Chapter-8

Gravitation

गुरुत्वाकर्षण

प्रश्नावली

प्रश्न 1. निम्नलिखित के उत्तर दीजिए

(a) आप किसी आवेश का वैद्युत बलों से परिरक्षण उस आवेश को किसी खोखले चालक के भीतर रखकर कर सकते हैं। क्या आप किसी पिण्ड का परिरक्षण, निकट में रखे पदार्थ के गुरुत्वीय प्रभाव से, उसे खोखले गोले में रखकर अथवा किसी अन्य साधनों द्वारा कर सकते हैं?

(b) पृथ्वी के परितः परिक्रमण करने वाले छोटे अन्तरिक्षयान में बैठा कोई अन्तरिक्ष यात्री गुरुत्व बल का संसूचन नहीं कर सकता। यदि पृथ्वी के परितः परिक्रमण करने वाला अन्तरिक्ष स्टेशन आकार में बड़ा है, तब क्या वह गुरुत्व बल के संसूचन की आशा कर सकता है?

(c) यदि आप पृथ्वी पर सूर्य के कारण गुरुत्वीय बल की तुलना पृथ्वी पर चन्द्रमा के कारण गुरुत्व बल से करें, तो आप यह पाएंगे कि सूर्य का खिंचाव चन्द्रमा के खिंचाव की तुलना में अधिक है (इसकी जाँच आप स्वयं आगामी अभ्यासों में दिए गए आंकड़ों की सहायता से कर सकते हैं।) तथापि चन्द्रमा के खिंचाव का ज्वारीय प्रभाव सूर्य के ज्वारीय प्रभाव से अधिक है। क्यों?

हल (a) नहीं, किसी पिण्ड का परिरक्षण, निकट में रखे पदार्थ के गुरुत्वीय प्रभाव से उस खोखले गोले में रखकर नहीं किया जा सकता है क्योंकि गुरुत्वाकर्षण बल माध्यम की प्रकृति पर निर्भर नहीं करता है जबकि वैद्युत बल माध्यम पर निर्भर करता है।

(b) हाँ, अन्तरिक्ष यात्री गुरुत्व बल के संसूचन की आशा कर सकता है यदि अन्तरिक्षयान आकार में बड़ा है क्योंकि इस स्थिति में अन्तरिक्षयान के गुरुत्व का परिमाण अनुभव तथा मापने योग्य हो जाएगा।

(c) ज्वारीय प्रभाव गुरुत्वाकर्षण के व्युत्क्रम वर्ग नियम द्वारा नहीं बताया जाता है लेकिन यह दूरी के तृतीय घात के व्युत्क्रमानुपाती द्वारा बताया जा सकता है। चन्द्रमा तथा पृथ्वी के बीच दूरी पृथ्वी तथा सूर्य के बीच दूरी की तुलना में बहुत कम है अतः चन्द्रमा के खिंचाव का ज्वारीय प्रभाव सूर्य के ज्वारीय प्रभाव की तुलना में अधिक है।

प्रश्न 2. सही विकल्प का चयन कीजिए

(a) बढ़ती तुंगता के साथ गुरुत्वीय त्वरण बढ़ता/घटता है।

(b) बढ़ती गहराई के साथ (पृथ्वी को एकसमान घनत्व को गोला मानकर) गुरुत्वीय त्वरण बढ़ता/घटता है।

(c) गुरुत्वीय त्वरण पृथ्वी के द्रव्यमान/पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता।

(d) पृथ्वी के केन्द्र से r_2 तथा r_1 दूरियों के दो बिन्दुओं के बीच स्थितिज ऊर्जा-अन्तर के लिए सूत्र $-GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$, सूत्र $mg\,(r_2 - r_1)$ से अधिक/कम यथार्थ है।

हल (a) पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण

$$g' = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R_e}\right)^2}$$

जहाँ, R_e पृथ्वी की त्रिज्या है।

अतः ऊँचाई बढ़ने के साथ गुरुत्वीय त्वरण घटता जाता है।

(b) पृथ्वी तल से h गहराई पर गुरुत्वीय त्वरण

$$g' = g\left(1-\frac{h}{R_e}\right)$$

अतः गहराई बढ़ने के साथ गुरुत्वीय त्वरण घट जाता है।

(c) गुरुत्वीय त्वरण द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है।

(d) पृथ्वी के केन्द्र से r_2 तथा r_1 दूरियों पर स्थित दो बिन्दुओं के बीच स्थितिज ऊर्जा-अन्तर के लिए सूत्र $-GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$ सूत्र $mg\,(r_2 - r_1)$ से अधिक यथार्थ है।

प्रश्न 3. मान लीजिए एक ऐसा ग्रह है जो सूर्य के परितः पृथ्वी की तुलना में दोगुनी चाल से गति करता है, तब पृथ्वी की कक्षा की तुलना में इसका कक्षीय आमाप क्या है?

किसी ग्रह की कक्षीय गति के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल, ग्रह तथा सूर्य के बीच गुरुत्वीय बल से प्राप्त होता है इसलिए अभिकेन्द्र बल तथा गुरुत्वाकर्षण बल को बराबर रखकर त्रिज्या को ज्ञात किया जा सकता है।

हल माना M_s = सूर्य का द्रव्यमान

M_e = पृथ्वी का द्रव्यमान

r = पृथ्वी की कक्षीय त्रिज्या

r' = ग्रह की कक्षीय त्रिज्या

ω = पृथ्वी का कोणीय वेग

ω' = ग्रह का कोणीय वेग

पृथ्वी के घूमने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल, सूर्य तथा पृथ्वी के बीच लगे गुरुत्वाकर्षण बल से प्राप्त होता है।

अर्थात्
$$\frac{M_e v^2}{r} = \frac{GM_s M_e}{r^2}$$

या
$$v^2 = \frac{GM_s}{r}$$

लेकिन रेखीय वेग $v = r\omega$

$$\therefore \quad (r\omega)^2 = \frac{GM_s}{r}$$

या

$$\omega^2 = \frac{GM_s}{r^3} \quad \text{...(i)}$$

इसी प्रकार, अन्य ग्रह के लिए,

$$\omega'^2 = \frac{GM_s}{r'^3} \quad \text{...(ii)}$$

समी (i) को समी (ii) से भाग देने पर,

$$\therefore \quad \frac{\omega^2}{\omega'^2} = \frac{r'^3}{r^3}$$

या

$$r'^3 = \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 r^3$$

या

$$r' = \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^{2/3} r \quad \text{...(iii)}$$

