Chapter-14 दोलन Oscillations

प्रश्नावली

प्रश्न 1. नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन आवर्ती गति को निरूपित करता है?

(a) **किसी तैराक द्वारा नदी के एक तट से दूसरे तट तक जाना अपनी एक वापसी यात्रा पूरी करना।**

(b) **किसी स्वतंत्रतापूर्वक लटकाए गए दंड चुम्बक को उसकी N-S दिशा से विस्थापित कर छोड़ देना।**

(c) **अपने द्रव्यमान केन्द्र के परितः घूर्णी गति करता कोई हाइड्रोजन अणु।**

(d) **किसी कमान से छोड़ा गया तीर।**

यदि गति एक नियत अन्तराल के बाद पुनरावृत्ति करती है, तब इस आवर्त गति को वृत्तीय गति कहते हैं।

हल (a) जैसे ही तैराक चक्र पूर्ण करता है तब गति में कोई पुनरावृत्ति नहीं होती है।

(b) गति एक नियत अन्तराल के बाद पुनरावृत्ति करती है अतः यह आवर्ती गति है दण्ड चुम्बक अपनी मध्यमान स्थिति के सापेक्ष एक नियत अन्तराल पर दोलन करती है।

(c) घूर्णन गति आवर्ती गति है तथा यह एक नियत अन्तराल पर पुनरावृत्ति करती है।

(d) यहाँ कोई पुनरावृत्ति नहीं है अतः आवृत्ति गति नहीं है।

प्रश्न 2. नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन (लगभग) सरल आवर्त गति को तथा कौन आवर्ती परन्तु सरल आवर्त गति निरूपित नहीं करते हैं?

(a) **पृथ्वी की अपने अक्ष के परितः घूर्णन गति।**

(b) **किसी U–नली में दोलायमान पारे के स्तम्भ की गति।**

(c) **किसी चिकने वक्रीय कटोरे के भीतर एक बाल बेयरिंग की गति जब उसे निम्नतम बिन्दु से कुछ ऊपर के बिन्दु से मुक्त रुप से छोड़ा जाए।**

(d) **किसी बहुपरमाणुक अणु की अपनी साम्यावस्था की स्थिति के परितः व्यापक कम्पन।**

प्रत्येक सरल आवर्त गति आवर्ती गति है परन्तु प्रत्येक आवर्ती गति सरल आवर्त गति नहीं होती है। केवल वे आवर्ती गतियाँ जो बल नियम $F=-kx$ का पालन करती हैं, सरल आवर्त गति कहलाती हैं।

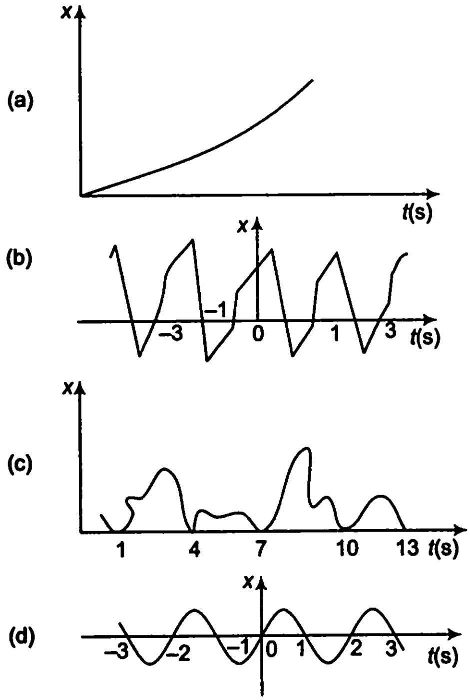
हल (a) यहाँ कोई अग्र-पश्च गति नहीं है जो आवर्ती गति के सरल आवर्त गति होने के लिए आवश्यक है। अतः अक्ष के सापेक्ष पृथ्वी की घूर्णन गति सरल आवर्त गति नहीं है।

(b) यह आवर्ती गति है तथा $F=-kx$ नियम का पालन करती है अतः यह SHM है।

(c) आवर्ती गति प्रकृति में दोलनकारी होती है तथा बल के नियम का पालन करती है अतः यह सरल आवर्त गति (SHM) है।

(d) बहुपरमाणुक अणु में अनेक प्राकृतिक आवृत्तियाँ होती है अतः साधारणतः इसके कम्पन सरल आर्वत गतियों की आवृत्तियों का अध्यारोपण है। अतः अध्यारोपण आवर्ती गति है सरल आवर्त गति नहीं।

प्रश्न 3. चित्र में किसी कण की रैखिक गति के लिए चार x-t आरेख दिए गए हैं। इनमें से कौन-सा आरेख आवर्ती गति का निरूपण करता है? उस गति का आवर्तकाल क्या है (आवर्ती गति वाली गति का)।



ग्राफ विस्थापन तथा समय के मध्य दिए गए हैं। यहाँ हम आवर्त गतियों की सततता ज्ञात करेंगे अर्थात गति आवर्त है या नहीं तथा वह न्यूनतम समय जिसमें गति की पुनरावृत्ति होती है आवर्तकाल कहलाता है।

हल (a) नहीं, गति में आवर्तता नहीं है यह एक दैशिक तथा रेखीय है।

(b) 2 s मे गति पुनरावृत्ति करती है अतः आवर्तकाल 2s है।

(c) आवर्ती गति के लिए एक स्थिति अथवा कुछ स्थितियों की पुनरावृत्ती करना पर्याप्त नहीं हैं। सम्पूर्ण गति ही एक नियत अन्तराल पर पुनरावृत्ति करनी चाहिए।
अतः दिया गया x-t ग्राफ आवर्त नहीं है यदि एकल स्थिति की पुनरावृत्ति है ($x = 0$, $t = 3$ पर) जबकि अन्य स्थितियों में पुनरावृत्ति नहीं होती है।

(d) स्पष्टतः गति 2s में पुनरावृत्ति करती है। अतः आवर्तकाल 2 s है।

प्रश्न 4. नीचे दिए गए समय के फलनों में कौन (a) सरल आवर्त गति, (b) आवर्ती परन्तु सरल आवर्त गति नहीं, तथा (c) अनावर्ती गति का निरूपण करते है। प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए : (ω कोई धनात्मक अचर है।)

(a) $\sin\omega t - \cos\omega t$ (b) $\sin^3 \omega t$

(c) $3\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\omega t\right)$ (d) $\cos\omega t + \cos 3\omega t + \cos 5\omega t$

(e) $\exp(-\omega^2 t^2)$ (f) $1 + \omega t + \omega^2 t^2$

आवर्ती गति sine तथा cosine तरंगों का अध्यारोपण प्रकट करती है।

हल (a) माना $(x)t = \sin\omega t - \cos\omega t$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\omega t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\omega t\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}\sin\omega t - \sin\frac{\pi}{4}\cos\omega t\right] = \sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

स्पष्टतः उपरोक्त समीकरण निम्न रूप में है।

$$x = A\sin(\omega t \pm \phi)$$

SHM प्रदर्शित करता है।

पुनः $t = \frac{2\pi}{\omega}$, SHM का आवर्तकाल है।

$$x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \sqrt{2}\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\omega t + 2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = x(t)$$

