Chapter 2 Polynomials (बहुपद)

प्रश्नावली 2.1

प्रश्न 1.
निम्नलिखित व्यंजकों में कौन-कौन एक चर में बहुपद हैं और कौन-कौन नहीं हैं? कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए :

(i) $4x^2 - 3x + 7$ **(ii)** $y^2 + \sqrt{2}$ **(iii)** $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \frac{2}{y}$ **(v)** $x^{10} + y^3 + t^{50}$

हल : (i) $4x^2 - 3x + 7$ में केवल एक चर x है। इसमें x की सभी घात धनात्मक पूर्णांक हैं।

∴ व्यंजक $4x^2 - 3x + 7$ एक चर में **बहुपद** है।

- **(ii)** $y^2 + \sqrt{2}$ में केवल एक चर y है। इसमें y की सभी घात धनात्मक पूर्णांक हैं।

∴ व्यंजक $y^2 + \sqrt{2}$ एक चर में **बहुपद** है।

- **(iii)** $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ के पद $3\sqrt{t}$ में t की घात $\frac{1}{2}$ है जो धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

∴ व्यंजक $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ **बहुपद नहीं** है।

- **(iv)** $y + \frac{2}{y}$ के पद $\frac{2}{y}$ में y की घात -1 है जो धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

∴ व्यंजक $y + \frac{2}{y}$ **बहुपद नहीं** है।

- **(v)** $x^{10} + y^3 + t^{50}$ में तीन चर x, y और t हैं तथा इनकी घात धनात्मक पूर्णांक हैं।
  अत: यह **बहुपद है परन्तु एक चर में नहीं** है।

(i) $4x^2 - 3x + 7$ **(ii)** $y^2 + \sqrt{2}$ **(iii)** $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \frac{2}{y}$ **(v)** $x^{10} + y^3 + t^{50}$

हल : (i) $4x^2 - 3x + 7$ में केवल एक चर x है। इसमें x की सभी घात धनात्मक पूर्णांक हैं।

∴ व्यंजक $4x^2 - 3x + 7$ एक चर में **बहुपद** है।

- **(ii)** $y^2 + \sqrt{2}$ में केवल एक चर y है। इसमें y की सभी घात धनात्मक पूर्णांक हैं।

∴ व्यंजक $y^2 + \sqrt{2}$ एक चर में **बहुपद** है।

- **(iii)** $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ के पद $3\sqrt{t}$ में t की घात $\frac{1}{2}$ है जो धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

∴ व्यंजक $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ **बहुपद नहीं** है।

- **(iv)** $y + \frac{2}{y}$ के पद $\frac{2}{y}$ में y की घात -1 है जो धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

∴ व्यंजक $y + \frac{2}{y}$ **बहुपद नहीं** है।

- **(v)** $x^{10} + y^3 + t^{50}$ में तीन चर x, y और t हैं तथा इनकी घात धनात्मक पूर्णांक हैं।
  अत: यह **बहुपद है परन्तु एक चर में नहीं** है।

प्रश्न 2.
निम्नलिखित में से प्रत्येक में x^2 का गुणांक लिखिए :
(i) $2 + x^2 + x$
(ii) $2 - x^2 + x^3$
(iii) $\frac{\pi}{2}$

$x^2 + x$
(iv) $\sqrt{2}\, x - 1$
हल :
(i) $2 + x^2 + x$ में x^2 का गुणांक = 1
(ii) $2 - x^2 + x^3$ में x^2 का गुणांक = -1
(iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ में x^2 का गुणांक = $\frac{\pi}{2}$
(iv) $\sqrt{2}\, x - 1$ अर्थात $0.x^2 + \sqrt{2}\, x - 1$ में x^2 का गुणांक = 0

प्रश्न 3.
35 घात के द्विपद का और 100 घात के एकपदी का एक-एक उदाहरण दीजिए।

हल : 35 घात के द्विपद का उदाहरण = $x^{35} + \frac{1}{3}$
100 घात के एकपदी का उदाहरण = $10x^{100}$