लेकिन ग्रह सूर्य के परितः पृथ्वी की तुलना में दोगुनी चाल से गति करता है

$$\omega' = 2\omega$$

समी (iii) से,

$$r' = \left(\frac{\omega}{2\omega}\right)^{2/3} r$$

$$\therefore \quad r' = \frac{r}{(2)^{2/3}} = \frac{r}{(4)^{1/3}}$$

$$= \frac{r}{1.49} = 0.63r$$

अतः पृथ्वी की कक्षा की तुलना में ग्रह का कक्षीय आमाप 0.63 गुना कम है।

प्रश्न 4. बृहस्पति के एक उपग्रह, आयो (Io), की कक्षीय अवधि 1.769 दिन तथा कक्षा की त्रिज्या 4.22×10^8 m है। यह दर्शाइए कि बृहस्पति का द्रव्यमान सूर्य के द्रव्यमान का लगभग 1/1000 गुना है।

हल दिया है, बृहस्पति की कक्षीय अवधि

$$T = 1.769 \text{ दिन}$$

$$= (1.769 \times 24 \times 60 \times 60) \text{ s}$$

$$= 1.528 \times 10^5 \text{ s}$$

कक्षा की त्रिज्या $(r) = 4.22 \times 10^8$ m

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N-m}^2/\text{kg}^2$$

सूर्य का द्रव्यमान $M_s = 2 \times 10^{30}$ kg

माना बृहस्पति का द्रव्यमान M_J है।

उपग्रह की कक्षीय गति के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल

= ग्रह तथा उपग्रह के बीच गुरुत्वीय बल

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_J m}{r^2}$$

या $$v^2 = \frac{GM_J}{r}$$

$$(r\omega)^2 = \frac{GM_J}{r} \qquad (\because v = r\omega)$$

$\therefore$ $$\omega^2 = \frac{GM_J}{r^3}$$

लेकिन $\omega = \frac{2\pi}{T}$, जहाँ T आवर्तकाल है।

$\therefore$ $$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM_J}{r^3}$$

या $$M_J = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G}$$

$$= \frac{4 \times (3.14)^2 \times (4.22 \times 10^8)^3}{(1.528 \times 10^5)^2 \times 6.67 \times 10^{-11}}$$

$$= 1.9 \times 10^{27} \text{ kg}$$

$$\approx 2 \times 10^{27} \text{ kg}$$

अब, $$\frac{M_J}{M_s} = \frac{2 \times 10^{27}}{2 \times 10^{30}} \approx \frac{1}{1000}$$

या $$M_J = \frac{1}{1000} M_s$$

अतः बृहस्पति का द्रव्यमान सूर्य के द्रव्यमान का $\frac{1}{1000}$ गुना है।

प्रश्न 5. मान लीजिए कि हमारी आकाशगंगा में एक सौर द्रव्यमान के 2.5×10^{11} तारे हैं। मंदाकिनीय केन्द्र से 50,000 ly दूरी पर स्थित कोई तारा अपनी एक परिक्रमा पूरी करने में कितना समय लेगा? आकाशगंगा का व्यास 10^5 ly लीजिए।

हल हमारी आकाश गंगा में तारों की संख्या $(N) = 2.5 \times 10^{11}$

प्रत्येक तारे का द्रव्यमान = सौर द्रव्यमान

$= 2 \times 10^{30}$ kg

एक आकाशगंगा में तारों का कुल द्रव्यमान $= N \times m$

$= 2.5 \times 10^{11} \times 2 \times 10^{30}$

$= 5.0 \times 10^{41}$ kg

तारे की त्रिज्या $r = 50000$ ly

लेकिन 1 प्रकाश वर्ष (ly) $= 9.46 \times 10^{15}$ m

$\therefore \quad r = 50000 \times 9.46 \times 10^{15}$ m

आकाशगंगा का व्यास $= 10^5$ ly

कक्षीय गति के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल गुरुत्वाकर्षण बल से प्राप्त होता है।

$\therefore$ अभिकेन्द्र बल = गुरुत्वाकर्षण बल

$$\therefore \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

या
$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

$$(r\omega)^2 = \frac{GM}{r} \qquad (\because v = r\omega)$$

या
$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3}$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM}{r^3} \qquad \left(\because \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

या
$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

$$T = \sqrt{\frac{4 \times (3.14)^2 \times (5 \times 9.46 \times 10^{15})^3}{6.67 \times 10^{-11} \times 5 \times 10^{41}}}$$

$$= \sqrt{12527.5 \times 10^{28}}$$

$$= 111.93 \times 10^{14} \text{ s}$$

$$= \frac{111.93 \times 10^{14}}{365 \times 24 \times 3600} \text{ yr}$$

$$= 3.55 \times 10^8 \text{ yr}$$

प्रश्न 6. सही विकल्प का चयन कीजिए

(a) यदि स्थितिज ऊर्जा का शून्य अनन्त पर है, तो कक्षा में परिक्रमा करते किसी उपग्रह की कुल ऊर्जा इसकी गतिज/स्थितिज ऊर्जा का ऋणात्मक है।

(b) कक्षा में परिक्रमा करने वाले किसी उपग्रह को पृथ्वी के गुरुत्वीय प्रभाव से बाहर निकालने के लिए आवश्यक ऊर्जा समान ऊँचाई (जितनी उपग्रह की है) के किसी स्थिर पिण्ड को पृथ्वी के प्रभाव से बाहर प्रक्षेपित करने के लिए आवश्यक ऊर्जा से अधिक / कम होती है।

हल (a) उपग्रह की स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{-GMm}{r}$

