गणित

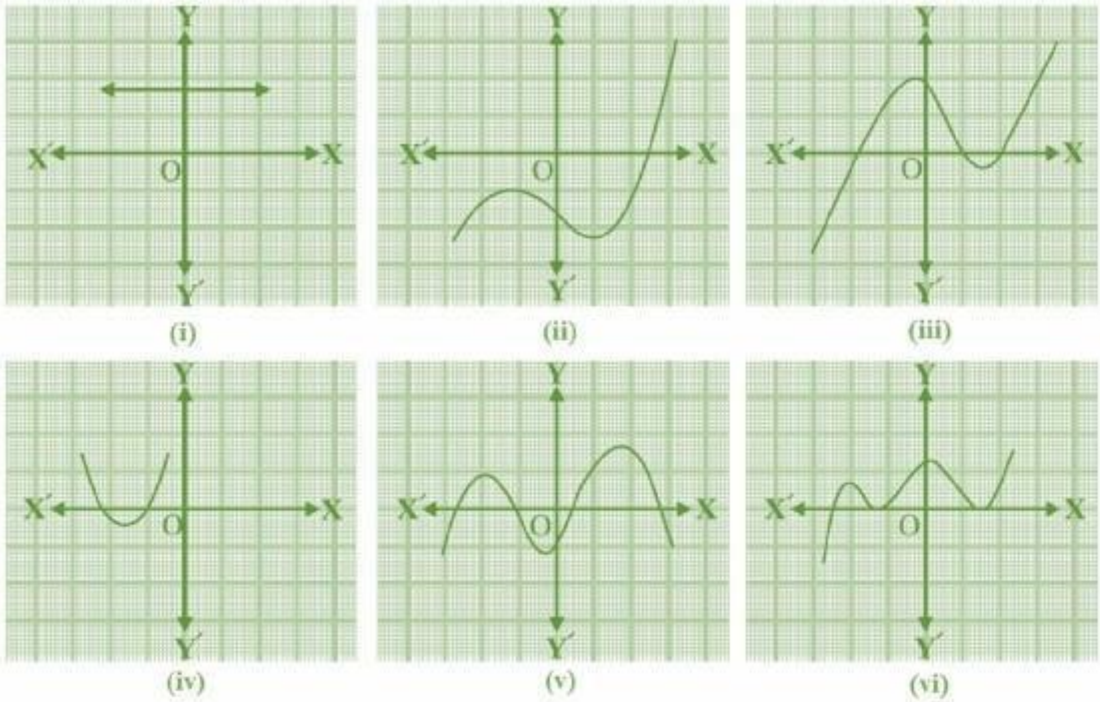
पाठ–2 बहुपद

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 2.1

प्रश्न 1.

किसी बहुपद के *p(x)* लिए, *y = p(x)* का ग्राफ नीचे आकृति 2.10 में दिया है। प्रत्येक स्थिति में, *p(x)* के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।



आकृति 2.10

उत्तर 1:

(i) शून्यकों की संख्या 0 है, क्योंकि ग्राफ x–अक्ष को एक भी बिंदु पर प्रतिच्छेद नहीं करता है।

(ii) शून्यकों की संख्या 1 है, क्योंकि ग्राफ x–अक्ष को एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करता है।

(iii) शून्यकों की संख्या 3 है, क्योंकि ग्राफ x–अक्ष को तीन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है।

(iv) शून्यकों की संख्या 2 है, क्योंकि ग्राफ x–अक्ष को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है।

(v) शून्यकों की संख्या 4 है, क्योंकि ग्राफ x–अक्ष को चार बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है।

(vi) शून्यकों की संख्या 3 है, क्योंकि ग्राफ x–अक्ष को तीन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है।

गणित

पाठ–2 बहुपद

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 2.2

प्रश्न 1.

निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए:

(i). $x^2 - 2x - 8$ **(ii).** $4s^2 - 4s + 1$ **(iii).** $6x^2 - 3 - 7x$

(iv). $4u^2 + 8u$ **(v).** $t^2 - 15$ **(vi).** $3x^2 - x - 4$

उत्तर 1:

(i) $x^2 - 2x - 8$

हम पाते हैं:

$x^2 - 2x - 8$

$= x^2 - 4x + 2x - 8$

$= x(x - 4) + 2(x - 4)$

$= (x + 2)(x - 4)$

इसलिए , $x^2 - 2x - 8$ का मान शून्य है, जब $x + 2 = 0$ है या $x - 4 = 0$ है,

अर्थात जब $x = -2$ या $x = 4$ हो।

इसलिए, $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक -2 और 4 हैं। अब

शून्यकों का योग $= -2 + 4 = 2 = \frac{-(-2)}{1} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= (-2) \times 4 = -8 = \frac{-8}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

(ii) $4s^2 - 4s + 1$

हम पाते हैं:

$4s^2 - 4s + 1$

$= 4s^2 - 2s - 2s + 1$

$= 2s(2s - 1) - 1(2s - 1)$

$= (2s - 1)(2s - 1)$

इसलिए, $4s^2 - 4s + 1$ का मान शून्य है, जब $2s - 1 = 0$ है,

अर्थात जब $s = \frac{1}{2}$ हो।

इसलिए, $4s^2-4s+1$ के शून्यक $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{2}$ हैं। अब

शून्यकों का योग $= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 = \frac{-(4)}{4} = \frac{-(s \text{ का गुणांक})}{s^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{\text{अचर पद}}{s^2 \text{ का गुणांक}}$

(iii) $6x^2-3-7x$

हम पाते हैं:

$6x^2-3-7x$

$= 6x^2-7x-3$

$= 6x^2-9x+2x-3$

$= 3x(2x-3)+1(2x-3)$

$= (3x+1)(2x-3)$

इसलिए ,$6x^2-7x-3$ का मान शून्य है, जब $3x+1=0$ है या $2x-3=0$ है,

अर्थात जब $x=-\frac{1}{3}$ या $x=\frac{3}{2}$ हो।

इसलिए, $6x^2-7x-3$ के शून्यक $-\frac{1}{3}$ और $\frac{3}{2}$ हैं। अब

शून्यकों का योग $= -\frac{1}{3}+\frac{3}{2} = \frac{-2+9}{6} = \frac{7}{6} = \frac{-(-7)}{6} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= \left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{2} = -\frac{1}{2} = \frac{-3}{6} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

(iv) $4u^2+8u$

हम पाते हैं:

$4u^2+8u$

$= 4u^2+8u$

$= 4u(u+2)$

इसलिए, $4u^2+8u$ का मान शून्य है, जब $4u=0$ है या $u+2=0$ है,

अर्थात जब $u=0$ या $u=-2$ हो।

इसलिए, $4u^2+8u$ के शून्यक 0 और -2 हैं। अब

शून्यकों का योग $= 0+(-2) = -2 = \frac{-(8)}{4} = \frac{-(u \text{ का गुणांक})}{u^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= 0 \times (-2) = 0 = \frac{0}{4} = \frac{\text{अचर पद}}{u^2 \text{ का गुणांक}}$

(v) $t^2 - 15$

हम पाते हैं:

$t^2 - 15$

$= t^2 - (\sqrt{15})^2$

$= (t + \sqrt{15})(t - \sqrt{15})$

इसलिए, $t^2 - 15$ का मान शून्य है, जब $t + \sqrt{15} = 0$ है या $t - \sqrt{15} = 0$ है,

अर्थात जब $x = -\sqrt{15}$ या $x = \sqrt{15}$ हो।

इसलिए, $t^2 - 15$ के शून्यक $-\sqrt{15}$ और $\sqrt{15}$ हैं। अब

शून्यकों का योग $= -\sqrt{15} + \sqrt{15} = 0 = \frac{-(0)}{1} = \frac{-(t \text{ का गुणांक})}{t^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= (-\sqrt{15}) \times \sqrt{15} = -15 = \frac{-15}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{t^2 \text{ का गुणांक}}$

(vi) $3x^2 - x - 4$

हम पाते हैं:

$= 3x^2 - x - 4$

$= 3x^2 - 4x + 3x - 4$

$= x(3x - 4) + 1(3x - 4)$

$= (3x - 4)(x + 1)$

इसलिए ,$3x^2 - x - 4$ का मान शून्य है, जब $3x - 4 = 0$ है या $x + 1 = 0$ है,

अर्थात जब $x = \frac{4}{3}$ या $x = -1$ हो।

इसलिए, $3x^2 - x - 4$ के शून्यक $\frac{4}{3}$ और -1 हैं। अब

शून्यकों का योग $= \frac{4}{3} + (-1) = \frac{4 - 3}{3} = \frac{1}{3} = \frac{-(-1)}{3} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= \frac{4}{3} \times (-1) = -\frac{4}{3} = \frac{-4}{3} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

प्रश्न 2.

एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएं हैं:

(i). $\frac{1}{4}, -1$ **(ii).** $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ **(iii).** $0, \sqrt{5}$

(iv). $1, 1$ **(v).** $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ **(vi).** $4, 1$

उत्तर 2:

(i) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।

हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{4} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = -1 = \frac{-4}{4} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 4,\ b = -1 \text{ और } c = -4$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $4x^2 - x - 4$ है।

(ii) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।

हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{3} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 3,\ b = -3\sqrt{2} \text{ और } c = 1$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ है।

(iii) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।

हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = 0 = \frac{0}{1} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 1,\ b = 0 \text{ और } c = \sqrt{5}$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $x^2 + 0.x + \sqrt{5}$ है।

(iv) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।
हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = 1 = \frac{1}{1} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = 1 = \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 1,\ b = -1 \text{ और } c = 1$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $x^2 - x + 1$ है।

(v) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।
हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = \frac{-1}{4} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{4} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 4,\ b = 1 \text{ और } c = 1$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $4x^2 + x + 1$ है।

(vi) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।
हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = 4 = \frac{4}{1} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = 1 = \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 1,\ b = -4 \text{ और } c = 1$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $x^2 - 4x + 1$ है।

गणित

पाठ–2 बहुपद

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 2.3

प्रश्न 1.

विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके, निम्न में $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए:

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3,\ g(x) = x^2 - 2$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6,\ g(x) = 2 - x^2$

उत्तर 1:

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3,\ g(x) = x^2 - 2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 3 \\
\hline
x^2 - 2 & x^3 - 3x^2 + 5x - 3 \\
 & x^3 \qquad\quad - 2x \\
 & - \qquad\quad\ \ + \\
\hline
 & \quad -3x^2 + 7x - 3 \\
 & \quad -3x^2 \qquad + 6 \\
 & \quad\ + \qquad\quad\ - \\
\hline
 & \qquad\qquad 7x - 9 \\
\end{array}
$$

इसप्रकार, भागफल $= x - 2$ तथा शेषफल $= 7x - 9$ है ।

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x - 3 \\
\hline
x^2 - x + 1 & x^4 + 0.x^3 - 3x^2 + 4x + 5 \\
 & x^4 - x^3 + x^2 \\
 & - \ \ + \quad\ - \\
\hline
 & \quad x^3 - 4x^2 + 4x + 5 \\
 & \quad x^3 - x^2 + x \\
 & \quad - \quad + \quad - \\
\hline
 & \qquad -3x^2 + 3x + 5 \\
 & \qquad -3x^2 + 3x - 3 \\
 & \qquad\ + \quad - \quad + \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad 8 \\
\end{array}
$$

इसप्रकार, भागफल $= x^2 + x - 3$ तथा शेषफल $= 8$ है ।

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6,\ g(x) = 2 - x^2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & -x^2 - 2 \\
-x^2 + 2 & x^4 + 0.x^2 - 5x + 6 \\
 & x^4 - 2x^2 \\
 & - \quad + \\
 & 2x^2 - 5x + 6 \\
 & 2x^2 \quad - 4 \\
 & - \quad + \\
 & -5x + 10
\end{array}
$$

इसप्रकार, भागफल $= -x^2 - 2$ तथा शेषफल $= -5x + 10$ है ।

प्रश्न 2.

पहले बहुपद से दूसरे बहुपद को भाग करके, जाँच कीजिए कि क्या प्रथम बहुपद द्वितीय बहुपद का एक गुणनखंड है:

(i) $t^2 - 3,\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(ii) $x^2 + 3x + 1,\ 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1,\ x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

उत्तर 2:

(i) $t^2 - 3,\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2t^2 + 3t + 4 \\
t^2 + 0t - 3 & 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12 \\
 & 2t^4 + 0.t^3 - 6t^2 \\
 & - \quad - \quad + \\
 & 3t^3 + 4t^2 - 9t - 12 \\
 & 3t^3 + 0.t^2 - 9t \\
 & - \quad - \quad + \\
 & 4t^2 + 0.t - 12 \\
 & 4t^2 + 0.t - 12 \\
 & - \quad - \quad + \\
 & 0
\end{array}
$$

क्योंकि शेषफल 0 है, इसलिए बहुपद $t^2 - 3$ बहुपद $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$ का एक गुणनखंड है।