हल : 35 घात के द्विपद का उदाहरण = $x^{35} + \frac{1}{3}$
100 घात के एकपदी का उदाहरण = $10x^{100}$

प्रश्न 4.
निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद की घात लिखिए :
(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$
(ii) $4 - y^2$
(iii) $5t - \sqrt{7}$
(iv) 3
हल :
(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ में चर x की अधिकतम घात = 3
दिए हुए बहुपद की घात= 3

(ii) $4 - y^2$ में चर y की अधिकतम घात = 2
दिए हुए बहुपद की घात = 2
(iii) $5t - \sqrt{7}$ में चर है की अधिकतम घात = 1
दिए हुए बहुपद की घात = 1
(iv) 3 एक अचर पद है अर्थात $3.x^0$
दिए हुए बहुपद की घात = 0

प्रश्न 5.
बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में कौन-कौन बहुपद रैखिक है, कौन-कौन द्विघाती हैं और कौन-कौन त्रिघाती हैं :
(i) $x^2 + x$
(ii) $x - x^3$
(iii) $y + y^2 + 4$
(iv) $1 + x$
(v) $3t$
(vi) r^2
(vii) $7x^3$
हल :
(i) बहुपद $x^2 + x$ में चर x की अधिकतम घात = 2
यह बहुपद द्विघाती है।
(ii) बहुपद $x - x^3$ में चर x की अधिकतम घात = 3
यह बहुपद त्रिघाती है।
(iii) बहुपद $y + y^2 + 4$ में चर y की अधिकतम घात = 2
यह बहुपद द्विघाती है।
(iv) बहुपद $1 + x$ में चर x की अधिकतम घात 1 है।
यह बहुपद रैखिक है।
(v) बहुपद $3t$ में चर है की अधिकतम घात 1 है।
यह बहुपद रैखिक है।
(vi) बहुपद r^2 में चर r की अधिकतम घात 2 है।
यह बहुपद द्विघाती है।
(vii) बहुपद $7x^3$ में चर x की अधिकतम घात 3 है।
यह बहुपद त्रिघाती है।

प्रटनावली 2.2

प्रश्न 1.
निम्नलिखित पर बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ के मान ज्ञात कीजिए।
(i) $x = 0$
(ii) $x = -1$
(iii) $x = 2$
हल :
माना बहुपद $p(x) = 5 - 4x^2 + 3$
(i) $x = 0$ पर बहुपद $p(x)$ का मान
$p(0) = 5(0) - 4(0)^2 + 3 = 3$
(ii) $x = -1$ पर बहुपद $p(x)$ का मान
$p(-1) = 5(-1) - 4(-1)^2 + 3 = -5 - 4 + 3 = -6$
(iii) $x = 2$ पर बहुपद $p(x)$ का मान
$p(2) = 5(2) - 4(2)^2 + 3 = 10 - 16 + 3 = -3$

प्रश्न 2.
निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद के लिए $p(0)$, $p(1)$ और $p(2)$ ज्ञात कीजिए :
(i) $p(y) = y^2 - y + 1$
(ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$
(iii) $p(x) = x^3$
(iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$
हल :
(i) $p(y) = y^2 - y + 1$
$p(0) = 0^2 - 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$

$p(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$
$p(2) = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$
(ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$
$p(0) = 2 + 0 + 2(0)^2 - (0)^3 = 2$
$p(1) = 2 + 1 + 2(1)^2 - (1)^3 = 2 + 1 + 2 - 1 = 4$
$p(2) = 2 + 2 + 2(2)^2 - (2)^3 = 2 + 2 + 8 - 8 = 4$
(iii) $p(x) = x^3$
$p(0) = (0)^3 = 0$
$p(1) = (1)^3 = 1$
$p(2) = (2)^3 = 8$
(iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$
$p(0) = (0 - 1)(0 + 1) = (-1)(1) = -1$
$p(1) = (1 - 1)(1 + 1) = (0)(2) = 0$
$p(3) = (2 - 1)(2 + 1) = (1)(3) = 3$