उपग्रह की गतिज ऊर्जा $K = \frac{GMm}{2r}$

कुल ऊर्जा $E = U + K = \frac{-GMm}{r} + \frac{GMm}{2r} = \frac{-GMm}{2r} = -K$

अर्थात् गतिज ऊर्जा का ऋणात्मक है।

(b) कक्षा में परिक्रमा करने वाले किसी उपग्रह को पृथ्वी के गुरुत्वीय बल प्रभाव से बाहर निकलने के लिए आवश्यक ऊर्जा समान ऊँचाई के किसी स्थिर पिण्ड को पृथ्वी के प्रभाव से बाहर प्रक्षेपित करने के लिए आवश्यक ऊर्जा से कम होती है क्योंकि उपग्रह की इस स्थिति में पृथ्वी का गुरुत्वीय प्रभाव इसके अभिकेन्द्र बल से सन्तुलित होता है इसलिए कार्य केवल उपग्रह को प्रक्षेपित करने के लिए किया जाता है (गुरुत्व बल के विरुद्ध कोई कार्य नहीं किया जाता है।)

प्रश्न 7. क्या किसी पिण्ड की पृथ्वी से पलायन चाल (a) पिण्ड के द्रव्यमान (b) प्रक्षेपण बिन्दु की अवस्थिति, (c) प्रक्षेपण की दिशा, (d) पिण्ड के प्रमोचन की अवस्थिति की ऊँचाई पर निर्भर करती है?

हल पलायन वेग, $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$

पृथ्वी तल से r दूरी पर पलायन वेग, $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

जहाँ, M तथा R पृथ्वी का द्रव्यमान तथा त्रिज्या है।

(a) नहीं, पलायन वेग पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है।

(b) हाँ, पलायन वेग प्रक्षेपण बिन्दु की स्थिति पर निर्भर करता है

पलायन वेग $v_e = \sqrt{2gR}$

क्योंकि g का मान भिन्न अक्षांशों तथा ऊँचाई पर भिन्न-भिन्न होता है।

(c) नहीं, पलायन वेग प्रक्षेपण की दिशा पर निर्भर नहीं करता है।

(d) हाँ, पलायन वेग पिण्ड के प्रमोचन की अवस्थिति की ऊँचाई पर निर्भर करता है।

प्रश्न 8. कोई धूमकेतु सूर्य की परिक्रमा अत्यधिक दीर्घवृत्तीय कक्षा में कर रहा है। क्या अपनी कक्षा में धूमकेतु की शुरू से अन्त तक (a) रैखिक चाल, (b) कोणीय चाल, (c) कोणीय संवेग, (d) गतिज ऊर्जा, (e) स्थितिज ऊर्जा (f) कुल ऊर्जा नियत रहती है। सूर्य के अति निकट आने पर धूमकेतु के द्रव्यमान में ह्रास को नगण्य मानिए।

हल (a) संवेग संरक्षण के नियमानुसार, $L = mvr =$ नियतांक अतः धूमकेतु जब सूर्य के निकट आता है तो उसकी गति बढ़ जाती है तथा जब सूर्य से दूर जाता है तो उसी गति मन्द हो जाती है।

(b) रेखीय चाल परिवर्तित होने के कारण कोणीय चाल भी परिवर्तित होती है।

(c) धूमकेतु पर कोई बाह्य बल आघूर्ण कार्य नहीं करता है। अतः कोणीय संवेग के संरक्षण के अनुसार, धूमकेतु का कोणीय संवेग नियत रहता है।

(d) धूमकेतु की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2$

जैसे-जैसे धूमकेतु का वेग परिवर्तित होगा गतिज ऊर्जा भी परिवर्तित होती है अतः धूमकेतु की गतिज ऊर्जा नियत नहीं है।

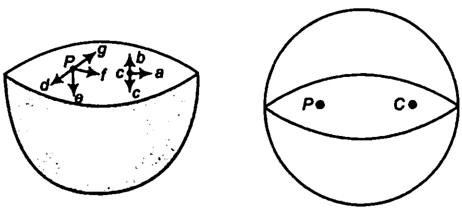
(e) गतिज ऊर्जा में परिवर्तन होने के साथ इसकी स्थितिज ऊर्जा भी परिवर्तित हो जाती है।

(f) धूमकेतु की कुल ऊर्जा नियत रहती है।

प्रश्न 9. निम्नलिखित में से कौन-से लक्षण अन्तरिक्ष में अन्तरिक्ष यात्री के लिए दुख:दायी हो सकते हैं? (a) पैरो में सूजन, (b) चेहरे पर सूजन, (c) सिरदर्द, (d) दिक्‌विन्यास समस्या।

हल (b), (c), (d) अर्थात् चेहरे पर सूजन, सिरदर्द तथा दिक्‌विन्यास समस्या लक्षण अन्तरिक्ष में अन्तरिक्ष यात्री के लिए दुख:दायी होते हैं। अन्तरिक्ष में अन्तरिक्ष यात्री का आंतरिक दाब बाह्य दाब से अधिक हो जाता है जिसके कारण रक्त चाप बढ़ जाता है और यात्री को इन समस्याओं का सामना करना पड़ता है।

प्रश्न 10. एकसमान द्रव्यमान घनत्व के अर्धगोलीय खोलों द्वारा परिभाषित ढोल के पृष्ठ के केन्द्र पर गुरुत्वीय तीव्रता की दिशा (देखिए चित्र) (i) a, (ii) b, (iii) c, (iv) 0 में किस तीर द्वारा दर्शाई जाएगी?



हल गोलीय कोश के अन्दर सभी बिन्दुओं पर गुरुत्वीय विभव समान रहता है।

∴ गोलीय कोश के अन्दर गुरुत्वीय विभव

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr} \text{ (नियतांक)} = 0$$

गुरुत्वीय तीव्रता गुरुत्व विभव प्रवणता के ऋणात्मक मान के बराबर होती है। अतः गुरुत्वीय तीव्रता गोलीय कोश के भीतर सभी बिन्दुओं शून्य होगी। तथा कोश के भीतर सभी स्थानों पर गुरुत्व बल समान रहता है। यदि ऊपरी अर्द्ध गोलीय कोश हटा दिया जाये तब कण जो केन्द्र O पर स्थित है कार्य करने वाले गुरुत्वीय बल की दिशा नीचे की ओर होगी। अर्थात् गुरुत्वीय तीव्रता की दिशा नीचे की ओर होगी।

प्रश्न 11. उपरोक्त समस्या में किसी यादृच्छिक बिन्दु P पर गुरुत्वीय तीव्रता किस तीर (i) d, (ii) e, (iii) f, (iv) g द्वारा व्यक्त की जाएगी?