(ii) $x^2 + 3x + 1,\ 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 - 4x + 2 \\
\hline
x^2+3x+1 & 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2 \\
 & 3x^4 + 9x^3 + 3x^2 \\
 & - \quad - \quad - \\
\hline
 & \quad -4x^3 - 10x^2 + 2x + 2 \\
 & \quad -4x^3 - 12x^2 - 4x \\
 & \quad + \quad + \quad + \\
\hline
 & \qquad\quad 2x^2 + 6x + 2 \\
 & \qquad\quad 2x^2 + 6x + 2 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0 \\
\hline
\end{array}
$$

क्योंकि शेषफल 0 है, इसलिए बहुपद $x^2 + 3x + 1$ बहुपद $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$ का एक गुणनखंड है।

(iii) $x^3 - 3x + 1,\ x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 1 \\
\hline
x^3-3x+1 & x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1 \\
 & x^5 - 3x^3 + x^2 \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & \quad -x^3 \qquad + 3x + 1 \\
 & \quad -x^3 \qquad + 3x - 1 \\
 & \quad + \qquad\quad - \quad + \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad 2 \\
\hline
\end{array}
$$

क्योंकि शेषफल 0 नहीं है, इसलिए बहुपद $x^3 - 3x + 1$ बहुपद $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$ का नहीं गुणनखंड है।

प्रश्न 3.

$3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के अन्य सभी शून्यक ज्ञात कीजिए, यदि इसके दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं।

उत्तर 3:

माना $p(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$

इस प्रकार, $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$, $p(x)$ के शून्यक हैं ।

इसलिए, $\left(x-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ और $\left(x+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $p(x)$ के गुणनखंड हैं ।

या $x^2-\frac{5}{3}$, $p(x)$ का गुणनखंड है।

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2+6x+3 \\ x^2+0.x-\frac{5}{3} & 3x^4+6x^3-2x^2-10x-5 \\ & 3x^4+0x^3-5x^2 \\ & -\quad -\quad + \\ \hline & 6x^3+3x^2-10x-5 \\ & 6x^3+0x^2-10x \\ & -\quad -\quad + \\ \hline & 3x^2+0x-5 \\ & 3x^2+0x-5 \\ & -\quad -\quad + \\ \hline & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$3x^4+6x^3-2x^2-10x-5=\left(x^2-\frac{5}{3}\right)\left(3x^2+6x+3\right)$$

$$=3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)\left(x^2+2x+1\right)$$

इस प्रकार,

$p(x)=3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)(x^2+2x+1)$

$=3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)[x^2+x+x+1]$

$=3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)[x(x+1)+1(x+1)]$

$=3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)(x+1)(x+1)$

इसलिए, $3x^4+6x^3-2x^2-10x-5$ के शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$, $-\sqrt{\frac{5}{3}}$, -1 और -1 हैं।

प्रश्न 4.

यदि $x^3 - 3x^2 + x + 2$ को एक बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर, भागफल और शेषफल क्रमशः $x - 2$ और $-2x + 4$ हैं तो $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

दिया है

भाजक $= g(x)$

भागफल $= x - 2$

भाज्य $= x^3 - 3x^2 + x + 2$

शेषफल $= -2x + 4$

हम जानते है कि

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

इसलिए,

$x^3 - 3x^2 + x + 2 = g(x) \times (x - 2) - (-2x + 4)$

$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + x + 2 - (-2x + 4) = g(x) \times (x - 2)$

$\Rightarrow \dfrac{x^3 - 3x^2 + x + 2 - (-2x + 4)}{(x - 2)} = g(x)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\
\hline
x - 2 & x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & \quad -x^2 + 3x - 2 \\
 & \quad -x^2 + 2x \\
 & \quad + \quad - \\
\hline
 & \qquad x - 2 \\
 & \qquad x - 2 \\
 & \qquad - \quad + \\
\hline
 & \qquad 0 \\
\hline
\end{array}
$$

इस प्रकार, $g(x) = x^2 - x + 1$

प्रश्न 5.

