यमान की वस्तुओं के बीच पूर्णतः प्रत्यास्थ संघट्ट होता है तो उनके वेग आपस में बदल जाते हैं। दी गयी स्थिति में, गोलक B विरामावस्था में है और गोलक A, गोलक B के सापेक्ष कुछ वेग से संघट्ट करता है। अतः संघट्ट के पश्चात् गोलक A विरामावस्था में आ जाता है तथा गोलक B, गोलक A के वेग से गतिमान हो जाता है। अतः गोलक A संघट्ट के पश्चात् ऊँचा नहीं उठेगा।

प्रश्न 18. किसी लोलक के गोलक को क्षैतिज अवस्था से छोड़ा गया है। यदि लोलक की लम्बाई 1.5 मी है तो निम्नतम बिन्दु पर आने पर गोलक की चाल क्या होगी? यह दिया गया है कि इसकी प्रारम्भिक ऊर्जा का 5% अंश वायु प्रतिरोध के विरुद्ध क्षय हो जाता है।



लोलक की लम्बाई = 1.5 m

A स्थिति पर गोलक की स्थितिज ऊर्जा = mgh

जब गोलक बिन्दु A से बिन्दु B की ओर जाता है इसकी स्थितिज ऊर्जा गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है तथा स्थितिज ऊर्जा का 5% वायु का प्रतिरोध के विरुद्ध खर्च हो जाता है।

∴ स्थिति B पर गतिज ऊर्जा = स्थिति A पर स्थितिज ऊर्जा का 95%

अर्थात $$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{95}{100} \times mgh$$

या $$v = \sqrt{\frac{2 \times 95 \times gh}{100}} = \sqrt{\frac{19}{10} \times 9.8 \times 1.5}$$

$$= 5.28 \text{m/s}$$

प्रश्न 19. 300 किग्रा द्रव्यमान की कोई ट्रॉली, 25 किग्रा रेत का बोरा लिए हुए किसी घर्षणरहित पथ पर 27 किमी/घण्टा की एकसमान चाल से गतिमान है। कुछ समय पश्चात् बोरे में किसी छिद्र से रेत 0.05 किग्रा/सेकण्ड की दर से निकलकर ट्रॉली के फर्श पर रिसने लगती है। रेत का बोरा खाली होने के पश्चात् ट्रॉली की चाल क्या होगी?

हल रेत का बोरा लिए हुए ट्रॉली एकसमान वेग से गति कर रही है इस पर लगा बाह्य बल शून्य है। रेत के बोरे सहित ट्रॉली का भार फर्श की अभिलम्ब प्रतिक्रिया द्वारा संतुलित होता है जब बोरे के छिद्र से रेत निकलकर रिसने लगती है तब ट्रॉली पर कोई बाह्य बल आपतित नहीं होता है अतः ट्रॉली की चाल परिवर्तित नहीं होती है।

प्रश्न 20. 0.5 किग्रा द्रव्यमान का एक कण $v = ax^{3/2}$ वेग से सरल रेखीय गति करता है जहाँ $a = 5\ \text{m}^{-1/2}\text{s}^{-1}$ है। $x = 0$ से $x = 2$ मी तथा इसके विस्थापन में कुल बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा?

हल वस्तु का द्रव्यमान $(m) = 0.5$ kg

वस्तु का वेग $(v) = ax^{3/2}$

जहाँ, $a = 5m^{-1/2}/s$

$x = 0$, पर वस्तु का वेग

$$v_1 = 5 \times 0 = 0$$

$x = 2$ पर वस्तु का वेग

$$v_2 = 5 \times (2)^{3/2} \text{ m/s}$$

कार्य-ऊर्जा प्रमेय के अनुसार

$$\text{किया गया कार्य} = \text{गतिज ऊर्जा में परिवर्तन}$$

$$= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$= \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times 0.5\,[5\,(2^{3/2}) - (0)^2]$$

