10. वृत्त

प्रश्नावली 10.1

Q1. एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं?

उत्तर : अनेक |

Q2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे .... बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है |

(ii) वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को .... कहते हैं |

(iii) एक वृत्त की .... समांतर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं |

(iv) वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ट बिन्दु को .... कहते हैं |

उत्तर:

(i) एक

(ii) जीवा

(iii) दो

(iv) स्पर्श बिंदु

Q3. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु पर स्पर्श रेखा PQ केंद्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है की OQ = 12 सेमी | PQ की लंबाई है :

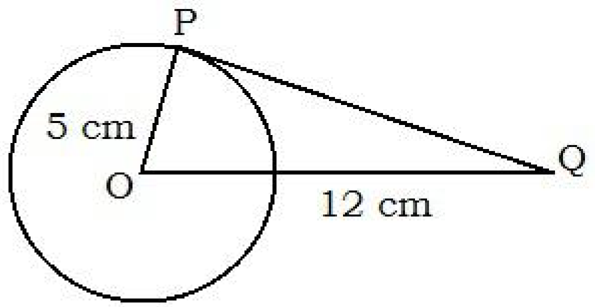
√(A) 12 सेमी

(B) 13 सेमी

(C) 8.5 सेमी

(D) $\sqrt{119}$ सेमी

उत्तर : (D)



$PQ^2 = OQ^2 - PO^2$

$= 12^2 - 5^2$

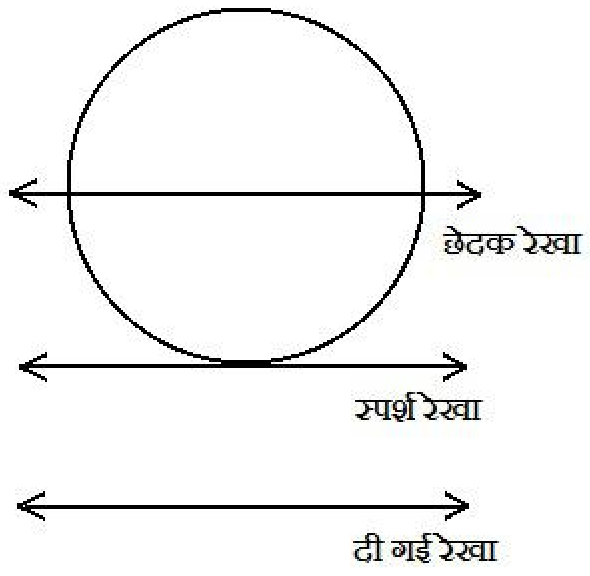
$= 144 - 25$

$= 119$

PQ = $\sqrt{119}$ सेमी

Q4. एक वृत्त खींचिए और दो एक दी गई रेखा के समांतर दो ऐसी रेखाएँ खींचिए की उनमें से एक स्पर्श रेखा हो तथा दूसरी छेदक रेखा हो |

उत्तर :



प्रश्नावली 10.2

प्रश्न सं. 1,2, 3 में सही विकल्प चुनिए एंव उचित कारण दीजिए |

Q1. एक बिंदु Q से एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 24 cm तथा Q की केंद्र से दूरी 25 cm है | वृत्त की त्रिज्या है :

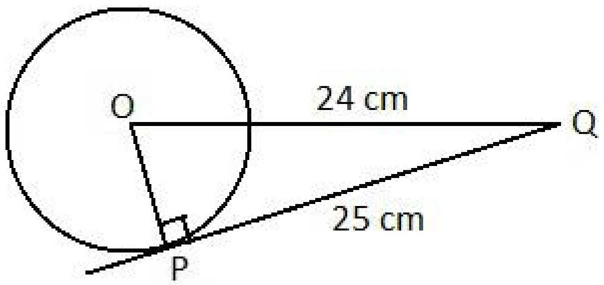
(A) 7 cm

(B) 12 cm

(C) 15 cm

(D) 24.5 cm

उत्तर :



त्रिज्या (OP) = ?