अतः आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega}$

तथा कला $= -\frac{\pi}{4}$ या $\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

(b) माना $x(t) = \sin^3 t$

अथवा $x(t) = \frac{1}{4}(3\sin\omega t - \sin 3\omega t)$ $(\because \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$

उपरोक्त समीकरण दो सरल आवर्त गतियों का युग्म प्रदर्शित करती हैं। युग्म आवर्त है किन्तु सरल आवर्त गति प्रकट नहीं करता।

$\frac{3}{4}\sin\omega t$ का आवर्तकाल $= \frac{2\pi}{\omega} = T$

$\frac{1}{4}\sin 3\omega t$ का आवर्तकाल $= \frac{2\pi}{3\omega} = T' = \frac{T}{3}$

अतः युग्म का आवर्तकाल

= न्यूनतम समय जिसके पश्चात् युग्म समीकरण पुनरावृत्ति करता है।

= LCM का T

तथा $\frac{T}{3} = T$

(c) $$x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\omega t\right)$$

$$= 3\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (\because \cos(-\theta) = \cos\theta)$$

उपरोक्त समीकरण निम्न रूप में है। $x(t) = A\cos(\omega t \pm \phi)$

अतः सरल आवर्त गति का आवर्तकाल

$$T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$$

(d) $x(t) = \cos\omega t + \cos 3\omega t + \cos 5\omega t$

अतः $\cos\omega t$ SHM प्रदर्शित करता है जिसका आवर्तकाल $= \frac{2\pi}{\omega} = T$ (say)

$\cos 3\omega t$ SHM प्रदर्शित करता है जिसका आवर्तकाल $= \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{T}{3}$

$\cos 5\omega t$ भी SHM प्रकट करता है जिसका आवर्तकाल $= \frac{2\pi}{5\omega} = \frac{T}{5}$

न्यूनतम समय जिसमें संयुक्त गति फलन की पुनरावृत्ति होती है वह समय T है। अतः दिया गया फलन आवर्ती फलन प्रकट करता है किन्तु सरल आवर्त गति नहीं।

(e) $$x(t) = \exp(-\omega^2 t^2)$$

दिया गया फलन चरघातकीं फलन है यह एकांक रूप से घटता है।

$$x(t) \to 0 \text{ पर } t \to \infty$$

इस मान की पुनरावृत्ति नहीं होती है अतः यह अनावर्ती गति फलन प्रकट करता है।

(f) $$x(t) = 1 + \omega t + \omega^2 t^2$$

यहाँ, $t \to \infty$

$x(t) \to \infty$

मान की पुनरावृत्ति नहीं होती है अतः यह अनावर्ती फलन प्रकट करता है।

प्रश्न 5. कोई कण एक दूसरे से 10 cm दूरी पर स्थित बिन्दुओं *A* तथा *B* के बीच रैखिक सरल आवर्त गति कर रहा है। *A* से *B* की ओर दिशा को धनात्मक दिशा मानकर वेग, त्वरण तथा कण पर लगे बल के चिह्न ज्ञात कीजिए जबकि यह कण

(a) *A* सिरे पर है,

(b) *B* सिरे पर है,

(c) *A* की ओर जाते हुए *AB* के मध्य बिन्दु पर है,

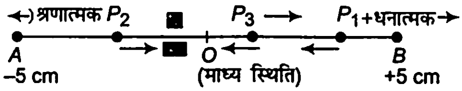
(d) *A* की ओर जाते हुए *B* से 2 cm दूर है,

(e) *B* की ओर जाते हुए *A* से 3 cm दूर है तथा

(f) *A* की ओर जाते हुए *B* से 4 cm दूर है।

SHM के दोनों ओर अधिकतम विस्थापन पर वेग शून्य है किन्तु त्वरण तथा बल शून्य नहीं हैं। त्वरण हमेशा माध्य स्थिति की ओर प्रेरित होता है। पुनः त्वरण बल की दिशा निर्धारित करता है।

हल सरलीकरण हेतु चित्र प्रयुक्त करने पर



अब,

		वेग	त्वरण	बल
(a)	A	0	+	+
(b)	B	0	−	−
(c)	O	−	0	0
(d)	P_1	−	−	−
(e)	P_2	+	+	+
(f)	P_3	−	−	−

प्रश्न 6. नीचे दिए गए किसी कण के त्वरण a तथा विस्थापन x के बीच सम्बन्धों में से किससे सरल आवर्त गति संबद्ध है

(a) $a = 0.7x$ (b) $a = -200x^2$

(c) $a = -10x$ (d) $a = 100x^3$

सभी SHM (सरल आवर्त गतियाँ), त्वरण ∝ −विस्थापन की स्थिति का पालन करती है।

हल (a) दायीं ओर कोई ऋणात्मक चिह्न नहीं है अतः SHM नहीं है।

(b) दायीं ओर विस्थापन का वर्ग है अतः SHM नहीं है।

(c) $a = -10x$ सरल आवर्त गति की शर्त का पालन करती त्वरण ∝ -विस्थापन

(d) दायीं ओर कोई ऋणात्मक चिह्न नहीं है तथा विस्थापन का घन दिया गया है। अतः SHM नहीं है।

प्रश्न 7. सरल आवर्त गति करते किसी कण की गति का वर्णन नीचे दिए गए विस्थापन फलन द्वारा किया जाता है,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

यदि कण का आरम्भिक ($t = 0$) स्थिति 1 cm तथा उसका आरम्भिक वेग π cm s^{-1} है, तो कण का आयाम तथा आरम्भिक कला कोण क्या है? कण की कोणीय आवृत्ति $\pi\ s^{-1}$. यदि सरल आवर्त गति का वर्णन करने के लिए कोज्या (cos) फलन के स्थान पर हम ज्या (sin) फलन चुनें : $x = B\sin(\omega t + \alpha)$ तो उपरोक्त आरम्भिक प्रतिबन्धों में कण का आयाम तथा आरंभिक कला कोण क्या होगा?

सरल आवर्त गति का मानक स्वरुप, नियतांक को ज्ञात करने हेतु प्रयुक्त करना चाहिए।

हल दिया है, $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

$t = 0$ पर विस्थापन $x(t) = 1\,cm$ तथा वेग $v = \omega$ cm/s

कोणीय आवृत्ति $\omega = \pi s^{-1}$

$\Rightarrow$ $$1 = A\cos(\omega t + \phi)$$

$t = 0$ हेतु $$1 = A\cos\phi \quad ...(i)$$

अब, $$v(t) = \frac{dx}{dt}(t) = \frac{d}{dt}A\cos(\omega t + \phi)$$

$$= -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

पुनः $t = 0$ पर $$v = \omega \text{ cm/s}$$

$\Rightarrow$ $$\omega = -A\omega\sin\phi$$

$\Rightarrow$ $$-1 = A\sin\phi \quad ...(ii)$$

समी (i) तथा समी (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर

$$A^2\cos^2\phi + A^2\sin^2\phi = (1)^2 + (-1)^2$$

$$A^2 = 2 \Rightarrow A = \pm\sqrt{2} \text{ cm}$$

अतः आयाम = $\sqrt{2}$ cm

समी (ii) को समी (i) से विभाजित करने पर,

$$\frac{A\sin\phi}{A\cos\phi} = \frac{-1}{1}$$

या $$\tan\phi = -1$$

$\Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{4}$ या $\frac{7\pi}{4}$

cos फलन के स्थान पर sin फलन प्रयुक्त करने पर

$$x(t) = B\sin(\omega t + \alpha)$$

$t = 0$ पर $x = 1$ cm

$\Rightarrow$ $$1 = B\sin(0 + \alpha)$$

$$B\sin\alpha = 1 \quad ...(iii)$$

$$\text{वेग } v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[B\sin(\omega t + \alpha)]$$