$$= \frac{1}{2} \times 0.5 \times 2.5 \times 2^3$$

$$= \frac{1}{2} \times 12.5 \times 8 = 50 \text{ J}$$

प्रश्न 21. **किसी पवनचक्की के ब्लेड, क्षेत्रफल A के वृत्त जितना क्षेत्रफल प्रसर्प करते हैं। (a) यदि हवा v वेग से वृत्त के लम्बवत् दिशा में बहती है तो t समय में इससे गुजरने वाली वायु का द्रव्यमान क्या होगा? (b) वायु की गतिज ऊर्जा क्या होगी? (c) मान लीजिए कि पवनचक्की हवा की 25% ऊर्जा को विद्युत ऊर्जा में रूपान्तरित कर देती है। यदि $A = 30 \text{ m}^2$ और $v = 36 \text{ kmh}^{-1}$ और वायु का घनत्व 1.2 kg m^{-3} है तो उत्पन्न विद्युत शक्ति का परिकलन कीजिए।**

हल (a) प्रति सेकण्ड पवनचक्की से गुजरने वाली हवा का आयतन $= Av$

t सेकण्ड में पवन चक्की से गुजरने वाली हवा का आयतन $= Av \times t$

$\therefore$ t सेकण्ड में पवनचक्की से गुजरने वाली हवा का द्रव्यमान

$$m = Avt \times \rho \qquad (\because \text{द्रव्यमान} = \text{आयतन} \times \text{घनत्व})$$

$$= Av\rho t$$

(b) हवा की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Av\rho t \times v^2 = \frac{1}{2}Av^3\rho t$

(c) विद्युत ऊर्जा = वायु की गतिज ऊर्जा का 25%

$$E = \frac{25}{100} \times \frac{1}{2}Av^3\rho t$$

$$= \frac{1}{8}Av^3\rho t$$

$\therefore$ पवनचक्की द्वारा उत्पन्न विद्युत शक्ति $= \frac{E}{t} = \frac{1}{8}\frac{Av^3\rho t}{t} = \frac{1}{8}Av^3\rho$

पवनचक्की के ब्लेड द्वारा प्रसर्प किया गया वृत्त का क्षेत्रफल

$$A = 30\,m^2$$

हवा का वेग $(v) = 36\,km/h$

$$= 36 \times \frac{5}{18}\,m/s = 10\,m/s \qquad \left(\because 1\,km/h = \frac{5}{18}\,m/s\right)$$

हवा का घनत्व $(\rho) = 1.2\,kg/m^3$

$\therefore$ विद्युत शक्ति $= \frac{1}{8} \times 30 \times (10)^3 \times 1.2$

$$= 4500\,W = 4.5\,kW$$

प्रश्न 22. कोई व्यक्ति वजन कम करने के लिए 10 किग्रा द्रव्यमान को 0.5 मी की ऊँचाई तक 1000 बार उठाता है। मान लीजिए कि प्रत्येक बार द्रव्यमान को नीचे लाने में खोई हुई ऊर्जा क्षयित हो जाती है।

(a) वह गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध कितना कार्य करता है?

(b) यदि वसा 3.8×10^7 J ऊर्जा प्रति किलोग्राम आपूर्ति करता हो जो कि 20% दक्षता की दर से यांत्रिक ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है तो वह कितनी वसा खर्च कर डालेगा?

हल द्रव्यमान $m = 10\,kg$

ऊँचाई $h = 0.5\,m$

द्रव्यमान को उठाने की संख्या $(n) = 1000$

(a) गुरुत्वीय बल के विरुद्ध किया गया कार्य $= n \times mgh$

$$= 1000 \times 10 \times 9.8 \times 0.5$$

$$= 49000\,J$$

(b) प्रति किलोग्राम वसा द्वारा दी गयी ऊर्जा $= 3.8 \times 10^7$ J

प्रति किलोग्राम वसा द्वारा दी गई यांत्रिक ऊर्जा

= कुल ऊर्जा का 20%

$$= \frac{20}{100} \times 3.8 \times 10^7 = 0.76 \times 10^7\,J/kg$$

व्यक्ति द्वारा प्रयोग की गई वसा $= \frac{1}{0.76 \times 10^7} \times 49000$

$$= 6.45 \times 10^{-3}\,kg$$

प्रश्न 23. कोई परिवार 8 kW विद्युत-शक्ति का उपभोग करता है।

(a) किसी क्षैतिज सतह पर सीधे आपतित होने वाली सौर ऊर्जा की औसत दर $200\,Wm^{-2}$ है। यदि इस ऊर्जा का 20% भाग लाभदायक विद्युत ऊर्जा में रूपान्तरित किया जा सकता है तो 8 kW की विद्युत आपूर्ति के लिए कितने क्षेत्रफल की आवश्यकता होगी?