प्रश्न 3.
सत्यापित कीजिए कि दिखाए गए मान निम्नलिखित स्थितियों में संगत बहुपद के शून्यक हैं :

(i) $p(x) = 3x + 1; x = -\frac{1}{3}$ **(ii)** $p(x) = 5x - \pi; x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1; x = 1, -1$ **(iv)** $p(x) = (x + 1)(x - 2); x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2; x = 0$ **(vi)** $p(x) = lx + m; x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1; x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ **(viii)** $p(x) = 2x + 1; x = \frac{1}{2}$

हल : (i) $p(x) = 3x + 1$

$\therefore \quad p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{3}$, $p(x)$ का एक शून्यक है।

● **(ii)** $p(x) = 5x - \pi$

$\Rightarrow \quad p\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\frac{4}{5}\right) - \pi = 4 - \pi \neq 0$

$\therefore \quad \frac{4}{5}$, $p(x)$ का शून्यक नहीं है।

● **(iii)** $p(x) = x^2 - 1$

$\therefore \quad p(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ 1, $p(x)$ का एक शून्यक है।

और $\quad p(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ -1, $p(x)$ का एक शून्यक है।

(i) $p(x) = 3x + 1; x = -\frac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi; x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1; x = 1, -1$ (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2); x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2; x = 0$ (vi) $p(x) = lx + m; x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1; x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 2x + 1; x = \frac{1}{2}$

हल : (i) $p(x) = 3x + 1$

$\therefore \quad p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $-\frac{1}{3}$, $p(x)$ का एक शून्यक है।

● (ii) $p(x) = 5x - \pi$

$\Rightarrow \quad p\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\frac{4}{5}\right) - \pi = 4 - \pi \neq 0$

$\therefore$ $\frac{4}{5}$, $p(x)$ का शून्यक नहीं है।

● (iii) $p(x) = x^2 - 1$

$\therefore \quad p(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ 1, $p(x)$ का एक शून्यक है।

और $\quad p(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ -1, $p(x)$ का एक शून्यक है।

● (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2)$

$\therefore \quad p(-1) = (-1 + 1)(-1 - 2) = (0)(-3) = 0$

$\Rightarrow$ -1, $p(x)$ का एक शून्यक है।

और $\quad p(2) = (2 + 1)(2 - 2) = 3(0) = 0$

$\Rightarrow$ 2, $p(x)$ का एक शून्यक है।

● (v) $p(x) = x^2$

$\therefore \quad p(0) = 0^2 = 0$

$\Rightarrow$ 0, $p(x)$ का एक शून्यक है।

● (vi) $p(x) = lx + m$

$\therefore \quad p\left(-\frac{m}{l}\right) = l\left(-\frac{m}{l}\right) + m = -m + m = 0$

$\Rightarrow$ $-\frac{m}{l}$, $p(x)$ का एक शून्यक है।

● (vii) $p(x) = 3x^2 - 1$

$\therefore \quad p\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3 \times \frac{1}{3} - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $p(x)$ का एक शून्यक है।

और $\quad p\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3 \times \frac{2}{3} - 1 = 2 - 1 = 1 \neq 0$

$\therefore$ $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $p(x)$ का शून्यक नहीं है।

● **(iv)** $p(x) = (x+1)(x-2)$

$\therefore \quad p(-1) = (-1+1)(-1-2) = (0)(-3) = 0$

$\Rightarrow$ **-1, $p(x)$ का एक शून्यक है।**

और $\quad p(2) = (2+1)(2-2) = 3(0) = 0$

$\Rightarrow$ **2, $p(x)$ का एक शून्यक है।**

● **(v)** $p(x) = x^2$

$\therefore \quad p(0) = 0^2 = 0$

$\Rightarrow$ **0, $p(x)$ का एक शून्यक है।**

● **(vi)** $p(x) = lx + m$

$\therefore \quad p\left(-\frac{m}{l}\right) = l\left(-\frac{m}{l}\right) + m = -m + m = 0$