हल बिन्दु P अर्द्धगोलीय कोश की सतह पर रहता है तथा गुरुत्वीय तीव्रता P बिन्दु पर नीचे की तरफ कार्य करती है।

प्रश्न 12. पृथ्वी से किसी रॉकेट को सूर्य की ओर दागा गया है। पृथ्वी के केन्द्र से किस दूरी पर रॉकेट पर गुरुत्वाकर्षण बल शून्य है? सूर्य का द्रव्यमान $= 2 \times 10^{30}$ kg, पृथ्वी का द्रव्यमान $= 6.0 \times 10^{24}$ kg। अन्य ग्रहों आदि के प्रभावों की उपेक्षा कीजिए

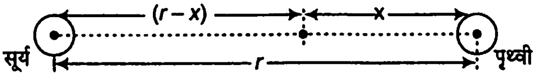
(कक्षीय त्रिज्या $= 1.5 \times 10^{11}$ m)

हल सूर्य का द्रव्यमान $(M_s) = 2 \times 10^{30}$ kg

पृथ्वी का द्रव्यमान $(M_e) = 6.0 \times 10^{24}$ kg

कक्षीय त्रिज्या $(r) = 1.5 \times 10^{11}$ m

माना पृथ्वी के केन्द्र से x दूरी पर कार्य करने वाला गुरुत्वाकर्षण बल शून्य है तथा रॉकेट का द्रव्यमान m है।



सूर्य तथा रॉकेट के बीच गुरुत्वाकर्षण बल = रॉकेट तथा पृथ्वी के बीच गुरुत्वाकर्षण बल

$$\frac{GM_s m}{(r-x)^2} = \frac{GM_e m}{x^2}$$

या $$\frac{M_s}{(r-x)^2} = \frac{M_e}{x^2}$$

या $$\frac{2 \times 10^{30}}{(r-x)^2} = \frac{6 \times 10^{24}}{x^2}$$

या $$\frac{(r-x)^2}{x^2} = \frac{2 \times 10^{30}}{6 \times 10^{24}}$$

$$\frac{(r-x)^2}{x^2} = \frac{10^6}{3}$$

दोनों ओर का वर्गमूल करने पर,

या $$\frac{r-x}{x} = \frac{10^3}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{r}{x} - 1 = \frac{10^3 \times \sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{1.732 \times 1000}{3}$$

या $$\frac{r}{x} = 1 + \frac{1732}{3}$$

$$\frac{r}{x} = \frac{1735}{3}$$

या $$x = \frac{3}{1735} \times r$$

$$= \frac{3 \times 1.5 \times 10^{11}}{1735}$$

$$= 2.594 \times 10^8 \text{ m}$$

$$x = 2.6 \times 10^8 \text{ m}$$

प्रश्न 13. आप सूर्य को कैसे तोलेंगे अर्थात् उसके द्रव्यमान का आकलन कैसे करेंगे? सूर्य के परितः पृथ्वी की कक्षा की औसत त्रिज्या 1.5×10^8 km है।

हल सूर्य के परितः पृथ्वी की कक्षा की औसत त्रिज्या

$$r = 1.5 \times 10^8 \text{ km} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$$

सूर्य के परितः पृथ्वी की आवर्तकाल = 1 वर्ष

= 365 दिन

$= 365 \times 24 \times 60 \times 60$ s

कक्षीय गति के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल, गुरुत्वाकर्षण बल से प्राप्त होता है।

∴ अभिकेन्द्र बल = गुरुत्वाकर्षण बल

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_s m}{r^2}$$

$$v^2 = \frac{GM_s}{r}$$

$$(r\omega)^2 = \frac{GM_s}{r} \qquad (\because v = r\omega)$$

या $$\omega^2 = \frac{GM_s}{r^3}$$

लेकिन $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

∴ $$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM_s}{r^3}$$

या $$M_s = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4 \times (3.14)^2 \times (1.5 \times 10^{11})^3}{6.67 \times 10^{-11}(365 \times 24 \times 60 \times 60)^2}$$

$$\approx 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

प्रश्न 14. एक शनि वर्ष एक पृथ्वी वर्ष का 29.5 गुना है। यदि पृथ्वी सूर्य से 1.5×10^8 km दूरी पर है, तब शनि सूर्य से कितनी दूरी पर है?

हल पृथ्वी वर्ष $T_e = 1$ yr

शनि वर्ष $T_s = 29.5$ yr

पृथ्वी की त्रिज्या $(R_e) = 1.50 \times 10^8$ km

शनि की त्रिज्या $(R_s) = ?$

कैप्लर के नियमानुसार

$$T^2 \propto R^3$$

∴ $$\frac{T_e^2}{T_s^2} = \frac{R_e^3}{R_s^3}$$

$$\left(\frac{1}{29.5}\right)^2 = \frac{(1.50 \times 10^8)^3}{R_s^3}$$

$$R_s^3 = (29.5)^2 \times (1.50 \times 10^8)^3$$

$$= 2.947 \times 10^{27} \text{ km}$$

$$R_s = 2.937 \times 10^{27}$$

$$= 1.43 \times 10^9 \text{ km} = 1.43 \times 10^{12} \text{ m}$$

प्रश्न 15. पृथ्वी के पृष्ठ पर किसी वस्तु का भार 63 N है। पृथ्वी की त्रिज्या की आधी ऊँचाई पर पृथ्वी के कारण इस वस्तु पर गुरुत्वीय बल कितना है?

गुरुत्वीय बल की गणना करने लिए हम गुरुत्व के कारण h ऊँचाई पर त्वरण की गणना करेंगे जो निम्न सूत्र से प्राप्त होगा $g' = \dfrac{g}{\left(1 + \dfrac{h}{R_e}\right)^2}$

हल दिया है, $h = \dfrac{R_e}{2}$

h ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण

$$g' = \frac{g}{\left(1 + \dfrac{h}{R_e}\right)^2} = \frac{g}{\left(1 + \dfrac{R_e/2}{R_e}\right)^2}$$

$$= \frac{g}{\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{g}{(3/2)^2} = \frac{4}{9} \quad \ldots\text{(i)}$$

पृथ्वी की सतह पर वस्तु का भार

$$w = mg = 63 \text{ N} \quad \ldots\text{(ii)}$$

$h = R_e/2$ ऊँचाई पर वस्तु का भार

$$w' = mg' = \frac{4}{9} mg \quad \ldots\text{(iii)}$$

समी (ii) से, $w' = \dfrac{4}{9} \times 63 \; w' = 28 \text{ N}$

प्रश्न 16. यह मानते हुए कि पृथ्वी एकसमान घनत्व का एक गोला है तथा इसके पृष्ठ पर किसी वस्तु का भार 250 N है, यह ज्ञात कीजिए कि पृथ्वी के केन्द्र की ओर आधी दूरी पर इस वस्तु का भार क्या होगा?