बहुपदों $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ और $r(x)$ के ऐसे उदाहरण दीजिए जो विभाजन अल्गोरिथम को संतुष्ट करते हों तथा

(i) घात $p(x)$ = घात $q(x)$ **(ii)** घात $q(x)$ = घात $r(x)$ **(iii)** घात $r(x) = 0$

उत्तर 5:

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से $p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$, जहाँ $q(x) \neq 0$,
घात $r(x) = 0$ या घात $r(x) <$ घात $g(x)$

(i) घात $p(x)$ = घात $q(x)$

भाज्य और भागफल की घात तभी बराबर हो सकती है जब भाजक एक अचर (घात 0 हो) संख्या हो।

इसलिए,

माना $p(x) = 3x^2 - 6x + 5$

माना $g(x) = 3$

इस प्रकार $q(x) = x^2 - 2x + 1$ और $r(x) = 2$

(ii) घात $q(x)$ = घात $r(x)$

माना $p(x) = 2x^2 - 4x + 3$

माना $g(x) = x^2 - 2x + 1$

इस प्रकार $q(x) = 2$ और $r(x) = 1$

(iii) घात $r(x) = 0$

माना $p(x) = 2x^2 - 4x + 3$

माना $g(x) = x^2 - 2x + 1$

इस प्रकार $q(x) = 2$ और $r(x) = 1$

गणित

पाठ–2 बहुपद

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 2.4

प्रश्न 1.

सत्यापित कीजिए कि निम्न त्रिघात बहुपदों के साथ दी गई संख्याएँ उसकी शून्यक हैं। प्रत्येक स्थिति में शून्यांकों और गुणांकों के बीच संबंध को भी सत्यापित कीजिए:

(i). $2x^3 + x^2 - 5x + 2;\ \frac{1}{2}, 1, -2$ **(ii).** $x^3 - 4x^2 + 5x - 2;\quad 2, 1, 1$

उत्तर 1:

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2;\ \frac{1}{2}, 1, -2$

माना $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

इसलिए, $p\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2$

$= 2 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 5 \times \frac{1}{2} + 2$

$= \frac{2}{4} - \frac{5}{2} + 2$

$= \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$

इसलिए, $\frac{1}{2}$, $p(x)$ का शून्यक है।

अब, $p(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 2$

$= 2 \times 1 + 1 - 5 \times 1 + 2$

$= 3 - 5 + 2$

$= 5 - 5 = 0$

इसलिए, 1, $p(x)$ का शून्यक है।

अब, $p(-2) = 2(-2)^3 + (-2)^2 - 5(-2) + 2$

$= 2 \times (-8) + 4 + 10 + 2$

$= -16 + 4 + 10 + 2$

$= -16 + 16 = 0$

इसलिए, -2, $p(x)$ का शून्यक है।

इसप्रकार, $\frac{1}{2}, 1$ और -2, $p(x)$ के शून्यक हैं।

अब, माना $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ तथा $\gamma = -2$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} + 1 + (-2) = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{-(1)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times (-2) + (-2) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2 - 1 = \frac{-5}{2} = \frac{-5}{2} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2} \times 1 \times (-2) = -1 = \frac{-2}{2} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसप्रकार, शून्यांकों और गुणांकों के बीच संबंध सत्यापित हुआ।

(ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2; \quad 2, 1, 1$

माना $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

इसलिए, $p(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 5(2) - 2$

$= 8 - 16 + 10 - 2$

$= 18 - 18 = 0$

इसलिए, 2, $p(x)$ का शून्यक है।

अब, $p(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 5(1) - 2$

$= 1 - 4 + 5 - 2$

$= 6 - 6 = 0$

इसलिए, 1, $p(x)$ का शून्यक है।

इसप्रकार, 2, 1 और 1, $p(x)$ के शून्यक हैं।

अब, माना $\alpha = 2, \beta = 1$ तथा $\gamma = 1$

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 + 1 + 1 = 4 = \frac{-(-1)}{1} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 2 = 2 + 1 + 2 = 5 = \frac{5}{1} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta\gamma = 2 \times 1 \times 1 = 2 = \frac{-(-2)}{1} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसप्रकार, शून्यांकों और गुणांकों के बीच संबंध सत्यापित हुआ।

प्रश्न 2.

एक त्रिघात बहुपद प्राप्त कीजिए जिसके शून्याकों का योग, दो शून्याकों को एक साथ लेकर उनके गुणनफलों का योग तथा तीनों शून्याकों के गुणनफल क्रमशः 2, −7, −14 हों।

उत्तर 2:

माना $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ एक त्रिघात बहुपद है और α, β तथा γ बहुपद के शून्याक हैं

दिया है,

$\alpha + \beta + \gamma = 2$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -7$

$\alpha\beta\gamma = -14$

हम जानते हैं कि,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसलिए,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{-b}{a} = \frac{2}{1}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{c}{a} = \frac{-7}{1}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{-d}{a} = \frac{-14}{1}$$

तुलना करने पर, $a = 1, b = -2, c = -7$ और $d = 14$

अतः,

त्रिघात बहुपद $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ अर्थात $p(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 14$ होगा।

प्रश्न 3.