(b) इस क्षेत्रफल की तुलना किसी विशिष्ट भवन की छत के क्षेत्रफल से कीजिए।

हल किसी परिवार द्वारा उपयोग की गयी शक्ति $(P) = 8\,kW$

(a) प्रति वर्गमी क्षैतिज सतह पर आपतित सौर ऊर्जा $= 200\,W$

प्रति वर्गमी सौर ऊर्जा से उत्पन्न ऊर्जा $= 200 \times \frac{20}{100}\,W$

$= 40\,W$

$\therefore$ 8 kW की विद्युत आपूर्ति के लिए आवश्यक क्षेत्रफल $= \frac{8\,kW}{40\,W}$

$= \frac{8000}{40} = 200\,m^2$

(b) यह क्षेत्रफल $250\,m^2$ के क्षेत्रफल के भवन की छत के तुल्य है।

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 24. 0.012 kg द्रव्यमान की कोई गोली 70 m/s की क्षैतिज चाल से चलते हुए 0.4 kg द्रव्यमान के लकड़ी के गुटके से टकराकर गुटके के सापेक्ष तुरन्त ही विरामावस्था में आ जाती है। गुटके को छत से पतली तारों द्वारा लटकाया गया है। परिकलन कीजिए कि गुटका किस ऊँचाई तक ऊपर उठता है? गुटके में पैदा हुई ऊष्मा की मात्रा का भी अनुमान लगाइए।

हल गोली का द्रव्यमान $(m_1) = 0.012\,kg$

गोली का क्षैतिज वेग $(u_1) = 70\,m/s$

लकड़ी के गुटके का द्रव्यमान $(m_2) = 0.4\,kg$

प्रारम्भ में लकड़ी के टुकड़े का द्रव्यमान $(u_2) = 0$

माना गोली तथा लकड़ी के गुटके का वेग v m/s है।

संवेग संरक्षण के नियम के अनुसार,

(गोली + गुटके) का संघट्ट के पहले रेखीय संवेग

= (गोली + गुटके) का संघट्ट के बाद रेखीय संवेग

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v + m_2v$$

$$0.012 \times 70 + 0.4 \times 0 = 0.012 \times v + 0.4 \times v$$

या $$v = \frac{0.012 \times 70}{0.4 + 0.012}$$

$$= 2.04\,m/s$$

माना लकड़ी का गुटका गोली के साथ h ऊँचाई उठता है

ऊर्जा संरक्षण के नियमानुसार

उच्चतम बिन्दु पर (गोली + गुटके) की गतिज ऊर्जा

= निम्नतम बिन्दु पर (गोली + गुटके) की गतिज ऊर्जा

$\therefore \quad (m_1 + m_2)gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$

या
$$h = \frac{v^2}{2g}$$
$$= \frac{2.04 \times 2.04}{2 \times 9.8}$$
$$= 0.212 \text{ m}$$

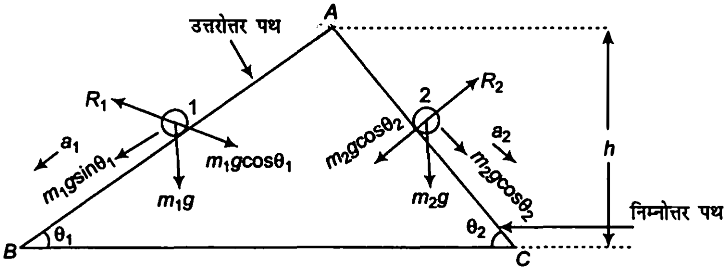
गुटके में उत्पन्न ऊष्मा = गतिज ऊर्जा में कमी

= गोली की प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा − (गोली + गुटके) की अंतिम गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2}m_1u_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$$
$$= \frac{1}{2} \times 0.012 \times (70)^2 - \frac{1}{2}(0.012 + 0.4) \times (2.04)^2$$
$$= 29.4 - 0.86$$
$$= 28.54 \text{ J}$$
$$= \frac{28.54}{42} \text{ cal}$$
$$= 6.8 \text{ cal}$$