वस्तु का पृथ्वी के केन्द्र पर भार ज्ञात करने के लिए हम h गहराई पर गुरुत्वीय त्वरण का मान ज्ञात करते हैं। पृथ्वी की सतह से नीचे जाने पर गुरुत्वीय त्वरण निम्न सूत्र द्वारा प्राप्त होता है।

$$g' = g\left(1 - \frac{h}{R_e}\right)$$

हल पृथ्वी की सतह पर वस्तु का भार

$$w = mg = 250\,\text{N} \quad \ldots\text{(i)}$$

पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई पर गुरुत्वाकर्षण बल

$$g' = g\left(1 - \frac{h}{R_e}\right)$$

यहाँ, $$h = R_e/2$$

$\therefore$ $$g' = g\left(1 - \frac{R_e/2}{R_e}\right)$$

$$= g\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$g' = \frac{g}{2}$$

$\therefore$ h गहराई पर वस्तु का भार

$$w' = mg$$

$$= \frac{mg}{2}$$

समी (i) से,

$$w' = \frac{250}{2}$$

$$= 125\ \text{N}$$

$\therefore$ वस्तु का भार 125 N होगा।

प्रश्न 17. पृथ्वी के पृष्ठ से ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर कोई रॉकेट 5 km/s की चाल से दागा जाता है। पृथ्वी पर वापस लौटने से पूर्व यह रॉकेट पृथ्वी से कितनी दूरी तक जाएगा? पृथ्वी का द्रव्यमान $= 6.0 \times 10^{24}$ kg; पृथ्वी की माध्य त्रिज्या $= 6.4 \times 10^{6}$ मी तथा $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N-m^2/kg^2.

हल माना m द्रव्यमान का रॉकेट v वेग से ऊर्ध्वाधरतः ऊपर को दागा जाता है तथा यह पृथ्वी से h ऊँचाई पर पहुँचता है।

$$\text{रॉकेट की गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{2}mv^2$$

पृथ्वी की सतह पर रॉकेट की स्थितिज ऊर्जा

$$U_0 = -\frac{GM_e m}{R_e}$$

पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई पर रॉकेट की स्थितिज ऊर्जा

$$U_h = -\frac{GM_e m}{(R_e + h)}$$

$\therefore$ स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि $(\Delta U) = U_h - U_0$

$$\Delta U = -\frac{GM_e m}{(R_e + h)} - \left(-\frac{GM_e m}{R_e}\right)$$

$$= GM_e m\left[\frac{1}{R_e} - \frac{1}{(R_e + h)}\right]$$

$$= GM_e m\left[\frac{R_e + h - R_e}{R_e (R_e + h)}\right]$$

$$= GM_e m \times \frac{h}{R_e (R_e + h)}$$

लेकिन $GM_e = g R_e^2$

$\therefore$ $$\Delta U = gR_e^2 \times m \times \frac{h}{R_e (R_e + h)}$$

$$= \frac{mgh}{\frac{R_e (R_e + h)}{R_e^2}} = \frac{mg h}{\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)}$$

ऊर्जा संरक्षण के नियमानुसार,

रॉकेट की गतिज ऊर्जा = स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{mgh}{\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)}$$

$$v^2\left(1 + \frac{h}{R_e}\right) = 2gh$$

$$v^2 + \frac{v^2 h}{R_e} = 2gh$$

या $$v^2 R_e + v^2 h = 2ghR_e$$

$$v^2 R_e = h(2gR_e - v^2)$$

या $$h = \left(\frac{v^2 R_e}{2gR_e - v^2}\right)$$

यहाँ, रॉकेट की चाल $v = 5\,\text{km/s} = 5 \times 10^3$ m/s

पृथ्वी का द्रव्यमान $M_e = 6.0 \times 10^{24}$ kg

पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = 6.4 \times 10^6$ m,

गुरुत्वाकर्षण बल $g = 9.8\,\text{m/s}^2$

$\therefore$ $$h = \frac{(5 \times 10^3)^2 \times 6.4 \times 10^6}{(2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6) - (5 \times 10^3)^2}$$

$$= \frac{25 \times 6.4 \times 10^{12}}{9.8 \times 12.8 \times 10^6 - 25 \times 10^6}$$

$$= 1.6 \times 10^6 \text{ m}$$
$$= 1600 \times 10^3 \text{ m} = 1600 \text{ km}$$

$\therefore$ पृथ्वी के केन्द्र से दूरी $r = R_e + h$

$$= 6.4 \times 10^6 + 1.6 \times 10^6$$
$$= 8.0 \times 10^6 \text{ m}$$

प्रश्न 18. पृथ्वी के पृष्ठ पर किसी प्रक्षेप्य की पलायन चाल 11.2 km/s है। किसी वस्तु को इस चाल की तीन गुनी चाल से प्रक्षेपित किया जाता है। पृथ्वी से अत्यधिक दूर जाने पर इस वस्तु की चाल क्या होगी? सूर्य तथा अन्य ग्रहों की उपस्थिति की उपेक्षा कीजिए।

हल दिया है, पृथ्वी की सतह पर पलायन वेग, (v_e)= 11.2 km/s

वस्तु के प्रक्षेपण की चाल $(v) = 3v_e = 3 \times 11.2 = 33.6$ km/h

माना प्रक्षेपण के समय तथा पृथ्वी से अत्यधिक दूर जाने पर वस्तु की चाल क्रमशः v तथा v' तथा वस्तु का द्रव्यमान m है।

प्रारम्भ में वस्तु की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2$

प्रारम्भ में वस्तु की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा $= -\frac{GM_e m}{R_e}$