OQ = 24 cm, PQ = 25 cm

चूँकि OP ⊥ PQ है, पैथागोरस प्रमेय से -

$PQ^2 = OP^2 + OQ^2$

$25^2 = OP^2 + 24^2$

$OP^2 = 625 - 576$

$OP^2 = 49$

$OP = \sqrt{49} = 7$ cm

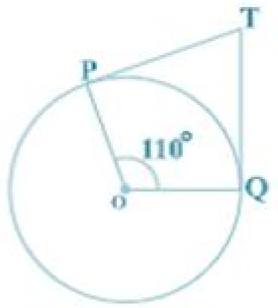
Q2. आकृति 10.11 में, यदि TP केंद्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार है की $\angle POQ = 110^o$, तो $\angle PTQ$ बराबर है :

(A) 60^o

(B) 70^o

(C) 80^o

(D) 90^o



आकृति 10.11

उत्तर : (B) 70º

हल : ∠POQ + ∠PTQ = 180 °

=> 110 ° + ∠PTQ = 180 °

=> ∠PTQ = 180 ° - 110 °

=> 70 °

Q3. यदि एक बिन्दु P से O केंद्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएँ 80º के कोण पर झुकी हों, तो ∠POA बराबर है:

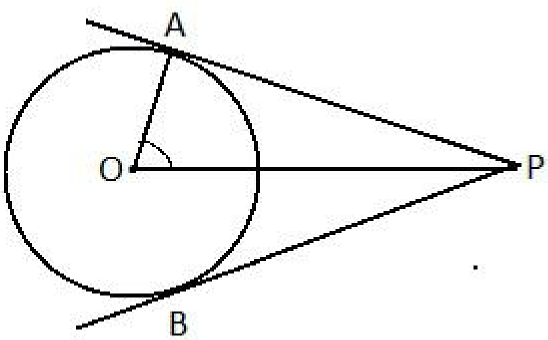
(A) 50º

(B) 60º

(C) 70º

(D) 80º

उत्तर : (A) 50º



दिया है : ∠APB = 80 °

इसलिए, ∠APO = 80 °/2 = 40 °

स्पर्श बिंदु पर $\angle A = 90^\circ$

त्रिभुज AOP में,

=> $\angle A + \angle APO + \angle POA = 180^\circ$

=> $90^\circ + 40^\circ + \angle POA = 180^\circ$

=> $\angle POA = 180^\circ - 130^\circ$

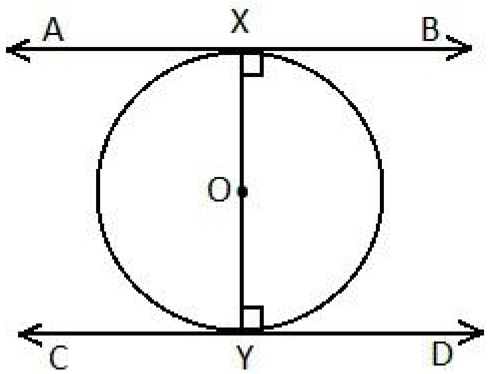
=> $\angle POA = 50^\circ$

Q4. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती है |

हल :

दिया है : O केंद्र वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ AB तथा CD हैं जो वृत्त को X तथा Y पर क्रमश: स्पर्श करती है |

सिद्ध करना है : AB || CD



प्रमाण :

OX ⊥ AB (स्पर्श बिंदु को केंद्र से मिलाने वाली रेखा स्पर्श बिंदु पर लंब होती है)

अत: $\angle BXO = 90^\circ$ .... (i)

इसीप्रकार, OY ⊥ CD

अत: $\angle DYO = 90^\circ$ .... (i)

समीकरण (i) तथा (ii) जोड़ने पर

$\angle BXO + \angle DYO = 90^\circ + 90^\circ$

=> $\angle BXO + \angle DYO = 180^\circ$

चूँकि एक ही ओर से अंत:आसन्न कोण संपूरक हैं, इसलिए

AB || CD **Proved**

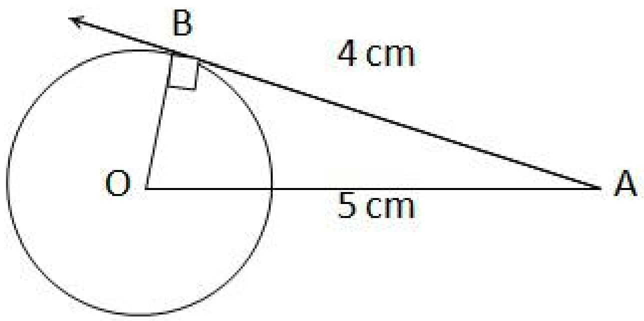
Q5. सिद्ध कीजिए की स्पर्श बिन्दु से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लंब वृत्त के केंद्र से होकर जाता है|