प्रश्न 25. दो घर्षणरहित आनत पथ, जिनमें से एक की ढाल अधिक है और दूसरे की ढाल कम है, बिन्दु A पर मिलते हैं। बिन्दु A से प्रत्येक पथ पर एक-एक पत्थर को विरामावस्था से नीचे सरकाया जाता है (चित्र)। क्या ये पत्थर एक ही समय पर नीचे पहुँचेंगे? क्या वे वहाँ एक ही चाल से पहुँचेंगे? व्याख्या कीजिए। यदि $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 60°$ और $h = 10$ m दिया है तो दोनों पत्थरों की चाल एवं उनके द्वारा नीचे पहुँचने में लिए गए समय क्या हैं?

हल माना AB तथा AC घर्षणरहित दो आनत तल जो क्रमशः θ_1 तथा θ_2 कोण पर झुके हैं। AB उत्तरोत्तर पथ है तथा AC निम्नोत्तर पथ है।
माना दो m_1 तथा m_2 द्रव्यमान के दो पत्थर विरामावस्था से नीचे की ओर फिसलना आरम्भ करते हैं।



प्रत्येक तल पर A बिन्दु की ऊँचाई $A = 10$ मी

विभिन्न बल प्रत्येक पत्थर पर कार्य करते हैं।

(i) पत्थर का भार (mg) जो ऊर्ध्वाधरत, नीचे को कार्य करता है अपने दोनों अवयवों क्षैतिज घटक $mg\cos\theta$ तथा ऊर्ध्वाधर घटक $mg\sin\theta$ में विभाजित हो जाता है।

(ii) अभिलम्ब प्रतिक्रिया जो तल के लम्बवत् है।

माना दो पत्थर के तलो तक पहुँचने में वेग v_1 तथा v_2 है।

ऊर्जा संरक्षण के सिद्धान्त अनुसार

स्थितिज ऊर्जा में कमी = गतिज ऊर्जा में वृद्धि

पहले पत्थर के लिए, $m_1gh = \frac{1}{2}m_1v_1^2$ या $v_1 = \sqrt{2gh}$

दूसरे पत्थर के लिए, $m_2gh = \frac{1}{2}m_2v_2^2$

या $v_2 = \sqrt{2gh}$

अतः $v_1 = v_2 = \sqrt{2gh}$

दोनों पत्थर समान वेग से नीचे पहुँचेंगे। पत्थरों के भारों के दोनों अवयव चित्र में प्रदर्शित किये गये हैं।

यदि a_1 तथा a_2 दोनों पत्थरों के त्वरण हो तो उनके भार के क्षैतिज घटक क्रमशः $mg\cos\theta_1$ तथा $m_2g\cos\theta_2$ होंगे तथा भार के यह क्षैतिज घटक अभिलम्ब प्रतिक्रिया R_1 तथा R_2के द्वारा सन्तुलित रहते हैं।

पत्थरों पर लगे कुल बल $m_1g\sin\theta_1$ तथा $m_2g\sin\theta_2$ हैं जो नीचे की ओर कार्य करते हैं। तथा ये बल इन बलों के कारण पत्थर गति करते हैं

$$m_1a_1 = m_1g\sin\theta_1$$

$$a_1 = g\sin\theta_1$$

$$m_2a_2 = m_2g\sin\theta_2$$

या $$a_2 = g\sin\theta_2$$

$$\theta_2 = 30° \text{ and } \theta_1 = 60°$$

∴ $$a_1 = g\sin 30° = g \times \frac{1}{2} = \frac{g}{2}$$

और $$a_2 = g\sin 60° = g \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{g\sqrt{3}}{2}$$

∴ $$a_2 > a_1 \text{ या } \frac{a_2}{a_1} > 1$$

गति की समीकरण से, $v = u + at \Rightarrow v = 0 + at$

($u = 0$ क्योंकि दोनों पत्थर विरामावस्था में है)

या $$v = at$$

या $$a = \frac{v}{t}$$

चूँकि दोनों पत्थर समान वेग से तल पर पहुँचते हैं इसलिए वेग नियत है।

$\therefore$ $$a \propto \frac{1}{t} \text{ या } t \propto \frac{1}{a}$$

$\therefore$ $$\frac{t_1}{t_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