जहाँ, M_e तथा R_e पृथ्वी का द्रव्यमान तथा त्रिज्या हैं।

पृथ्वी से अत्यधिक दूर जाने पर, वस्तु की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv'^2$

वस्तु की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा = 0 (शून्य)

ऊर्जा संरक्षण के नियमानुसार,

प्रक्षेपण बिन्दु पर कुल ऊर्जा = पृथ्वी के पृष्ठ से अत्यधिक दूर जाने पर कुल ऊर्जा

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GM_e m}{R_e}\right) = \frac{1}{2}mv'^2 + 0$$

या $$\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_e m}{R_e} \quad \text{...(i)}$$

यदि v_e पलायन वेग है, तब $$\frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{GM_e m}{R_e} \quad \text{...(ii)}$$

समी (ii) से यह मान समी (i) में रखने पर,

$$\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_e^2$$

या $$v'^2 = v^2 - v_e^2$$
$$= (3v_e)^2 - v_e^2 \quad (\because v = 3v_e)$$
$$= 8v_e^2$$

या $v' = 2\sqrt{2}v_e$

$= 2 \times 1.414 \times 11.2$ km/s

$= 31.68$ km/s

∴ पृथ्वी से अत्यधिक दूर जाने पर वस्तु की चाल = 31.68 km/s

प्रश्न 19. कोई उपग्रह पृथ्वी के पृष्ठ से 400 km ऊँचाई पर पृथ्वी की परिक्रमा कर रहा है। इस उपग्रह को पृथ्वी के गुरुत्वीय प्रभाव से बाहर निकालने में कितनी ऊर्जा खर्च होगी? उपग्रह का द्रव्यमान = 200 kg; पृथ्वी का द्रव्यमान = 6.0×10^{24} kg; पृथ्वी की त्रिज्या = 6.4×10^6 m तथा $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N-m²/kg²।

हल दिया है, पृथ्वी की सतह से उपग्रह की ऊँचाई

$$h = 400 \text{ km} = 0.4 \times 10^6 \text{ m}$$

उपग्रह का द्रव्यमान $(m) = 200$ kg

पृथ्वी की त्रिज्या $(R_e) = 6.4 \times 10^6$ m

पृथ्वी का द्रव्यमान $(M_e) = 6.0 \times 10^{24}$ kg

गुरुत्वाकर्षण नियतांक $(G) = 6.67 \times 10^{-11}$ N-m²/kg²

उपग्रह को पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण से बाहर भेजने में आवश्यक ऊर्जा उपग्रह की बन्धन ऊर्जा कहलाती है।

$$\text{उपग्रह की बन्धन ऊर्जा} = \frac{GM_e m}{2(R_e + h)}$$

$$= \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6.0 \times 10^{24} \times 200}{2(6.4 \times 10^6 + 0.4 \times 10^6)}$$

$$= \frac{6.67 \times 12 \times 10^{15}}{2 \times 6.8 \times 10^6}$$

$$= 5.885 \times 10^9 \text{ J} = 5.9 \times 10^9 \text{ J}$$

प्रश्न 20. दो तारे, जिनमे प्रत्येक का द्रव्यमान सूर्य के द्रव्यमान (2×10^{30} kg) के बराबर है, एक दूसरे की ओर सम्मुख टक्कर के लिए आ रहे हैं। जब वे 10^9 km दूरी पर हैं, तब इनकी चाल उपेक्षणीय हैं। ये तारे किस चाल से टकराएंगे? प्रत्येक तारे की त्रिज्या 10^4 km है। यह मानिए कि टकराने के पूर्व तक तारों में कोई विरूपण नहीं होता (G के ज्ञात मान का उपयोग कीजिए)

हल प्रत्येक तारे का द्रव्यमान $(m) = 2 \times 10^{30}$ kg

दोनों तारों के बीच की दूरी $(r_1) = 10^9$ km $= 10^{12}$ m

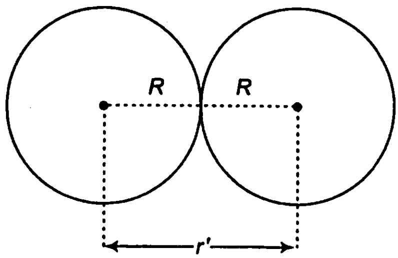
प्रत्येक तारे की त्रिज्या $(R) = 10^4$ km $= 10^7$ m

प्रारम्भ में प्रत्येक तारे की चाल जब वे एक दूसरे से अधिक दूरी पर है $(v_1) = 0$

∴ प्रारम्भ में तारे की गतिज ऊर्जा = 0

प्रारम्भ में, तारे की स्थितिज ऊर्जा $= -\frac{Gmm}{r} = -\frac{Gm^2}{r}$

माना तारे एक दूसरे से v' चाल से संघट्ट करते हैं



जब तारे एक-दूसरे संघट्ट करके तब उनके बीच के दूरी

$$r' = 2R$$

$\therefore$ तारों की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 = mv'^2$

$\therefore$ तारों की स्थितिज ऊर्जा $= -\frac{Gmm}{r'} = -\frac{Gm^2}{2R}$

ऊर्जा संरक्षण के नियमानुसार,

प्रारम्भ में तारों की कुल ऊर्जा = तारों की अन्तिम ऊर्जा

$$0 + \left(-\frac{Gm^2}{r}\right) = mv'^2 + \left(-\frac{Gm^2}{2R}\right)$$

या $$mv'^2 = Gm^2\left[\frac{1}{2R} - \frac{1}{r}\right]$$

$$v'^2 = Gm\left[\frac{1}{2R} - \frac{1}{r}\right]$$

$$= 6.67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}\left[\frac{1}{2 \times 10^7} - \frac{1}{10^{12}}\right]$$

$$= 13.34 \times 10^{19}[5 \times 10^{-8} - 10^{-12}]$$

$$= 13.34 \times 10^{19} \times 4.999 \times 10^{-8}$$

$$= 6.6699 \times 10^{12}$$

या $$v' = \sqrt{6.6699 \times 10^{12}} = 2.583 \times 10^6 \text{ m/s}$$

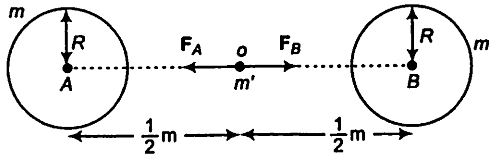
$$v' = 2.6 \times 10^6 \text{ m/s}$$

प्रश्न 21. दो भारी गोले जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान 100 kg त्रिज्या 0.10 m है। किसी क्षैतिज मेज पर एक दूसरे से 1.0 m दूरी पर स्थित है। दोनों गोलों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु पर गुरुत्वीय बल तथा विभव क्या है? क्या इस बिन्दु पर रखा कोई पिण्ड सन्तुलन में होगा? यदि हाँ, तब यह सन्तुलन स्थायी होगा अथवा अस्थायी?