Q6.एक बिन्दु A से जो एक वृत्त के केंद्र से 5cm दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 4cm है | वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए |

हल : बिंदु A से केंद्र की दुरी (OA) = 5 cm

स्पर्श रेखा AB की लंबाई = 4 cm

वृत्त की त्रिज्या OB = ?



समकोण त्रिभुज AOB में, पैथागोरस प्रमेय से

$OA^2 = OB^2 + AB^2$

$5^2 = OB^2 + 4^2$

$5^2 - 4^2 = OB^2$

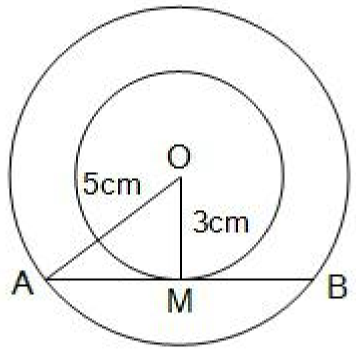
$25 - 16 = OB^2$

$OB^2 = 9$

$OB = \sqrt{9} = 3$ cm

Q7. दो सकेंद्रिय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 cm तथा 3 cm है | बड़े वृत्त की उस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो |

हल :



दो संकेंद्री वृत्त जिसका केंद्र O है और बड़े वृत्त की

जीवा AB है जो छोटे वृत्त को बिंदु M पर प्रतिच्छेद करती है |

त्रिज्याएँ क्रमश: AO = 5 cm और OM = 3 cm है |

OM ⊥ AB है | (चूँकि जीवा को केंद्र से मिलाने वाली रेखाखण्ड जीवा पर लंब होती है |)

अत: समकोण त्रिभुज AOM में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$OA^2 = OM^2 + AM^2$

$5^2 = 3^2 + AM^2$

$5^2 - 3^2 = AM^2$

$25 - 9 = AM^2$

$AM^2 = 16$

$AM = \sqrt{16} = 4$ cm

अत: $AB = 2 \times AM$

$= 2 \times 4 = 8$ cm

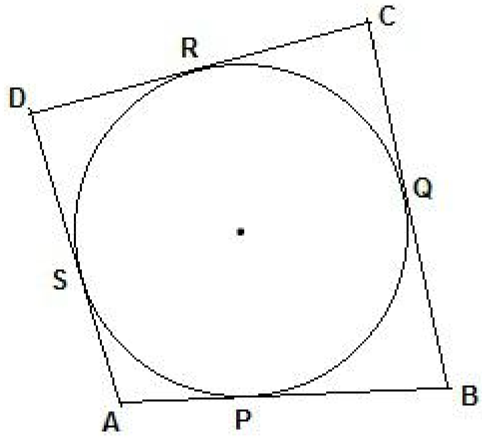
जीवा की लंबाई 8 cm है |

Q8. एक वृत्त के परिगत एक चतुर्भज ABCD खींचा गया है (देखिए आकृति 10.12) | सिद्ध कीजिए : AB + CD = AD + BC.

हल :

दिया है : ABCD एक O केंद्र वाले वृत्त के परिगत बना चतुर्भुज है | रेखाएँ AB, BC, CD और AD क्रमश: बिंदु P, Q, R और S पर स्पर्श करती हैं |

सिद्ध करना है : AB + CD = AD + BC



प्रमाण : P और S स्पर्श बिंदु हैं |

अत: AP = AS .... (i) प्रमेय 10.2 से

(बाह्य बिंदु से खिंची गई स्पर्श रेखाएँ समान लंबाई की होती है |)

इसीप्रकार,

BP = BQ .... (ii)

CR = CQ .... (iii)

और DR = DS .... (iv)

