12. वृतों से सम्बंधित क्षेत्रफल

प्रश्नावली 12.1

Q1. दो वृत्तों की त्रिज्या क्रमशः 19 cm और 9 cm हैं | उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है |

हल : पहले वृत्त की त्रिज्या R = 19 cm

दुसरे वृत्त की त्रिज्या r = 9 cm

नए वृत्त का परिमाप = पहले वृत्त का परिमाप + दुसरे वृत्त का परिमाप

नए वृत्त का परिमाप = $2\pi R1 + 2\pi r2$

$= 2\pi(R + r)$

$= 2\pi(19 + 9)$

= 2 x 22/7 x 28

= 2 x 22 x 4

= 176 cm

Q2. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8 cm और 6 cm हैं | उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है |

हल : पहले वृत्त की त्रिज्या R = 8 cm

दुसरे वृत्त की त्रिज्या r = 6 cm

नए वृत्त का परिमाप = पहले वृत्त का परिमाप + दुसरे वृत्त का परिमाप

नए वृत्त का परिमाप = $\pi R2 + \pi r2$

$= \pi(R2 + r2)$

$= 2\pi(19 + 9)$

= 2 x 22/7 x 28

$= 2 \times 22 \times 4$

$= 176$ cm

Q3. आकृति 12.3 एक तीरंदाजी लक्ष्य को दर्शाती है, जिसमें केंद्र से बाहर की ओर पाँच क्षेत्र GOLD, RED, BLUE, BLACK और WHITE चिन्हित हैं, जिनसे अंक अर्जित किए जा सकते हैं | GOLD अंक वाले क्षेत्र का व्यास 21 cm है तथा प्रत्येक अन्य पट्टी 10.5 cm चौड़ी है | अंक प्राप्त कराने वाले इन पाँचों क्षेत्रों में से प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

आकृति 12.3

हल :

(i) गोल्ड की त्रिज्या $r = \frac{21}{2} = 10.5$ cm

GOLD का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$

$= \frac{11 \times 3 \times 21}{2}$

$= \frac{693}{2} = 346.5 \text{ cm}^2$

(ii) RED के लिए R = 21 cm और r = $\frac{21}{2}$ cm

RED का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$

$$= \frac{22}{7}\left[21^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{22}{7}[21^2 - 10.5^2]$$

$$= \frac{22}{7}(21 + 10.5)(21 - 10.5)$$

[चूँकि $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

$$= \frac{22}{7}(31.5)(10.5)$$

$$= 22 \times 31.5 \times 1.5$$

RED = $1039.5\ cm^2$

(iii) BLUE के लिए R = 31.5 cm और r = 21 cm

BLUE का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$

$$= \frac{22}{7}[(31.5)^2 - (21)^2]$$

$$= \frac{22}{7}(31.5 + 21)\ (31.5 - 21)$$

[चूँकि $a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$]

$$= \frac{22}{7}(52.5)\ (10.5)$$

$$= 22 \times 52.5 \times 1.5$$

BLUE $= 1732.5\ cm^2$

(iv) BLACK के लिए R = 42 cm और r = 31.5 cm

BLACK का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$

$$= \frac{22}{7}[(42)^2 - (31.5)^2]$$

$$= \frac{22}{7}(42 + 31.5)\ (42 - 31.5)$$

[चूँकि $a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$]

$$= \frac{22}{7}(73.5)\ (10.5)$$

$$= 22 \times 73.5 \times 1.5$$

BLACK $= 2425.5\ cm^2$

Q4. किसी कार के प्रत्येक पहिये का व्यास 80 cm है | यदि यह कार 66 km प्रति घंटे की चाल से चाल रही है, तो 10 मिनट में प्रत्येक पहिया कितने चक्कर लगाती है ?

हल :

पहिये का व्यास = 80 cm

पहिये की त्रिज्या (r) = 40 cm

कार की चाल = 66 km प्रति घंटा

$$= \frac{11000}{\frac{1760}{700}}$$

या $$= \frac{11000}{1} \times \frac{700}{1760} \text{ चक्कर}$$

या $$= \frac{1000}{1} \times \frac{700}{160}$$

या $$= \frac{100}{1} \times \frac{700}{16}$$

या $$= \frac{100}{1} \times \frac{700}{4 \times 4}$$

या $$= 25 \times 25 \times 7$$

या $$= 625 \times 7$$

या $$= 4375 \text{ चक्कर}$$

Q5. निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

यदि एक वृत्त का परिमाप और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर है, तो उस वृत्त की त्रिज्या है :