$$= +B\omega\cos(\omega t + \alpha)$$

पुनः $t = 0$, $$v(t) = \omega \text{ cm/s}$$

$$\omega = +B\omega\cos(0 + \alpha)$$

$$B\cos\alpha = +1 \quad ...(iv)$$

समी (iii) तथा समी (iv) का वर्ग करके जोड़ने पर

$$B^2\sin^2\alpha + B^2\cos^2\alpha = (1)^2 + (+1)^2$$

$\Rightarrow$ $$B^2\sin^2\alpha + B^2\cos^2\alpha = 2$$

$$B^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2$$

$$B^2 \cdot 1 = 2$$

$\Rightarrow$ $$B = \pm\sqrt{2} \text{ cm}$$

अतः गति का आयाम = $\sqrt{2}$ cm

समी (iii) को समी (iv) से भाग देने पर

$$\frac{B\sin\alpha}{B\cos\alpha}=\frac{1}{1} \quad \text{या} \quad \tan\alpha = 1$$

$$\therefore \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

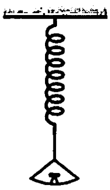
प्रश्न 8. किसी कमानीदार तुला का पैमाना 0 से 50 kg तक अंकित है और पैमाने की लम्बाई 20 cm है। इस तुला से लटकाया गया कोई पिण्ड, जब विस्थापित करके मुक्त किया जाता है, 0.6 s के आवर्तकाल से दोलन करता है। पिंड का भार कितना है?

यह भारित स्प्रिंग के दोलन का सीधा अनुप्रयोग है तथा दी हुई स्थिति से घटक ज्ञात किए जाते हैं।

हल पैमाने की 20 cm लम्बाई तक यह 50 kg भार का पाठ्यांक दे सकता है तथा अधिकतम विस्थापन 20 cm के संगत यह 50 kg × 9.8 m/s^2 का अधिकतम भार वहन कर सकता है।

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$$

$$|\mathbf{F}| = F = kx$$



अतः

$$x = 20\times10^{-2}\ \text{m}$$

$$k = \frac{50\times9.8}{20\times10^{-2}}$$

$$= 2450\ \text{N/m}$$

भार के साथ दोलन की अवस्था में

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

या

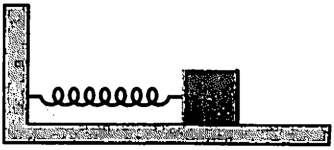
$$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$$

$$m = \frac{T^2k}{4\pi^2} = \frac{(0.60)^2\times2450}{4\times(3.14)^2} = 22.36\,\text{kg}$$

$$\therefore \qquad \text{भार} = mg = 22.36\times9.8$$

$$= 219.13\ \text{N}$$

प्रश्न 9. 1200 N/m कमानी-स्थिरांक की कोई कमानी चित्र में दर्शाए अनुसार क्षैतिज मेज से जुड़ी है। कमानी के मुक्त सिरे से 3 kg द्रव्यमान का कोई पिण्ड जुड़ा है। इस पिण्ड को एक ओर 2.0 cm दूरी तक खींचकर मुक्त किया जाता है।



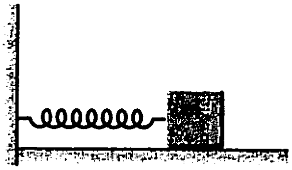
(i) पिण्ड के दोलन की आवृत्ति,

(ii) पिण्ड का अधिकतम त्वरण तथा

(iii) पिण्ड की अधिकतम चाल ज्ञात कीजिए।

क्षैतिज पृष्ठ पर यह दोलन का सीधा अनुप्रयोग है।

हल (a) स्प्रिंग नियतांक $k = 1200\,\text{N/m}$, द्रव्यमान $m = 3.0\,\text{kg}$



आयाम $A = 2.0\,\text{cm} = 2.0 \times 10^{-2}\,\text{m}$

दोलनों की आवृत्ति

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2 \times 3.14}\sqrt{\frac{1200}{3.0}}$$

$$= \frac{1}{2 \times 3.14} \times 20 = 3.2\,/\text{s}$$

(b) कोणीय आवृत्ति $\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1200}{3.0}} = 20\,\text{rad/s}$

द्रव्यमान का अधिकतम त्वरण

$$|a_{max}| = |-\omega^2 A| = |-(20)^2 \times 2.0 \times 10^{-2}| = 8.0\ \text{m/s}^2$$

(c) अधिकतम वेग $= \omega A = 20 \times 2.0 \times 10^{-2} = 0.4\,\text{m/s}$

प्रश्न 10. प्रश्न 9 में, मान लीजिए जब कमानी अतानित अवस्था में है तब पिण्ड की स्थिति $x = 0$ है तथा बाएँ से दाएँ की दिशा x-अक्ष की धनात्मक दिशा है। दोलन करते पिण्ड के विस्थापन x को समय के फलन के रुप में दर्शाइए, जबकि विराम घड़ी को आरम्भ ($t = 0$) करते समय पिण्ड

(a) अपनी माध्य स्थिति

(b) अधिकतम तनित स्थिति तथा

(c) अधिकतम संपीडन की स्थिति पर है।

सरल आवर्त गति के लिए ये फलन एक-दूसरे से आवृत्ति में, आयाम में अथवा आरम्भिक कला में किस रूप से भिन्न हैं?

अलग-अलग प्रारम्भिक अवस्थाओं में मानक सरल आवर्त गति समीकरण प्रयुक्त होती है।

हल मानक समीकरण के अनुसार

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

(a) जब $t = 0, x = 0$ (माध्य स्थिति)

$$0 = A\sin(\omega \times 0 + \phi)$$

$$A\sin\phi = 0 \qquad (\because A \neq 0)$$
$$\sin\phi = 0$$
$\therefore$ $$\phi = 0$$
$\therefore$ अतः आवश्यक फलन
$$x(t) = A\sin(\omega t + 0)$$
या $$x(t) = A\sin\omega t$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1200}{3.0}}$$
$$= 20\,\text{rad/s}$$
$\therefore$ $$x(t) = A\sin 20t$$
$$x(t) = 2\sin 20t$$

(b) जब $t = 0, x = +A$ (अधिकतम मानक स्थिति)

पर $t = 0$ तथा $x = +A$ $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$
$$+A = A\sin(\omega \times 0 + \phi)$$
$$1 = \sin\phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$
$\therefore$ $$x(t) = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= A\cos\omega t$$
$$= A\cos 20t = 2\cos 20t$$