समी० (i), (ii), (iii) और (iv) जोड़ने पर

AP + BP + CR + DR = AS + DS + BQ + CQ

AB + CD = AD + BC **Proved**

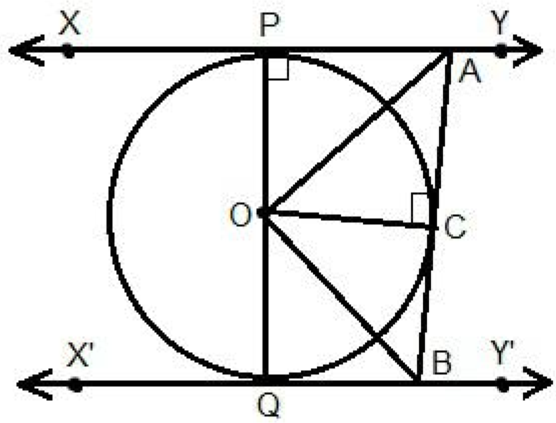
Q9. आकृति 10.13 में XY तथा X'Y', O केंद्र वाले किसी वृत्त पर दो समांतर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा X'Y' को B पर प्रतिच्छेद करती है | सिद्ध कीजिए की ∠AOB = 90° है |

हल :

दिया है : XY तथा X'Y', O केंद्र वाले किसी वृत्त पर दो समांतर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा X'Y' को B पर प्रतिच्छेद करती है |

सिद्ध करना है : ∠AOB = 90°

प्रमाण :



ΔAOP और □AOC में

PA = CA (भुजा) प्रमेय 10.2 से

∠APO = ∠ACO 90° प्रत्येक

AO = AO उभयनिष्ठ कर्ण

RHS सर्वांगसमता नियम से

ΔAOP ≅ ΔAOC

इसलिए, ∠PAO = ∠CAO (i) BY CPCT

इसीप्रकार □BOQ ≅ ΔBOC

इसलिए, ∠QBO = ∠CBO (ii) BY CPCT

अब XY || X'Y' दिया है |

इसलिए, ∠PAC + ∠QBC = 180° (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोणों का योग)

या (∠PAO + ∠CAO) + (∠QBO + ∠CBO) = 180°

या (∠CAO + ∠CAO) + (∠CBO + ∠CBO) = 180° (समी० (i) तथा (ii) के प्रयोग से)

या 2 ∠CAO + 2 ∠CBO = 180°

या 2 (∠CAO + ∠CBO) = 180°

या $\angle CAO + \angle CBO = \frac{180^\circ}{2}$

या ∠CAO + ∠CBO = 90° .... (iii)

अब त्रिभुज AOB में,

∠AOB + ∠CAO + ∠CBO = 180°

∠AOB + 90° = 180°

∠AOB = 180° - 90°

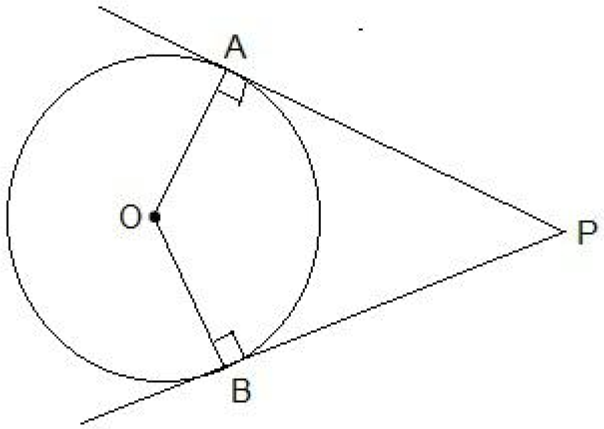
∠AOB = 90° **Proved**

Q10. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का संपूरक होता है |

हल :

दिया है : O केंद्र वाले वृत्त की की बाह्य बिंदु P से खिंची गई स्पर्श रेखाओं AP तथा BP है |

सिद्ध करना है : ∠AOB + ∠APB = 180°



प्रमाण :

OA ⊥ AP और OB ⊥ BP (चूँकि स्पर्श रेखा से केंद्र को मिलाने वाली रेखाखंड लंब होती है |)

अत: ∠OAP = 90° .... (i)