लेकिन $$\frac{a_2}{a_1} > 1$$

$\therefore$ $$\frac{t_1}{t_2} > 1$$

या $$t_1 > t_2$$

अतः दूसरा पत्थर पहले पत्थर से तल पर पहुँचने में कम समय लेगा।

प्रश्न 26. किसी रूक्ष आनत तल पर रखा हुआ 1 kg द्रव्यमान का गुटका किसी 100 Nm^{-1} स्प्रिंग नियतांक वाले स्प्रिंग से दिए गए चित्र के अनुसार जुड़ा है। गुटके को स्प्रिंग की बिना खिंची स्थिति में, विरामावस्था से छोड़ा जाता है। गुटका विरामावस्था में आने से पहले आनत तल पर 10 सेमी नीचे खिसक जाता है। गुटके और आनत तल के मध्य घर्षण गुणांक ज्ञात कीजिए। मान लीजिए कि स्प्रिंग का द्रव्यमान उपेक्षणीय है और घिरनी घर्षणरहित है।

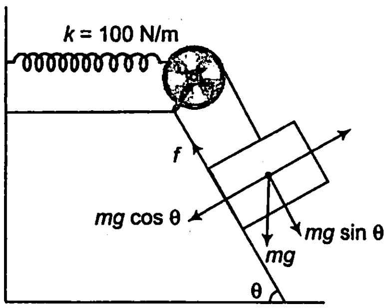
हल गुटके का द्रव्यमान $(m) = 1\,\text{kg}$

गुटके पर विभिन्न प्रकार के बल कार्य करते हैं।

(i) गुटके का भार mg नीचे की ओर कार्य करता है तथा यह अपने क्षैतिज अवयव $mg\cos\theta$ तथा $mg\sin\theta$ में विभाजित हो जाता है।

(ii) तल की अभिलम्ब प्रतिक्रिया जो तल के लम्बवत् कार्य करती है।

(iii) घर्षण बल जो ऊपर की ओर कार्य करता है (जब गुटका नीचे की ओर गति प्रारम्भ करता है।)



स्प्रिंग का बल नियतांक $(k) = 100\,\text{N/m}$

गुटके द्वारा तय विस्थापन $(x) = 10\,\text{cm}$

$= 0.10\,\text{m}$

तथा $g = 10\,\text{m/s}^2$

नत समतल का कोण $(\theta) = 37°$

अभिलम्ब प्रतिक्रिया गुटके के क्षैतिज अवयव $mg\cos\theta$ को सन्तुलित करती है।

$\therefore$ $$R = mg\cos\theta \quad ...(i)$$

$\therefore$ घर्षण बल $(f) = \mu R$

$$= \mu\, mg\cos\theta$$

$\therefore$ नत समतल के अनुदिश गुटके पर लगा कुल बल

$$= (mg\sin\theta - \mu\, mg\cos\theta)$$

सन्तुलन की अवस्था में,

$\therefore$ किया गया कार्य = खींची हुई स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा

$$(mg\sin\theta - \mu\, mg\cos\theta)\times x = \frac{1}{2}kx^2$$

या $$2mg\sin\theta - 2\mu\, mg\cos\theta = kx$$

या $$2mg\sin\theta - kx = 2\mu\, mg\cos\theta$$

गुटके तथा आनत के बीच घर्षण गुणांक $\mu = \dfrac{2mg\sin\theta - kx}{2mg\cos\theta}$

$$= \frac{2\times 1\times 10\times \sin 37° - 100\times 0.1}{2\times 1\times 10\times \cos 37°}$$

$$= \frac{20\times 0.6018 - 10}{20\times 0.7996} \quad (\because \sin 37° = 0.6018, \cos 37° = 0.7996)$$

$$= \frac{2\times 0.6018 - 1}{2\times 0.7996}$$

$$= \frac{1.2036 - 1}{1.5992} = \frac{0.2036}{1.5992} = 0.127$$

प्रश्न 27. 3 kg द्रव्यमान का कोई बोल्ट $7\ ms^{-1}$ की एकसमान चाल से नीचे आ रही किसी लिफ्ट की छत से गिरता है। यह लिफ्ट के फर्श से टकराता है (लिफ्ट की लम्बाई = 3 m) और वापस नहीं लौटता है। टक्कर द्वारा कितनी ऊष्मा उत्पन्न हुई? यदि लिफ्ट स्थिर होती तो क्या आपका उत्तर इससे भिन्न होता?