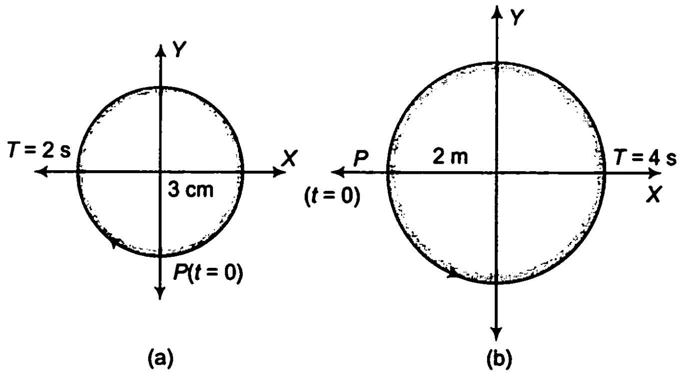
(c) जब स्प्रिंग अधिकतम संकुचन की स्थिति में हो

$t = 0$ पर $x(t) = -A$

$\Rightarrow$ $$-A = A\sin(\omega \times 0 + \phi)$$
$$-1 = \sin\phi$$
$$\phi = \frac{3\pi}{2}$$
$\therefore$ $$x(t) = A\sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$= -A\cos\omega t$$
$$= -2\cos 20t$$

अतः समीकरण प्रारम्भिक अवस्था में भिन्न है अन्य घटक में भिन्नता नहीं है।

प्रश्न 11. चित्र में दिए गए दो आरेख दो वर्तुल गतियों के तद्नुरुपी हैं। प्रत्येक आरेख पर वृत्त की त्रिज्या, परिक्रमण-काल, आरम्भिक स्थिति और परिक्रमण की दिशा दर्शायी गई है। प्रत्येक प्रकरण में, परिक्रमण करते कण के त्रिज्य-सदिश के x-अक्ष पर प्रक्षेप की तद्नुरूपी सरल आवर्त गति ज्ञात कीजिए।

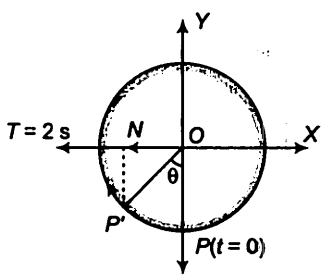


आवश्यक अक्षों के प्रक्षेपण में विस्थापन की स्थितियाँ प्राप्त होती हैं, प्रारम्भिक अवस्था $t = 0$ पर प्राप्त होती है। विस्थापन समय का फलन है तथा ग्राफ के अनुसार विस्थापन परिकलित करते हैं जिससे कि आवश्यक समीकरण प्राप्त हो सके।

हल यदि कण P से P' की ओर गति करता है (समय t से) तब कोण

$$\theta = \omega t = \frac{2\pi}{T}t$$

$$= \frac{2\pi}{2}t = \pi t \text{ rad}$$



कण का विस्थापन $$ON = OP'\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= OP'\sin\theta$$

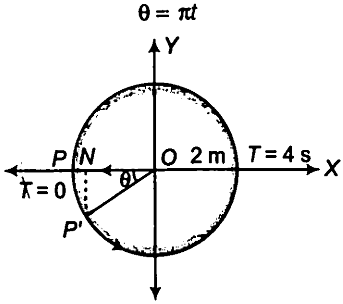
किन्तु $$ON = -x(t)$$

चूँकि यह माध्य स्थिति के बायीं ओर है अतः ऋण चिह्न लिया गया है।

$\Rightarrow$ $$-x(t) = 3\sin\theta \quad (\because OP = 3\,\text{cm})$$

या $$x(t) = -3\sin\theta$$

या $$x(t) = -3\sin \pi t$$



यदि कण t समय में P से P' पर पहुँचता है।

त्रिज्या वेक्टर द्वारा तय कोण

$$\theta = \omega t = \frac{2\pi}{T}t = \frac{2\pi}{4}t$$

$$= \frac{\pi t}{2} \text{rad}$$

विस्थापन $ON = OP'\cos\theta$

$$-x(t) = 2\cos\frac{\pi t}{2}$$

ऋणात्मक चिह्न यह प्रकट करता है कि कण माध्य स्थिति के बायीं ओर है।

$\Rightarrow$ $$x(t) = -2\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

प्रश्न 12. नीचे दी गई प्रत्येक सरल आवर्त गति के लिए तद्नुरुपी निर्देश वृत्त का आरेख खींचिए। घूर्णी कण की आरम्भिक ($t = 0$) स्थिति, वृत्त की त्रिज्या तथा कोणीय चाल दर्शाइए। सुगमता के लिए प्रत्येक प्रकरण में परिक्रमण की दिशा वामावर्त लीजिए। (x को cm तथा t को s में लीजिए)।

(a) $x = -2\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$ (b) $x = \cos\left(\frac{\pi}{6} - t\right)$

(c) $x = 3\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ (d) $x = 2\cos\pi t$

दिए गए फलनों को सर्वप्रथम cosine फलनों में बदलते हैं तत्पश्चात् मानक समीकरण से तुलना करते हैं।

हल (a) $$x = -2\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(3t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

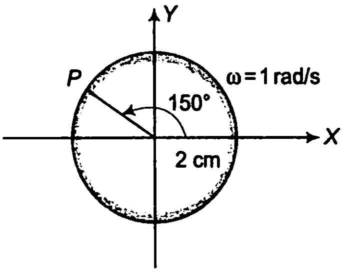
सरल आर्वत गति की मानक समीकरण से तुलना करने पर, $x = A\cos\left[\frac{2\pi}{T}t + \phi\right]$,

प्राप्त आयाम $A = 2$ cm

$$\text{कालांश } \phi = \frac{5\pi}{6} = 150°$$

$$\text{कोणीय वेग } \omega = \frac{2\pi}{T} = 3 \text{ rad/s}$$

संगत वृत्त



(b) $x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$ मानक सरल आवर्त गति समीकरण है।

दी गयी समीकरण $x = \cos\left(\frac{\pi}{6} - t\right)$

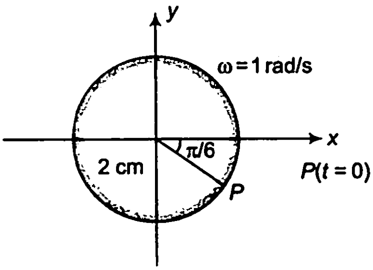
$$= \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \qquad [\cos(-\theta) = \cos\theta]$$

तुलना करने पर प्राप्त आयाम $A = 1$

$$\text{कलांश } \phi = -\frac{\pi}{6} = -30°$$

$$\text{कोणीय वेग } \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \text{ rad/s}$$

प्रदर्शित वृत्त



(c) दी गयी समीकरण

$$x = 3\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -3\cos\left[\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \qquad \left[\because \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta\right]$$

$$x = -3\cos\left(2\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

मानक सरल आवर्त गति समीकरण से तुलना करने पर

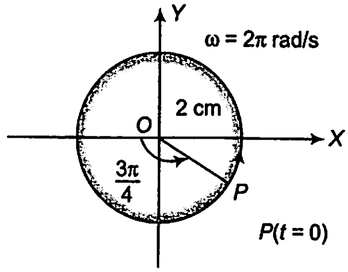
$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$$