(A) 2 मात्रक

(B) π मात्रक

(C) 4 मात्रक

(D) 7 मात्रक

हल : वृत्त का परिमाप और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर हैं -

इसलिए $2 \pi r = \pi r^2$

या $2 = r$ [दोनों पक्षों का सरलीकरण करने पर]

अत: वृत्त की त्रिज्या 2 मात्रक है |

उत्तर : (A) 2 मात्रक

प्रश्नावली 12.2

Q1. 6 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है |

Q2. एक वृत्त, के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22 cm है |

Q3. एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी लंबाई 14 cm है | इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

Q4. 10 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर समकोण अंतरित करती है | निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i) संगत लघु वृत्तखंड (ii) संगत दीर्घ त्रिज्यखंड

Q5. त्रिज्या 21 cm वाले वृत्त का एक चाप केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करता है | ज्ञात कीजिए :

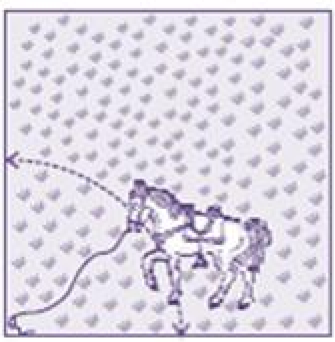
(i) चाप की लंबाई

(ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

(iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल

Q6. 15 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करती है | संगत लघु और दीर्घ वृत्तखंड़ों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

Q7. त्रिज्या 12 cm वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 120° का कोण अंतरित करती है | संगत वृत्तखंड़ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



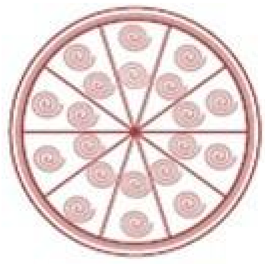
आकृति 12.11

Q8. 15 cm भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूँटे से एक घोड़े को 5 m लंबी रस्सी से बाँध दिया गया है (देखिए आकृति 12.11) | ज्ञात कीजिए :

(i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोडा चार सकता है |

(ii) चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि, यदि घोड़े को 5 m लंबी रस्सी के स्थान पर 10 m लंबी रस्सी से बाँध दिया जाए |

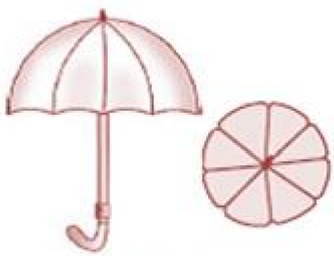
Q9. एक वृताकार ब्रुच (brooch) को चाँदी के तार से बनाया जाना है जिसका व्यास 35 mm है | तार को वृत्त के 5 व्यासों को बनाने में भी प्रयुक्त किया गया है जो उसे 10 बराबर त्रिज्यखंडों में विभाजित करता है जैसाकि आकृति 12.12 में दर्शाया गया है | तो ज्ञात कीजिए :


आकृति 12.12

(i) कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई

(ii) ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

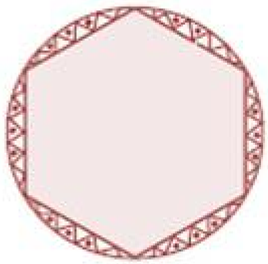
Q10. एक छतरी में आठ ताने हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं (देखिए आकृति 12.13)| छतरी को 45 cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |


आकृति 12.13

Q11 किसी कार के दो वाइपर (wipers) हैं, परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते हैं | प्रत्येक वाइपर की पट्टी की लंबाई 25 cm है और 115^o के कोण तक घूम कर safi कर सकता है | patti ओं की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ़ हो जाता है, वह ज्ञात कीजिए |

Q12. जहाजों को समुद्र में जलस्तर के नीचे स्थित चट्टानों की चेतावनी देने के लिए, एक लाइट हाउस (light house) 80^o कोण वाले एक त्रिज्यखंड में 16.5 km की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलाता है | समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें जहाजों को चेतावनी दी जा सके |

Q13. एक गोल मेज़पोश पर छः समान डिज़ाइन बने हुए हैं जैसाकि आकृति 12.14 में दर्शाया गया है | यदि मेज़पोश की त्रिज्या 28 cm है, तो 0.35 रू. प्रति वर्ग सेंटीमीटर की दर से इन डिजाइनों को बनाने की लागत ज्ञात कीजिए |



आकृति 12.14

Q14. निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए :

त्रिज्या R वाले के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसका कोण p^o है, निम्नलिखित है :