और ∠OBP = 90° .... (ii)

चूँकि APBO एक चतुर्भुज है इसलिए,

∠OAP + ∠AOB + ∠OBP + ∠APB = 360°

=> $90^\circ + \angle AOB + 90^\circ + \angle APB = 360^\circ$

=> $180^\circ + \angle AOB + \angle APB = 360^\circ$

=> $\angle AOB + \angle APB = 360^\circ - 180^\circ$

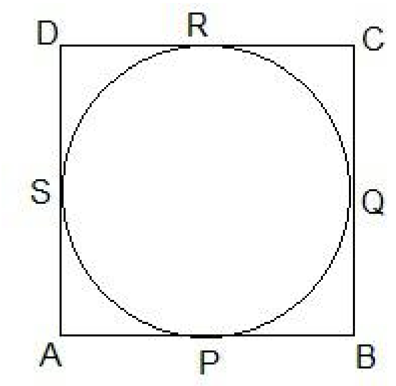
=> $\angle AOB + \angle APB = 180^\circ$ **Proved**

Q11. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समान्तर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है |

हल :

दिया है : ABCD एक O केंद्र वाले वृत्त के परिगत बना समांतर चतुर्भुज है | रेखाएँ AB, BC, CD और AD क्रमश: बिंदु P, Q, R और S पर स्पर्श करती हैं |

सिद्ध करना है : ABCD एक समचतुर्भुज है |



प्रमाण : चूँकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है इसलिए

AB = CD .... (i) (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)

इसीप्रकार, BC = AD .... (ii)

अब, P और S स्पर्श बिंदु हैं |

अत: AP = AS .... (iii) प्रमेय 10.2 से

(बाह्य बिंदु से खिंची गई स्पर्श रेखाएँ समान लंबाई की होती है |)

इसीप्रकार,

BP = BQ .... (iv)

CR = CQ .... (v)

और DR = DS .... (vi)

समी० (iii), (iv), (v) और (vi) जोड़ने पर

AP + BP + CR + DR = AS + DS + BQ + CQ

या AB + CD = AD + BC

या AB + AB = AD + AD समी० (i) तथा (ii) से

या 2 AB = 2 AD

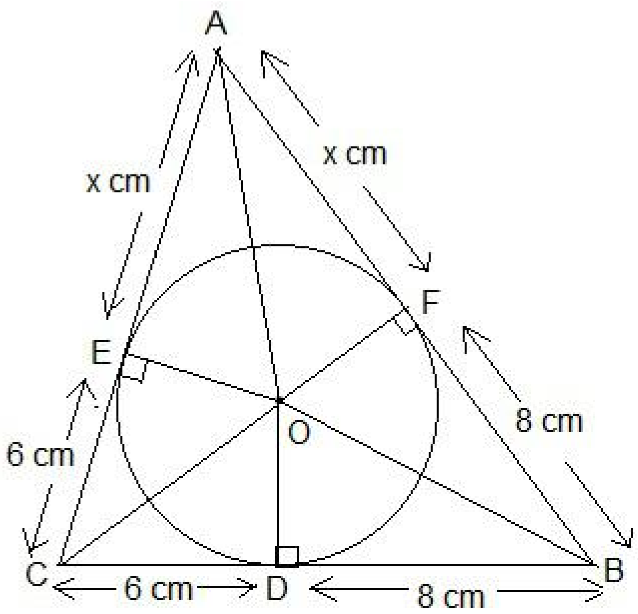
या AB = AD .... (vii)

समीकरण (i), (ii) और (vii) से

AB = BC = CD = AD

अत: ABCD एक समचतुर्भुज है | **Proved**

Q12. 4cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के परिगत एक त्रिभुज ABC इस प्रकार खींचा गया है की रेखाखंड BD और DC (जिनमें स्पर्श बिन्दु D द्वारा BC विभाजित है) की लंबाई क्रमशः 8 cm और 6 cm हैं (देखिए आकृति 10.14) | भुजाएँ AB और AC ज्ञात कीजिए |



हल : माना AF = AE = x cm (प्रमेय 10.2 से)

इसी प्रकार CD = CE = 6 cm

और BD = BF = 8 cm

अत: AB = 8 + x cm, BC = 8 + 6 = 14 cm और AC = 6 + x cm

OD = OF = OE = 4 cm (त्रिज्या)