प्राप्त आयाम $A = 3\,\text{cm}$

$$\text{कलांश } \phi = \frac{3\pi}{4} = 135°$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ rad/s}$$

प्रदर्शित वृत्त (कण की वृत्तीय गति हेतु)



(d) $x = 2\cos \pi t$

मानक सरल आवर्त गति समीकरण

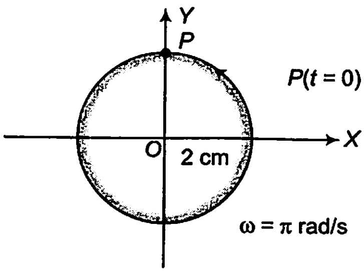
$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$$

तब प्राप्त आयाम $A = 2\,\text{cm}$

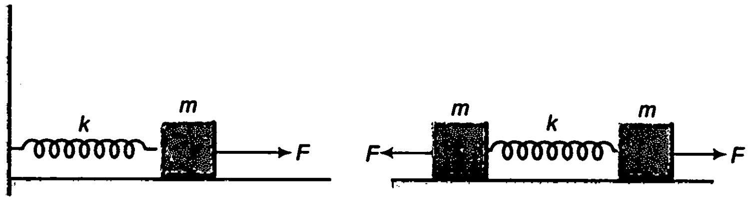
कलांश $\phi = 0$

कोणीय वेग $\omega = \pi$ rad/s

गति का वृत्तीय पथ



प्रश्न 13. चित्र (a) में k बल स्थिरांक की किसी कमानी के एक सिरे को किसी दृढ़ आधार से जकड़ा तथा दूसरे मुक्त सिरे से एक द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के मुक्त सिरे पर बल F आरोपित करने से कमानी तन जाती है। चित्र (b) में उसी कमानी के दोनों मुक्त सिरों से द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के दोनों सिरों को चित्र में समान बल F द्वारा तनित किया गया है।



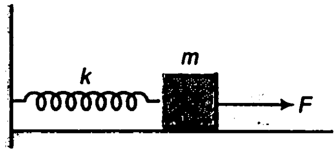
(a) (b)

(i) दोनों प्रकरणों में कमानी का अधिकतम विस्तार क्या है?

(ii) यदि (a) का द्रव्यमान तथा (b) के दोनों द्रव्यमानों को मुक्त छोड़ दिया जाता, तो प्रत्येक प्रकरण में दोलन का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

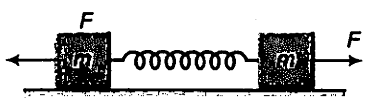
1. दोनों स्थितियों में स्प्रिंगों में विस्थापन हेतु मुक्त वस्तु चित्र निर्मित करते हैं।
2. दोनों अवस्थाओं में निकाय SHM प्रकट करेगा प्रथम स्थिति द्रव्यमान के खींचने से पूर्व अवस्था हेतु है तथा द्वितीय स्थिति में स्प्रिंग का द्रव्यमान केन्द्र दोलनों की मध्यमान स्थिति में है।

हल (i) $F = -kx \Rightarrow |F| = kx$

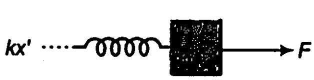


$\therefore$ $$x = \frac{F}{k}$$

अवस्था (a),



यदि स्प्रिंग में विस्थापन x' है तब प्रत्येक द्रव्यमान का मुक्त वस्तु चित्र बनाते हैं (निकाय आरोपित बल की अवस्था में सन्तुलन में है।)



$$kx' = F$$

∴ $$x' = \frac{F}{k}$$

दोनों अवस्था में विस्थापन समान है $\left(\frac{F}{k}\right)$

(ii) अवस्था (a) में दोलनकाल

$$F = -kx$$

जहाँ, x = दिया गया विस्थापन

किन्तु $$F = ma$$

∴ $$ma = -kx$$

⇒ $$a = -\left(\frac{k}{m}\right)x \quad \text{...(i)}$$

$$a \propto -x$$ (एक $\frac{k}{m}$ एक नियतांक है)

समी (i) को $a = -\omega^2 x$, के साथ तुलना करने पर

∴ $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

दोलनकाल $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

अवस्था (b),

निकाय दो बराबर भागों में विभाजित किया जाता है तब $k' = 2k$

$$F = -k'x$$

$k' = 2k$ (अतः स्प्रिंग को दो बराबर भागों में काटने पर प्रत्येक भाग का बल नियतांक k होगा।)

⇒ $$F = -2kx$$

किन्तु $$F = ma$$

∴ $$ma = -2kx$$

⇒ $$a = -\left(\frac{2k}{m}\right)x \quad \text{...(ii)}$$

⇒ $a \propto -$ विस्थापन ($\frac{2k}{m}$ नियतांक है)

समी (ii) को $a = -\omega^2 x$, से तुलना करने पर

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$\text{दोलनकाल } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

प्रश्न 14. किसी रेलगाड़ी के इंजन के सिलिंडर हैड में पिस्टन का स्ट्रोक (आयाम का दोगुना) 1.0 m का है। यदि पिस्टन 200 rad/min की कोणीय आवृत्ति से सरल आवर्त गति करता है, तो उसकी अधिकतम चाल कितनी है?

हल कोणीय आवृत्ति $\omega = 200$ rad/min

स्टोक की लम्बाई = 1 m

$\therefore$ SHM का आयाम $A = \frac{\text{स्टोक की लम्बाई}}{2} = \frac{1}{2}$

$$= 0.5 \text{ m}$$

$$v_{max} = \omega A$$

$$= 200 \times 0.5 = 100 \text{ m/min}$$

प्रश्न 15. चन्द्रमा के पृष्ठ पर गुरुत्वीय त्वरण 1.7 m/s² है। यदि किसी सरल लोलक का पृथ्वी के पृष्ठ पर आवर्तकाल 3.5 s है, तो उसका चन्द्रमा के पृष्ठ पर आवर्तकाल कितना होगा? (पृथ्वी के पृष्ठ पर $g = 9.8$ m/s²)

दो आवर्तकालों को अलग-अलग निर्धारित करने पर, उनका अनुपात ज्ञात करते हैं तथा दिये हुए मान अनुपात में रखते हैं।

हल दिया है, चन्द्रमा पर गुरुत्व त्वरण $(g_m) = 1.7$ m/s²

पृथ्वी की सतह पर गुरुत्व $(g_e) = 9.8$ m/s²

पृथ्वी पर आवर्तकाल $T_e = 3.5$ s

चन्द्रमा पर आवर्तकाल $T_m = ?$

पृथ्वी की सतह पर आवर्तकाल $= T_e$

$\therefore$ $$T_e = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_e}} \quad \ldots(i)$$