(A) $p/180 \times 2\pi r$

(B) $p/180 \times \pi r^2$

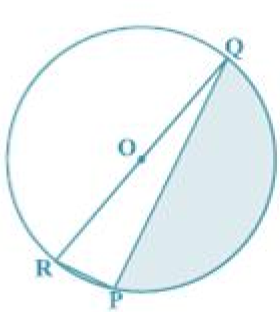
(C) $p/360 \times 2\pi r$

(D) $p/720 \times 2\pi r^2$

प्रश्नावली 12.3

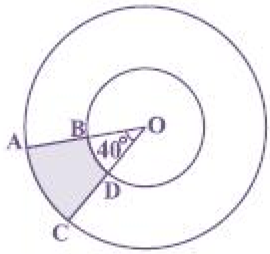
(जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए |)

Q1. आकृति 12.19 में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि PQ = 24 cm, PR = 7 cm तथा O वृत्त का केंद्र है



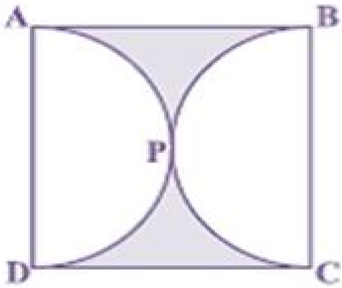
आकृति 12.19

Q2. आकृति 12.20 में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि केंद्र O वाले दोनों सकेंद्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 7 cm और 14 cm हैं तथा angle AOC = 40^o है |



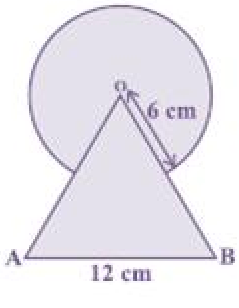
आकृति 12.20

Q3. आकृति 12.21 में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि ABCD भुजा 14 cm का एक वर्ग तथा APD और BPC दो अर्धवृत्त हैं |



आकृति 12.21

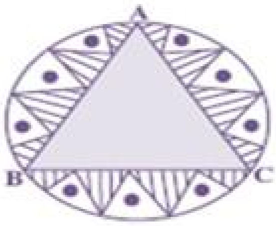
Q4. आकृति 12.22 में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ भुजा 12 cm वाले एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष O को केंद्र मान कर 6 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्तीय चाप खींचा गया है |



आकृति 12.22

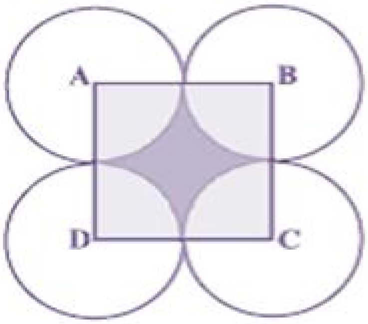
Q5. भुजा 4 cm वाले एक वर्ग के प्रत्येक कोने से 1 cm त्रिज्या वाले वृत्त का एक चतुर्थांश काटा गया है तथा बीच में 2 cm व्यास का एक वृत्त भी काटा गया है, जैसाकि आकृति 12.23 में दर्शाया गया है | वर्ग के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

Q6. एक वृत्ताकार मेज़पोश, जिसकी त्रिज्या 32 cm है, में एक समबाहु त्रिभुज ABC छोड़ते हुए एक डिज़ाइन बना हुआ है, जैसाकि आकृति 12.24 में दिखाया गया है | इस छायांकित डिज़ाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



आकृति 12.24

Q7. आकृति 12.25 में, ABCD भुजा 14 cm वाला एक वर्ग है | A,B,C और D को केंद्र मानकर, चार वृत्त इस प्रकार खींचे गए हैं कि प्रत्येक वृत्त तीन शेष वृत्तों में से दो वृत्तों को बाह्य रूप से स्पर्श करता है | छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



आकृति 12.25

Q8. आकृति 12.26 एक दौड़ने का पथ (racing track) दर्शाती है, जिसके बाएँ और दाएँ सिरे अर्धवृत्ताकार हैं|

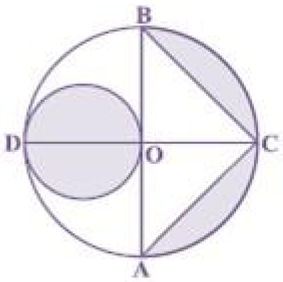
दोनों आंतरिक समांतर रेखाखंड़ों के बीच की दूरी 60 m है तथा इनमें से प्रत्येक रेखाखंड 106 m लंबा है | यदि यह पथ 10 m चौड़ा है, तो ज्ञात कीजिए |