हल बोल्ट का द्रव्यमान $(m) = 0.3$ kg

लिफ्ट की लम्बाई $(h) = 3$ m

क्योंकि बोल्ट टकराने के बाद उछाल नहीं लेता इसलिए बोल्ट की स्थितिज ऊर्जा ऊष्मा में परिवर्तित हो जाती है।

$\therefore$ उत्पन्न ऊष्मा = बोल्ट की स्थितिज ऊर्जा

$$= mgh = 0.3\times 9.8\times 3$$

$$= 8.82\ J$$

लिफ्ट के गतिमान तथा स्थिर होने की दिशा में उत्तर परिवर्तित नहीं होगा क्योंकि गुरुत्वीय त्वरण सभी जड़त्वीय फ्रेम में समान रहता है।

प्रश्न 28. 200 kg द्रव्यमान की कोई ट्रॉली किसी घर्षणरहित पथ पर 36 kmh^{-1} की एकसमान चाल से गतिमान है। 20 kg द्रव्यमान का कोई बच्चा ट्रॉली के एक सिरे से दूसरे सिरे तक (10 m दूर) ट्रॉली के सापेक्ष 4 ms^{-1} की चाल से ट्रॉली की गति की विपरीत दिशा में दौड़ता है और ट्रॉली से बाहर कूद जाता है। ट्रॉली की अन्तिम चाल क्या है? बच्चे के दौड़ना आरम्भ करने के समय से ट्रॉली ने कितनी दूरी तय की?

हल ट्रॉली का द्रव्यमान $(m_1) = 200$ kg

ट्रॉली की चाल $(v) = 36$ km/h

$$= 36 \times \frac{5}{18} \text{ m/s} \qquad \left(\because 1 \text{ km/h} = \frac{5}{18} \text{ m/s}\right)$$

$$= 10 \text{ m/s}$$

बच्चे का द्रव्यमान $(m_2) = 20$ kg

बच्चे के गति करने के पहले बच्चे तथा ट्रॉली का प्रारम्भिक संवेग

$$p_i = (m_1 + m_2)v$$
$$= (200 + 20) \times 10$$
$$= 2200 \text{ kg-m/s}$$

ट्रॉली के सापेक्ष बच्चे का वेग = 4 m/s

धरातल के सापेक्ष ट्रॉली का अन्तिम वेग v' है

$\therefore$ धरातल के सापेक्ष बच्चे की चाल $= (v' - 4)$ m/s

निकाय का अन्तिम संवेग जब बच्चा गतिमान है

$$p_f = m_1v' + m_2(v' - 4)$$
$$= 200v' + 20(v' - 4)$$
$$= 220v' - 80$$

कोई बाह्य बल निकाय पर कार्य नहीं करता है अतः संवेग संरक्षण के नियम से

प्रारम्भिक संवेग = अन्तिम संवेग

$$p_i = p_f$$
$$2200 = 220v' - 80$$

या $$v' = \frac{2200 + 80}{220} = \frac{2280}{220}$$

$$= 10.36 \text{ m/s}$$

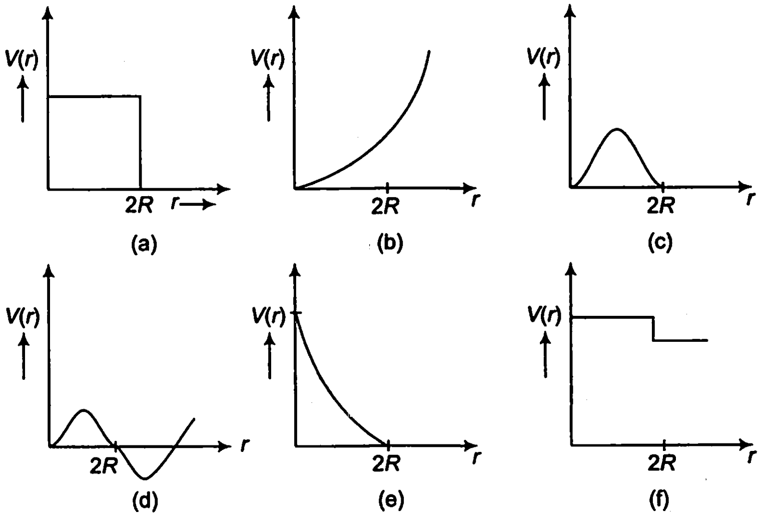
10 मीटर चलने में बच्चे द्वारा लिया गया समय