चन्द्रमा की सतह पर आवर्तकाल $= T_m$

$\therefore$ $$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_m}} \quad \ldots(ii)$$

g_e, g_m पृथ्वी एवं चन्द्रमा की सतहों पर गुरुत्व त्वरण हैं

समी (i) को समी (ii) से विभाजित करने पर

$$\frac{T_e}{T_m} = \frac{2\pi}{2\pi}\sqrt{\frac{l}{l} \times \frac{g_m}{g_e}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_e}{T_m} = \sqrt{\frac{g_m}{g_e}}$$

$$\Rightarrow \quad T_m = \left(\sqrt{\frac{g_e}{g_m}}\right) T_e$$

मान रखने पर,

$$T_m = \sqrt{\frac{9.8}{1.7}} \times 3.5 = 8.4 \text{ s}$$

प्रश्न 16. नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए

(a) **किसी कण की सरल आवर्त गति के आवर्तकाल का मान उस कण के द्रव्यमान तथा बल-स्थिरांक पर निर्भर करता है : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$। कोई सरल लोलक सन्निकट सरल आवर्त गति करता है। तब फिर किसी लोलक का आवर्तकाल लोलक के द्रव्यमान पर निर्भर क्यों नहीं करता।**

(b) **किसी सरल लोलक की गति छोटे कण के सभी दोलनों के लिए सन्निकट सरल आवर्त गति होती है। बड़े कोणों के दोलनों के लिए एक अधिक गूढ़ विश्लेषण यह दर्शाता है कि T का मान $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ से अधिक होता है। इस परिणाम को समझने के लिए किसी गुणात्मक कारण का चिंतन कीजिए।**

(c) **कोई व्यक्ति कलाई घड़ी बाँधे किसी मीनार की चोटी से गिरता है। क्या मुक्त रुप से गिरते समय उसकी घड़ी यथार्थ समय बताती है?**

(d) **गुरुत्व बल के अन्तर्गत मुक्त रूप से गिरते किसी केबिन में लगे सरल लोलक के दोलन की आवृत्ति क्या होती है?**

हल (a) सरल लोलक में k, द्रव्यमान m के अनुक्रमानुपाती होता है अत: $\frac{m}{k}$ नियतांक है तथा यह नियतांक आवर्तकाल को प्रभावित नहीं करता है।

(b) यदि $\sin\theta \approx \theta$ उच्चतम कोण हेतु तब $\sin\theta < \theta$ प्रत्यानन बल $mg\sin\theta$ को $mg\theta$ में लेने पर अर्थात् g के मान में उच्चतम कोण पर प्रभावी कमी आती है। अत: आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(c) हाँ, विरामघड़ी की सुईं की गति यह प्रदर्शित करती है कि समय स्प्रिंग की क्रिया पर निर्भर करता है, गुरुत्व त्वरण पर निर्भर नहीं।

(d) स्वतन्त्र रूप से गिरने पर प्रभावी $g = 0$ अर्थात् गुरुत्व त्वरण शून्य होता है (भारहीनता)

$\therefore$ आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{0}} = \infty$

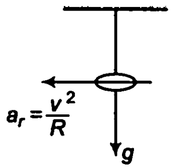
$\therefore$ तथा आवृत्ति $\nu = \frac{1}{T} = 0$

अतः दोलनों की आवृत्ति शून्य है।

प्रश्न 17. किसी कार की छत से l लम्बाई का कोई सरल लोलक, जिसके लोलक का द्रव्यमान M है, लटकाया गया है। कार R त्रिज्या की वृत्तीय पथ पर एकसमान चाल v से गतिमान है। यदि लोलक त्रिज्य दिशा में अपनी साम्यावस्था की स्थिति के इधर-उधर छोटे दोलन करता है, तो इसका आवर्तकाल क्या होगा?

सरल लोलक में $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{eff}}}$, अतः हमेशा प्रभावी g_{eff} ज्ञात करते हैं तत्पश्चात् आवर्तकाल ज्ञात करते हैं।

हल लोलक दो तत्कालिक लम्बवत् त्वरणों के अन्तर्गत है अर्थात् गुरुत्व त्वरण g एवं त्रिज्य त्वरण $a_R = \frac{v^2}{R}$ जो वृत्तीय पथ के केन्द्र की ओर है।



$\therefore$ प्रभावी त्वरण $a_{eff} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$

$\therefore$ सरल लोलक का आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a_{eff}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}}}$

$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}}}}$

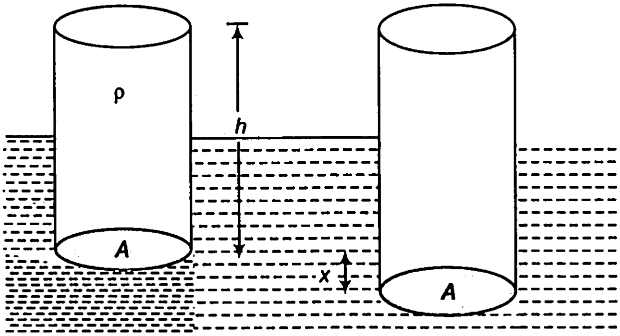
प्रश्न 18. आधार क्षेत्रफल A तथा ऊँचाई h के एक कॉर्क का बेलनाकार टुकड़ा ρ_l घनत्व के किसी द्रव में तैर रहा है। कॉर्क को थोड़ा नीचे दबाकर स्वतंत्र छोड़ देते हैं, यह दर्शाइए कि कॉर्क ऊपर-नीचे सरल आवर्त दोलन करता है जिसका आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{h\rho}{\rho_l g}}$ है।

यहाँ ρ कॉर्क का घनत्व है (द्रव की श्यानता के कारण अवमंदन को नगण्य मानिए।)

हल बेलन कॉर्क का द्रव्यमान (m) = आयतन × घनत्व = $Ah\rho$

बहने की अवस्था में बेलन का द्रव्यमान उत्प्लावन बल द्वारा संतुलित होता है।

जब बेलनाकार कॉर्क पुनः $A x$ गहराई तक विस्थापित होता है तब यह मध्यमान स्थिति के सापेक्ष दोलन करता है।



बेलन पर प्रत्यानन बल = अतिरिक्त द्रव का विस्थापित भार

$$F = -(\text{आयतन} \times \text{द्रव में घनत्व}) \times g = -(Ax\rho_l)g$$

बेलन का त्वरण $a = \frac{F}{m} = -\frac{Ax\rho_l g}{m}$

m का मान रखने पर,

$$a = \frac{-Ax\rho_l g}{Ah\rho} = \frac{-\rho_l g}{\rho h}x \quad \ldots(i)$$

$$\frac{\rho_l g}{\rho h} = \text{नियतांक}$$

$\therefore$ त्वरण $(a) \propto -$ विस्थापन (x)

बेलन कॉर्क की गति सरल आवर्त गति है

समी (i) को $a = -\omega^2 x$ से तुलना करने पर,

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_l g}{\rho h}}$$

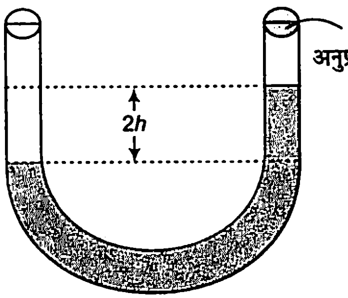
$$\text{आवर्तकाल } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho h}{\rho_l g}}$$

प्रश्न 19. पारे से भरी किसी U-नली का एक सिरा किसी चूषण पम्प से जुड़ा है तथा दूसरा सिरा वायुमंडल में खुला छोड़ा दिया गया है। दोनों स्तंभों में कुछ दाबान्तर बनाए रखा जाता है। यह दर्शाइए कि अब चूषण पम्प को हटा देते हैं, तब U-नली में पारे का स्तम्भ सरल आवर्त गति करता है।