हल दिया है, प्रत्येक गोले का द्रव्यमान $m = 100\,kg$

प्रत्येक गोले की त्रिज्या $R = 0.10\,m$

गोलों के बीच की दूरी $r = 1.0\,m$



प्रत्येक गोले की मध्य बिन्दु से दूरी

$$d = \frac{r}{2} = \frac{1}{2}\,m$$

माना कम द्रव्यमान m' की वस्तु AB के मध्य बिन्दु पर रखी गयी है।

गोले A के कारण m' पर लगने वाला बल

$$\mathbf{F}_A = \frac{Gmm'}{d^2}, \qquad \text{(OA के अनुदिश)}$$

गोले B के कारण द्रव्यमान m' पर लगने वाला बल

$$\mathbf{F}_B = \frac{Gmm'}{d^2}, \qquad \text{(OB के अनुदिश)}$$

$\therefore$ मध्य बिन्दु O पर रखे द्रव्यमान m' पर लगा कुल बल

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = \frac{Gmm'}{d^2} + \left(\frac{-Gmm'}{d^2}\right)$$

$$\mathbf{F} = 0$$

$\therefore$ मध्य बिन्दु O पर गुरुत्वाकर्षण बल शून्य है

गोले A के कारण मध्यबिन्दु O पर गुरुत्वीय विभव

$$V_A = -\frac{Gm}{d}$$

इसी प्रकार, गोले B के कारण मध्यबिन्दु O पर गुरुत्वाकर्षण विभव

$$V_B = -\frac{Gm}{d}$$

$\therefore$ मध्यबिन्दु O पर परिणामी गुरुत्वीय विभव

$$V = V_A + V_B = \left(-\frac{Gm}{d}\right) + \left(-\frac{Gm}{d}\right) = -2 \times \frac{GM}{d}$$

$$= -\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 100}{1/2}$$

$$= -26.68 \times 10^{-9} = -2.7 \times 10^{-8}\ J/kg$$

क्योंकि मध्य बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव शून्य नहीं है अतः सन्तुलन अस्थायी होगा।

प्रश्न 22. जैसा कि आपने इस अध्याय में सीखा है कि कोई तुल्यकाली उपग्रह पृथ्वी के पृष्ठ से लगभग 36,000 km ऊँचाई पर पृथ्वी की परिक्रमा करता है। इस उपग्रह के निर्धारित स्थल पर पृथ्वी के गुरुत्व बल के कारण विभव क्या है? (अनन्त पर स्थितिज ऊर्जा शून्य लीजिए) पृथ्वी का द्रव्यमान $= 6.0 \times 10^{24}$ kg पृथ्वी की त्रिज्या = 6400 km।

हल दिया है, पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = 6400$ km

पृथ्वी का द्रव्यमान $M_e = 6.0 \times 10^{24}$ kg

भू-स्थिर उपग्रह की ऊँचाई $h = 36000$ km

$$\therefore \quad \text{गुरुत्वीय विभव } V = -\frac{GM_e}{(R_e + h)}$$

$$= -\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6.0 \times 10^{24}}{(6400 + 36000) \times 10^3}$$

$$= -\frac{40.02 \times 10^{13}}{42400 \times 10^3}$$

$$= -\frac{40.02}{4.24} \times 10^6 = -9.43 \times 10^6 \text{ J/kg}$$

प्रश्न 23. सूर्य के द्रव्यमान से 2.5 गुने द्रव्यमान का कोई तारा 12 km आमाप से निपात होकर 1.2 परिक्रमण प्रति सेकण्ड से घूर्णन कर रहा है (इसी प्रकार के संहत तारे को न्यूट्रॉन तारा कहते हैं। कुछ प्रेक्षित तारकीय पिण्ड, जिन्हें पल्सर कहते हैं, इसी श्रेणी में आते हैं।) इसके विषुवत् वृत्त पर रखा कोई पिण्ड, गुरुत्व बल के कारण, क्या इसके पृष्ठ से चिपका रहेगा? (सूर्य का द्रव्यमान $= 2 \times 10^{30}$ kg)

हल यदि किसी वस्तु पर लगा गुरुत्वाकर्षण बल अभिकेन्द्र बल के बराबर या इससे अधिक है : तब पिण्ड गुरुत्व के कारण तारे के पृष्ठ से चिपका रहेगा। क्योंकि इस स्थिति में अपकेन्द्र बल गुरुत्वाकर्षण बल से कम होता है इसलिए पिण्ड गिरने के योग्य नहीं रहता है अर्थात्

$$mg \geq \frac{mv^2}{r}$$

या

$$g \geq \frac{v^2}{r}$$

$$\text{दिया है, तारे का द्रव्यमान } (M) = 2.5 \times 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$= 5.0 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$\text{त्रिज्या } (R) = 12 \text{ km} = 12 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\text{गुरुत्वीय त्वरण } (g) = \frac{GM}{R^2}$$

$$= \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.0 \times 10^{30}}{(12 \times 10^3)^2}$$

$$= 0.2316 \times 10^{13} \text{ m/s}^2$$

$$= 2.3 \times 10^{12} \text{ m/s}^2$$

अब, अभिकेन्द्र त्वरण $\frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r}$ $\quad (\because v = r\omega)$

$$= r\omega^2 = r(2\pi n)^2 \quad (\because \omega = 2\pi n)$$

$$= 12 \times 10^3 \times (2 \times 3.14 \times 12)^2$$

$$= (12 \times 10^3 \times 4 \times 9.87 \times 144)$$

$$= 1065.95 \times 10^3$$

$$= 1.1 \times 10^6 \text{ m/s}^2$$

क्योंकि, $g > \frac{v^2}{r}$, अतः पिण्ड तारे के पृष्ठ से चिपका रहेगा।

प्रश्न 24. कोई अन्तरिक्षयान मंगल पर ठहरा हुआ है। इस अन्तरिक्षयान पर कितनी ऊर्जा खर्च की जाए कि इसे सौरमण्डल से बाहर धकेला जा सके। अन्तरिक्षयान का द्रव्यमान = 1000 kg; सूर्य का द्रव्यमान = 2×10^{30} kg; मंगल का द्रव्यमान = 6.4×10^{23} kg; मंगल की त्रिज्या = 3395 km; मंगल की कक्षा की त्रिज्या = 2.28×10^8 km, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N-m²/kg².