$$t = \frac{s}{v} = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ s}$$

इसी समय में ट्रॉली द्वारा तय की गयी दूरी

$$s = v' \times t = 10.36 \times 2.5$$
$$= 25.9 \text{ m}$$

प्रश्न 29. नीचे दिए गए चित्रों में स्थितिज ऊर्जा वक्रों में से कौन-सा वक्र संभवतः दो बिलियर्ड-गेंदों के प्रत्यास्थ संघट्ट का वर्णन नहीं करेगा? यहाँ r गेंदों के केन्द्रों के मध्य की दूरी है और प्रत्येक गेंद का अर्धव्यास R है।



हल दो द्रव्यमानों से बने निकाय की स्थितिज ऊर्जा द्रव्यमान के बीच की दूरी के व्युत्क्रमानुपाती होती है।

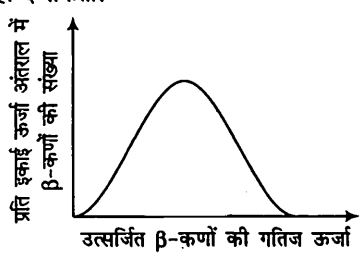
अतः
$$V \propto \frac{1}{r}$$

जब दो बिलियर्ड गेंदें आपस में टकराती हैं तो उनके बीच की दूरी $r = R + R = 2R$ तथा स्थितिज ऊर्जा शून्य होती है।

इन सभी आरेखों में से e आरेख इस स्थिति को दर्शाता है अतः आरेख e दो गेदों के प्रत्यास्थ संघट्ट को वर्णित करता है।

प्रश्न 30. विरामावस्था में किसी मुक्त न्यूट्रॉन के क्षय पर विचार कीजिए $n \rightarrow p + e^{-}$

प्रदर्शित कीजिए कि इस प्रकार के द्विपिंड क्षय से नियत ऊर्जा का कोई इलेक्ट्रॉन अवश्य उत्सर्जित होना चाहिए और इसलिए यह किसी न्यूट्रॉन या किसी नाभिक के β-क्षय में प्रेक्षित सतत ऊर्जा वितरण का स्पष्टीकरण नहीं दे सकता।



***नोट** इस अभ्यास का हल उन कई तर्कों में से एक है जिन्हें डब्ल्यू पॉली द्वारा β-क्षय के क्षय उत्पादों में किसी तीसरे कण के अस्तित्व का पूर्वानुमान करने के लिए दिया गया था। यह कण न्यूट्रिनों के नाम से जाना जाता है। अब हम जानते हैं कि यह निजी प्रचक्रण 1/2 (जैसे e^{-1}, p या n) का कोई कण है। लेकिन यह उदासीन है या द्रव्यमानरहित या (इलेक्ट्रॉन के द्रव्यमान की तुलना में) इसका द्रव्यमान अत्यधिक कम है और जो द्रव्य के साथ दुर्बलता से परस्पर क्रिया करता है। न्यूट्रॉन की उचित क्षय-प्रक्रिया इस प्रकार है $n \rightarrow p + e^{-} + \nu$*

हल मुक्त न्यूट्रॉन की क्षय प्रक्रिया, $n \rightarrow p + e^{-}$

माना इस प्रक्रिया में द्रव्यमान क्षति Δm है।

∴ द्रव्यमान क्षति = न्यूट्रॉन का द्रव्यमान − न्यूट्रॉन व इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान

यह द्रव्यमान क्षति निश्चित है तथा इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा निश्चित होनी चाहिए। अतः द्विपिण्ड क्षय किसी न्यूट्रॉन या किसी नाभिक के β-क्षय में प्रेक्षित सतत ऊर्जा वितरण का स्पष्टीकरण नहीं दे सकता।