प्रारम्भ से शुरु करते हुए प्रत्यानयन बल ज्ञात करते हैं तथा आवर्तकाल का सूत्र प्रयोग करते हैं।

हल माना U-नली के प्रत्येक भाग का अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल A है। दोनों नली की नलिकाओं के द्रव के तल का अन्तर $= 2h$



मरकरी स्तम्भ का घनत्व $= \rho$

गुरुत्व त्वरण $= g$

प्रत्यानयन बल

$F = -$नली में द्रव का अतिरिक्त भार

$= -$ (आयतन × घनत्व × g) $= -(A \times 2h \times \rho \times g)$

$= -2A\rho gh = -k \times$ एक भाग का विस्थापन (h)

स्पष्टतः $2A\rho g =$ नियतांक $= k$ $\quad (\because F = -kx)$

$$F \propto -h$$

अतः गति सरल आवर्त है $k = 2A\rho g$

$\therefore$ आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{2A\rho g}}$$

जहाँ, $m =$ स्तम्भ में मरकरी की लम्बाई l है।

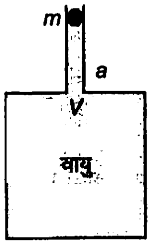
यदि ρ_{Hg} मरकरी का घनत्व $m = Al\rho$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{Al\rho}{2A\rho g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 20. चित्र में दर्शाए अनुसार V आयतन के किसी वायु कक्ष की ग्रीवा (गर्दन) की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल a है। इस ग्रीवा में m द्रव्यमान की कोई गोली घर्षण के ऊपर-नीचे गति कर सकती है। यह दर्शाइए कि जब गोली को थोड़ा नीचे दबाकर मुक्त छोड़ देते हैं, तो वह सरल आवर्त गति करती है। दाब-आयतन विचरण को समतापी मानकर दोलनों के आवर्तकाल का व्यंजक ज्ञात कीजिए (चित्र में देखिए)।



यह निकाय सरल आवर्त गति प्रकट करता है, अतः प्रत्यानयन बल ज्ञात करते है, सिद्ध करते हैं तथा आवर्तकाल ज्ञात करने हेतु नियतांक ज्ञात करते है।

हल गोली को दबाने से पूर्व कक्ष में दबाव = कक्ष के बाहर दाब

= वायुमण्डल दाब

माना गोली x गहराई तक दबायी जाती है जिससे आयतन घटेगा तथा कक्ष में दाब बढ़ेगा

वायु के आयतन में कमी $\Delta V = ax$

जहाँ, a = ऊपरी नली के अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल

$$\text{आयतन विकृति} = \frac{\text{आयतन में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक आयतन}}$$

$$= \frac{\Delta V}{V} = \frac{ax}{V}$$

आयतनात्मक प्रतिबल = आयतन प्रत्यास्थता गुणांक = γ

चूँकि $B = \frac{-p}{\left(\frac{ax}{V}\right)}$, जहाँ ऋणात्मक चिह्न आयतन में कमी प्रकट करता है।

$\therefore$ दाब में वृद्धि $p = -\frac{Bax}{V}$

गोली पर लगने वाला प्रत्यानयन बल

$$F = pa$$

$$= -\frac{Bax}{V} \cdot a$$

$$= \frac{-Ba^2x}{V} \qquad \left(\because \frac{Ba^2}{V} = \text{नियतांक}\right)$$

$$F \propto - \text{विस्थापन } (x)$$

अतः यह सरल आवर्त गति है।

$$\therefore \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mV}{Ba^2}}$$

प्रश्न 21. आप किसी 3000 kg द्रव्यमान के स्वचालित वाहन पर सवार हैं। यह मानिए कि आप इस वाहन की निलंबन प्रणाली के दोलनी अभिलक्षणों का परीक्षण कर रहे हैं। जब समस्त निकाय इस पर रखा जाता है, तब निलबंन 15 cm आनमित होता है। साथ ही, एक पूर्ण दोलन की अवधि में दोलन के आयाम में 50% घटोत्तरी हो जाती है। निम्नलिखित के मानों का आकलन कीजिए।

(a) कमानी स्थिरांक तथा

(b) कमानी तथा एक पहिए के प्रघात अवशोषण तंत्र के लिए अवमंदन स्थिरांक b हैं। यह मानिए कि प्रत्येक पहिया 750 kg द्रव्यमान वहन करता है।

सर्वप्रथम हमें यह जानना है कि जब दोनों स्प्रिंग समान्तर क्रम में समायोजित हैं तब k का प्रभावी मान स्प्रिंगों के अलग-अलग k मान के योग के बराबर होता है। द्वितीय अवस्था में अवमंदन दोलनों के आयाम में कमी प्रकट करता है

$$x = x_0 e^{-bt/2m}$$

यहाँ, b = अवमंदन स्थिरांक,

x_0 = प्रारम्भिक विस्थापन,

तथा $x = t$ समय पर विस्थापन,

हल (a) ऑटोमोबाइल का द्रव्यमान $m = 3000$ kg

निकाय का विस्थापन $x = 15$ cm = 0.15 m

ऑटोमोबाइल के द्रव्यमान के सहवर्ती 4 स्प्रिंग समान्तर क्रम में हैं। निकाय की प्रत्यानयन बल हेतु समीकरण

$$F = -4kx = mg$$

जहाँ, k = स्प्रिंग नियतांक

$$\therefore \qquad k = \frac{mg}{4x} = \frac{3000 \times 9.8}{4 \times 0.15}$$

(ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर क्योंकि यह केवल दिशा प्रकट करता है।)

$$= \frac{3000 \times 9.8}{0.60}$$

$$= \frac{3000 \times 9.8}{6.0 \times 10^{-1}}$$

$$= 500 \times 9.8 \times 10$$

$$= 500 \times 98 = 4.9 \times 10^4 \text{ N/m}$$

$$\simeq 5 \times 10^4 \text{ N/m}$$

(b) प्रत्येक पहिये का सहवर्ती द्रव्यमान = 750 kg

अवमंदन स्थिरांक हेतु विस्थापन समीकरण

$$x = x_0 e^{-bt/2m}$$

चूँकि $x = x_0/2$

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-bt/2m}$$

$\Rightarrow$ $\log_e 2 = \frac{bt}{2m}$

या $b = \frac{2\, m \log_e 2}{t}$ ...(i)

50% अवमंदन में लिया गया समय = एक आवर्तकाल = T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{3000}{4 \times 5 \times 10^4}} = 0.769 \text{ s}$$

$\therefore$ समी (i) में मान रखने पर

$$b = \frac{2 \times 750 \times 0.693}{0.7691}$$

$$= 1351.58 \text{ kg/s}$$

प्रश्न 22. यह दर्शाइए कि रैखिक सरल आवर्त गति करते किसी कण के लिए दोलन की किसी अवधि की औसत गतिज ऊर्जा उसी अवधि की औसत स्थितिज ऊर्जा के समान होती है।

गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा सरल आवर्त गति में परिवर्तित होती रहती है किन्तु कुल ऊर्जा नियत रहती है अब प्रत्येक ऊर्जा का औसत ज्ञात करते हैं (समाकलन रीति द्वारा)।

हल SHM में गतिज ऊर्जा

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

एक आवर्तकाल में औसत गतिज ऊर्जा $E_k = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} m v^2 dt$

सरल आवर्त गति में विस्थापन समीकरण $x = A \sin\omega t$

$\therefore$ $v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos\omega t$

$\therefore$ $(\text{KE})_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t)\, dt$

$$= \frac{1}{2T} m\omega^2 A^2 \int_0^T \left(\frac{1 + \cos 2\omega t}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{4T} m\omega^2 A^2 \left| t + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right|_0^T$$

$$= \frac{1}{4T} m\omega^2 A^2 (T - 0)$$

$$= \frac{1}{4T} m\omega^2 A^2 (T)$$

$$\Rightarrow \quad (KE)_{av} = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 \quad \ldots(i)$$

अब, SHM में स्थितिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} k x^2$

$$\therefore \quad \text{औसत स्थितिज ऊर्जा } (PE)_{av} = \frac{1}{2T} \int_0^T k x^2 dt$$

$$= \frac{1}{2T} \int_0^T m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t \, dt \quad (\because k = m\omega^2)$$

$$= \frac{1}{2T} \int_0^T m\omega^2 A^2 \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) dt$$

$$(\because \cos 2\omega t = 1 - 2\sin^2 \omega t)$$

$$= \frac{1}{4T} m\omega^2 A^2 \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right)_0^T$$

$$= \frac{1}{4T} m\omega^2 A^2 (T)$$

$$= \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 \quad \ldots(ii)$$

अत: $(KE)_{av} = (PE)_{av}$

प्रश्न 23. 10 kg द्रव्यमान की कोई वृत्तीय चक्रिका अपने केन्द्र से जुड़े किसी तार से लटकी है। चक्रिका को घूर्णन देकर तार में ऐंठन उत्पन्न करके मुक्त कर दिया जाता है। मरोड़ी दोलन का आवर्तकाल 1.5 s है। चक्रिका की त्रिज्या 15 cm है। तार का मरोड़ी कमानी नियतांक ज्ञात कीजिए। (मरोड़ी कमानी नियतांक α सम्बन्ध $J = -\alpha\theta$ द्वारा परिभाषित किया जाता है, यहाँ J प्रत्यानयन बल युग्म है तथा θ ऐंठन कोण है।)

यह प्रश्न टॉरसीन लोलक के आवर्तकाल पर आधारित है

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\alpha}}$$

जहाँ, I = अक्ष के सापेक्ष डिस्क का जड़त्व आघूर्ण

α = टॉरसीन नियतांक

हल डिस्क का द्रव्यमान $= m = 10$ kg

डिस्क की त्रिज्या $r = 15$ cm $= 0.15$ m

तथा आवर्तकाल $T = 1.5$ s

I घूर्णन अक्ष के सापेक्ष डिस्क का जड़त्व आघूर्ण है जो डिस्क के समतल के लम्बवत् है तथा द्रव्यमान केन्द्र से होकर जाती है।

$\therefore$ $$I = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2} \times (10) \times (0.15)^2$$

$$= 0.1125\,\text{kg-m}^2$$

आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\alpha}}$

$$\alpha = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

$$= \frac{4 \times (3.14)^2 \times 0.1125}{(1.5)^2}$$

$$= 1.972\ \text{N-m/rad}$$

प्रश्न 24. जब वस्तु 5 cm के आयाम तथा 0.2 सेकण्ड की आवर्तकाल से सरल आवर्त गति करती है। वस्तु का त्वरण तथा वेग ज्ञात कीजिए जब वस्तु का विस्थापन (a) 5 cm (b) 3 cm (c) 0 cm हो।

यह प्रश्न ज्ञात राशियों का सूत्र में प्रयोग करके अज्ञात राशियों की परिकलन रीति पर आधारित है।

हल $A = 5\,\text{cm} = 0.05\,\text{m}$ आयाम

आवर्तकाल $T = 0.2\,\text{s}$

(a) जब विस्थापन $x = 5\,\text{cm} = 0.05\,\text{m}$

त्वरण $a = -\omega^2(x)$

$$= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (x)$$

$$= -\left(\frac{2\pi}{0.2}\right)^2 (0.05) = -5\pi^2\ \text{m/s}^2$$

वेग $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$$= \left(\frac{2\pi}{T}\right)\sqrt{(0.05)^2 - (0.05)^2}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{T}\right) \times 0 = 0$$

(b) जब विस्थापन $x = 3\,\text{cm} = 0.03\,\text{m}$ है।

त्वरण $a = -\left(\frac{2\pi}{0.2}\right)^2 (0.03)$

$$= -3\pi^2\ \text{m/s}^2$$

तथा वेग $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$$= \left(\frac{2\pi}{0.2}\right)\sqrt{(0.05)^2 - (0.03)^2}$$

$$= 0.4\pi\ \text{m/s}$$

(c) जब विस्थापन $x = 0$

त्वरण $a = -\omega^2 x = 0$

वेग $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$$= \left(\frac{2\pi}{0.2}\right)\sqrt{(0.05)^2 - (0)^2}$$

$$= 0.5\pi \text{ m/s}$$

प्रश्न 25. किसी कमानी से लटका एक पिण्ड एक क्षैतिज तल में कोणीय वेग ω से घर्षण या अवमंदन रहित दोलन कर सकता है। जब इसे x_0 दूरी तक खींचते हैं और खींचकर छोड़ देते हैं तो यह सन्तुलन केन्द्र से समय $t = 0$ पर v_0 वेग से गुजरता है। प्राचल ω, x_0 तथा v_0 के पदों में परिणामी दोलन का आयाम ज्ञात कीजिए। [संकेत समीकरण $x = a\cos(\omega t + \theta)$ से प्रारंभ कीजिए] ध्यान रहे कि प्रारम्भिक वेग ऋणात्मक है।

स्प्रिंग निकाय में जब द्रव्यमान वेग द्वारा विस्थापित कर दिया जाता है। तब यह SHM प्रदर्शित करता है तथा आयाम स्प्रिंग के खिंचाव से अधिक होता है।

हल सरल आवर्त गति

$$x = A\cos(\omega t + \theta) \quad \text{...(i)}$$

जहाँ, x = विस्थापन

A = आयाम

θ = कला स्थिरांक

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \theta)$$

$$\Rightarrow \quad v = -A\omega\sin(\omega t + \theta) \quad \text{...(ii)}$$

जहाँ v, t समय पर कण का तत्कालिक वेग है

अब, $t = 0$ तथा $x = x_0$ पर

समी (i) से

$$\Rightarrow \quad x_0 = A\cos\theta \quad \text{...(iii)}$$

पुनः $t = 0$ पर $v = -v_0$

समी (ii) से

$$-v_0 = -A\omega\sin\theta$$

अथवा

$$\frac{v_0}{\omega} = +A\sin\theta \quad \text{...(iv)}$$

समी (iii) तथा समी (iv) का वर्ग करके योग करने पर

$$A^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \Rightarrow A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

या

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$