हल अन्तरिक्षयान का द्रव्यमान $(m) = 1000$ kg

सूर्य का द्रव्यमान $(M_s) = 2 \times 10^{30}$ kg

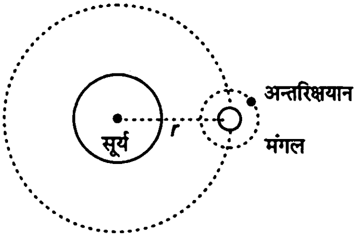
मंगल का द्रव्यमान $(M_m) = 6.4 \times 10^{23}$ kg

मंगल की त्रिज्या $(R_m) = 3395 \text{ km} = 3.395 \times 10^6$ m

मंगल की कक्षा की त्रिज्या $(r) = 2.28 \times 10^8 \text{ km} = 2.28 \times 10^{11}$ m

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N-m}^2/\text{kg}^2$$

अन्तरिक्षयान पर सूर्य तथा मंगल का गुरुत्वाकर्षण बल कार्य करते हैं।



∴ सूर्य के गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र के कारण अन्तरिक्षयान की स्थितिज ऊर्जा

$$= -\frac{GM_s m}{r}$$

मंगल के गुरुत्वाकर्षण के कारण अन्तरिक्षयान की स्थितिज ऊर्जा

$$= -\frac{GM_m m}{R_m}$$

∴ अन्तरिक्षयान की कुल स्थितिज ऊर्जा $= \left(-\frac{GM_s m}{r}\right) + \left(-\frac{GM_m m}{R_m}\right) = -Gm\left[\frac{M_s}{r} + \frac{M_m}{R_m}\right]$

सौर निकाय से बाहर अन्तरिक्षयान की स्थितिज ऊर्जा = 0

∴ अन्तरिक्षयान को सौर मण्डल से बाहर धकेलने में व्यय ऊर्जा

$$= 0 - \left[-Gm\left(\frac{M_s}{r} + \frac{M_m}{R_m}\right)\right]$$

$$= +Gm\left[\frac{M_s}{r} + \frac{M_m}{R_m}\right]$$

$$= 6.67 \times 10^{-11} \times 1000\left[\frac{2 \times 10^{30}}{2.28 \times 10^{11}} + \frac{6.4 \times 10^{23}}{3.395 \times 10^{6}}\right]$$

$$= 6.67 \times 10^{-8}\left[\frac{2 \times 10^{19}}{2.28} + \frac{6.4 \times 10^{13}}{3.395}\right]$$

$$\approx 3.1 \times 10^{11} \text{ J}$$

प्रश्न 25. किसी रॉकेट को मंगल के पृष्ठ से 2 km/s की चाल से ऊर्ध्वाधर ऊपर दागा जाता है। यदि मंगल के वातावरणीय प्रतिरोध के कारण इसकी 20% आरम्भिक ऊर्जा नष्ट हो जाती है, तब मंगल के पृष्ठ पर वापस लौटने से पूर्व यह रॉकेट मंगल से कितनी दूरी तक जाएगा? मंगल का द्रव्यमान = 6.4×10^{23} kg, मंगल की त्रिज्या = 3395 km, तथा $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N-m²/kg².

हल दिया है, रॉकेट की चाल = 2 km/s = 2×10^3 m/s

मंगल का द्रव्यमान $M_m = 6.4 \times 10^{23}$ kg

मंगल की त्रिज्या $R_m = 3395 \text{ km} = 3.395 \times 10^6$ m

$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N-m}^2/\text{kg}^2$

रॉकेट की प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2$

मंगल के वातावरणीय प्रतिरोध के कारण इसकी 20% आरम्भिक ऊर्जा नष्ट हो जाती है।

∴ कुल गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2 \times \frac{80}{100} = \frac{2}{5}mv^2$

माना रॉकेट मंगल की सतह से h ऊँचाई तक पहुँचता है।

∴ स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि $= -\frac{GM_m m}{(R_m + h)} - \left(-\frac{GM_m m}{R_m}\right)$

$$= -GM_m m\left[\frac{1}{R_m} - \frac{1}{(R_m + h)}\right]$$

$$= -GM_m m\left[\frac{R_m + h - R_m}{R_m(R_m + h)}\right]$$

$$= -GM_m m \times \frac{h}{R_m(R_m + h)}$$

ऊर्जा संरक्षण के नियम से,

स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि = कुल गतिज ऊर्जा

$$GM_m m \times \frac{h}{R_m(R_m + h)} = \frac{2}{5}mv^2$$

या

$$\left(\frac{R_m + h}{h}\right) = \frac{5}{2}\frac{GM_m}{R_m v^2}$$

$$\frac{R_m}{h} + 1 = \frac{5}{2}\frac{GM_m}{R_m v^2}$$

$$\frac{R_m}{h} = \frac{5\,GM_m}{2R_m v^2} - 1$$

$$= \frac{5 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 6.4 \times 10^{23}}{2 \times 3.395 \times 10^6 \times (2 \times 10^3)^2} - 1$$

$$= \frac{5 \times 6.67 \times 6.4}{2 \times 3.395 \times 4} - 1$$

$$= \frac{213.44}{27.16} - 1$$

$$= 7.85862 - 1$$

$$= 6.85862$$

या

$$h = \frac{R_m}{6.85862} = \frac{3395}{6.85862}\text{ km}$$

$$= 494.99\text{ km} \approx 495\text{ km}$$