(i) पथ के आंतरिक किनारों के अनुदिश एक पूरा चक्कर लगाने में चली गई दूरी

(ii) पथ क्षेत्रफल

आकृति 12.26

Q9. आकृति 12.27 में, AB और CD केंद्र O वाले एक वृत्त के दो परस्पर लंब व्यास हैं तथा OD छोटे वृत्त का व्यास है | यदि OA = 7 cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

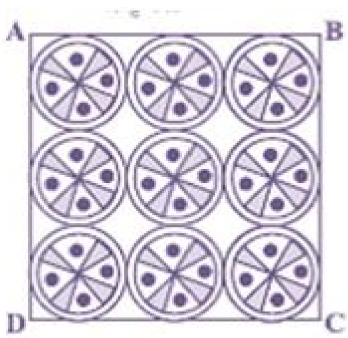


आकृति 12.27

Q10. एक समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 17320.5 cm2 है | इस त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष को केंद्र मानकर त्रिभुज की भुजा के आधे के बराबर की त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जाता है (देखिए आकृति 12.28)| छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए | ($\pi = 3.14$)

$\sqrt{3} = 1.73205$ लीजिए |)

Q11. एक वर्गाकार रुमाल पर, नौ वृत्ताकार डिज़ाइन बने हैं, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 7 cm है (देखिए आकृति 12.29) | रुमाल के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

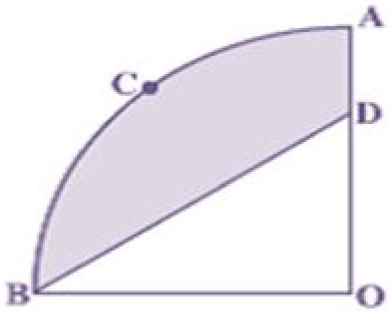


आकृति 12.29

Q12. आकृति 12.30 में, OACB केंद्र O और त्रिज्या 3.5 cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है | यदि OD = 2 cm है, तो निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

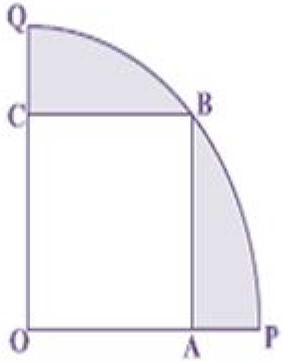
(i) चतुर्थांश OACB

(ii) छायांकित भाग |



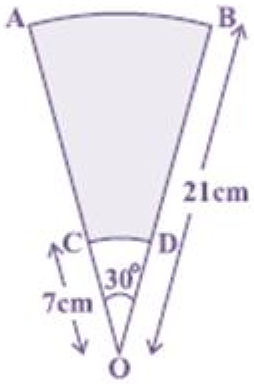
आकृति 12.30

Q13. आकृति 12.31 में, एक चतुर्थांश ओप्ब्क्के अन्तर्गत एक वर्ग OACB बना हुआ है | यदि OA = 20 cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए | (π = 3.14 लीजिए |)



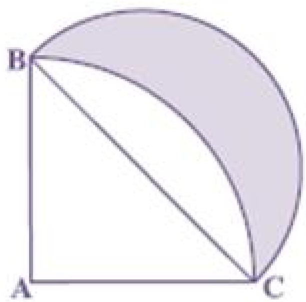
आकृति 12.31

Q14. AB और CD केंद्र O तथा त्रिज्याओं 21 cm और 7 cm वाले दो सकेंद्रीय वृत्तों के क्रमशः दो चाप हैं (देखिए आकृति 12.32) | यदि angle AOB = 30° है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



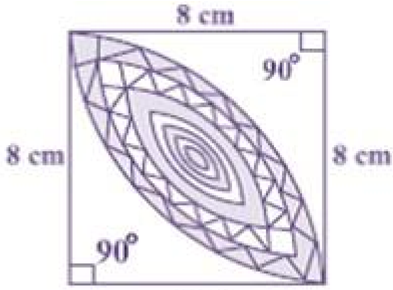
आकृति 12.32

Q15. आकृति 12.33 में, ABC त्रिज्या 14 cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है तथा BC को व्यास मान कर एक अर्धवृत्त खींचा गया है | छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



आकृति 12.33

Q16. आकृति 12.34 में, छायांकित डिज़ाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो 8 cm त्रिज्याओं वाले वृत्तों के चतुर्थांशों के बीच उभयनिष्ठ है |



आकृति 12.34