अब त्रिभुज का क्षेत्रफल हेरॉन सूत्र से

a = 8 + x cm, b = 14 cm और c = 6 + x cm

$$s = \frac{a + b + C}{2} = \frac{8+x + 14 + 6 + x}{2} = \frac{28 + 2x}{2}$$

$$s = \frac{2(14 + x)}{2} = 14 + x$$

ΔABC का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{(14+x)[14+x-(8+x)][14+x-14][14+x-(6+x)]}$$

$$= \sqrt{(14+x)[14+x-8-x][x][14+x-6-x]}$$

$$= \sqrt{(14+x)[6][x][8]}$$

$$= \sqrt{48\,x\,(14+x)}\ \text{cm}^2 \quad \text{.........}\ \text{(i)}$$

ΔABC का क्षेत्रफल = ar(AOB) + ar(BOC) + ar(AOC)

$$= \frac{1}{2} \times AB \times OF + \frac{1}{2} \times BC \times OD + \frac{1}{2} \times AC \times OE$$

$$= \frac{1}{2} (AB \times OF + BC \times OD + AC \times OE)$$

$$= \frac{1}{2} (8 + x \times 4 + 14 \times 4 + 6 + x \times 4)$$

$$= \frac{1}{2} \times 4\ (8 + x + 14 + 6 + x)$$

$$= 2(28 + 2x)\ \text{cm}^2 \quad \text{.........}\ \text{(ii)}$$

समीकरण (i) और (ii) से चूँकि दोनों त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल हैं |

$$\sqrt{48\,x\,(14+x)}\ cm^2 = 2(28 + 2x)\ cm^2$$

=> $48x(14 + x) = [2(28 + 2x)]^2$

=> $48x(14 + x) = [4(14 + x)]^2$

=> $48x(14 + x) = [4 \times 4\ (14 + x)(14 + x)$

=> $48x = 16\ (14 + x)$ सरल करने पर

=> $3x = (14 + x)$ सरल करने पर

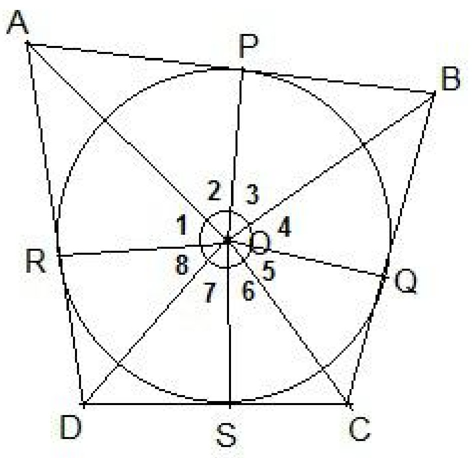
=> $3x - x = 14$

=> $2x = 14$

=> $x = 7$

अत: भुजाएँ AB = 8 + 7 = 15 cm और AC = 6 + 7 = 13 cm

Q13. सिद्ध कीजिए की वृत्त के परिगत बनी चतुर्भुज की आमने - सामने की भुजाएँ केंद्र पर संपूरक कोण अंतरित करती हैं |



हल :

दिया है : ABCD O केंद्र वाले एक वृत्त के परिगत बना चतुर्भुज है |

सिद्ध करना है : $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$

प्रमाण : $\Delta AOP \cong AOR$ प्रमेय 10.2 से

अत: $\angle 1 = \angle 2$ .... (i) संगत भाग

इसी प्रकार,

$\angle 3 = \angle 4$ .... (ii)

$\angle 5 = \angle 6$ .... (iii)

$\angle 7 = \angle 8$ .... (iii)

अब $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360^\circ$
(केंद्र पर अंतरित कोण)

या $\angle 2 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 7 = 360^\circ$

समी० (i) (ii) (iii) और (iv) के प्रयोग से

या $2\angle 2 + 2\angle 3 + 2\angle 6 + 2\angle 7 = 360^\circ$

या $2(\angle 2 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7) = 360^\circ$

या $(\angle 2 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7) = \frac{360^\circ}{2}$

या $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ **Proved**