यदि बहुपद $x^3 - 3x^2 + x + 1$ के शून्यक $a - b,\ a,\ a + b$ हों, तो a और b ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:

हम जानते हैं कि,

$$\text{मूलों का योगफल} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसलिए,

$$(a - b) + a + (a + b) = \frac{-(-3)}{1}$$

$\Rightarrow 3a = 3$

$\Rightarrow a = 1$

$$\text{मूलों का गुणनफल} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसलिए,

$$(a - b)(a)(a + b) = \frac{-(1)}{1}$$

$\Rightarrow (1 - b)1(1 + b) = -1$ [क्योंकि $a = 1$]

$\Rightarrow 1 - b^2 = -1$

$\Rightarrow b^2 = 2$

$\Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$

इस प्रकार, $a = 1$ और $b = \pm\sqrt{2}$

प्रश्न 4:

यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 13x - 35$ के दो शून्यक $2 \pm \sqrt{3}$ हों, तो अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

माना $p(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 13x - 35$

दिया है, $2 + \sqrt{3}$ और $2 - \sqrt{3}$ बहुपद $p(x)$ के दो शून्यक हैं

इसलिए, $(x - 2 - \sqrt{3})$ और $(x - 2 + \sqrt{3})$ बहुपद $p(x)$ के दो गुणनखंड हैं।

इसलिए, $(x - 2)^2 - (\sqrt{3})^2$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड है।

अर्थात $x^2 - 4x + 1$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड है। [क्योंकि $(x-2)^2 - (\sqrt{3})^2 = x^2 - 4x + 1$]

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x - 35 \\
x^2 - 4x + 1 & x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35 \\
 & x^4 - 4x^3 + x^2 \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & -2x^3 - 27x^2 + 138x - 35 \\
 & -2x^3 + 8x^2 - 2x \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & -35x^2 + 140x - 35 \\
 & -35x^2 + 140x - 35 \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

इसप्रकार,

$p(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 13x - 35$

$= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 35)$

$= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 7x + 5x - 35)$

$= (x^2 - 4x + 1)[x(x-7) + 5(x-7)]$

$= (x^2 - 4x + 1)(x+5)(x-7)$

अन्य शून्यक प्राप्त करने के लिए $x + 5 = 0$ और $x - 7 = 0$ रखने पर,

$x = -5$ और $x = 7$

इसप्रकार, अन्य शून्यक $x = -5$ और $x = 7$ हैं।

प्रश्न 5.

यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ को एक अन्य बहुपद $x^2 - 2x + k$ से भाग दिया जाए और शेषफल $x + a$ आता हो, तो k तथा a ज्ञात कीजिए।

उत्तर 5:

दिया है

भाजक $= x^2 - 2x + k$

भाज्य $= x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$

शेषफल $= x + a$

हम जानते हैं कि

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

इसलिए,

$$x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10 = (x^2 - 2x + k) \times \text{भागफल} + (x + a)$$

$$x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10 - (x + a) = (x^2 - 2x + k) \times \text{भागफल}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 10 - a}{x^2 - 2x + k} = \text{भागफल}$$

इसप्रकार, यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 10 - a$ को बहुपद $x^2 - 2x + k$ से भाग दिया जाए तो शेषफल 0 होगा।

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + (8-k) \\
\hline
x^2 - 2x + k & x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 10 - a \\
 & x^4 - 2x^3 + kx^2 \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & -4x^3 + (16-k)x^2 - 26x \\
 & -4x^3 + 8x^2 - 4kx \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & (8-k)x^2 - (26-4k)x + 10 - a \\
 & (8-k)x^2 - (16-2k)x + (8k - k^2) \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & (-10+2k)x + (10 - a - 8k + k^2)
\end{array}$$

तुलना करने पर,

$-10 + 2\mathrm{k} = 0$

$\Rightarrow 2k = 10$

$\Rightarrow k = 5$

और

$10 - a - 8k + k^2 = 0$

$\Rightarrow 10 - a - 8 \times 5 + 5^2 = 0$ [क्योंकि $k = 5$]

$\Rightarrow 10 - a - 40 + 25 = 0$

$\Rightarrow -a - 5 = 0$

$\Rightarrow a = -5$

इस प्रकार, $k = 5$ और $a = -5$