$\Rightarrow$ **$-\frac{m}{l}$, $p(x)$ का एक शून्यक है।**

● **(vii)** $p(x) = 3x^2 - 1$

$\therefore \quad p\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3 \times \frac{1}{3} - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ **$-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $p(x)$ का एक शून्यक है।**

और $\quad p\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3 \times \frac{2}{3} - 1 = 2 - 1 = 1 \neq 0$

$\therefore$ **$\frac{2}{\sqrt{3}}$, $p(x)$ का शून्यक नहीं है।**

● **(viii)** $p(x) = 2x + 1$

$\therefore \quad p\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 1 + 1 = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$ **$\frac{1}{2}$, $p(x)$ का शून्यक नहीं है।**

● **(viii)** $p(x) = 2x + 1$

$\therefore \quad p\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 1 + 1 = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$ **$\frac{1}{2}$, $p(x)$ का शून्यक नहीं है।**

प्रश्न 4.

निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में बहुपद को शून्यक ज्ञात कीजिए :

(i) $p(x) = x + 5$

(ii) $p(x) = x - 5$

(iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$

(v) $p(x) = 3x$

(vi) $p(x) = ax; a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d; c \neq 0$, c, d वास्तविक संख्याएँ हैं।

हल :

(i) बहुपद $p(x) = x + 5$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$p(x) = 0$

$\Rightarrow x + 5 = 0$

$\Rightarrow x = -5$

$p(3)$ को शून्यक $= -5$

(ii) बहुपद $p(x) = x - 5$ को शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$p(x) = 0$

$\Rightarrow x - 5 = 0$

$\Rightarrow x = 5$

$p(x)$ का शून्यक $= 5$

(iii) बहुपद $p(x) = 2x + 5$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$p(3) = 0$

$\Rightarrow 2x + 5 = 0$

$\Rightarrow 2x = -5$

$\Rightarrow x = \frac{-5}{2}$

$p(x)$ का शून्यके $= \frac{-5}{2}$

(iv) बहुपद $p(x) = 3x - 2$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$p(5) = 0$

$\Rightarrow 3x - 2 = 0$

$\Rightarrow 3x = 2$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$p(x)$ का शून्यक $= \frac{2}{3}$

(v) बहुपद $p(x) = 3x$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$p(x) = 0$

$\Rightarrow 3x = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$p(x)$ का शून्यक $= 0$

(vi) बहुपद $p(x) = ax; a \neq 0$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$p(x) = 0$

$\Rightarrow ax = 0$

$\Rightarrow x = 0 (a \neq 0)$

$p(x)$ का शून्यक $= 0$

(vii) बहुपद $p(x) = cx + d, c \neq 0$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$p(x) = 0$

$cx + d = 0$

$cx = -d$

$x = \frac{-d}{c} (c \neq 0)$

$p(x)$ का शून्यक $= \frac{-d}{c}$

प्रश्नावली 2.3

प्रश्न 1.

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को निम्नलिखित से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए :

(i) $x + 1$

(ii) $x - \frac{1}{2}$

(iii) x

(iv) $x + \pi$

(v) $5 + 2x$

हल :

माना $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(i) माना $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$p(x)$ को $+ 1$ से भाग देने पर शेषफल

$p(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + 1 = -1 + 3 - 3 + 1 = 0$

● **(ii)** माना $x - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $p(x)$ को $x - \frac{1}{2}$ से भाग देने पर शेषफल $= p\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 1$$
$$= \frac{1 + 6 + 12 + 8}{8} = \frac{27}{8}$$

● **(iii)** माना $x = 0$

$\therefore$ $p(x)$ को x से भाग देने पर शेषफल $= p(0)$
$$= (0)^3 + 3(0)^2 + 3(0) + 1$$
$$= 0 + 0 + 0 + 1 = 1$$

● **(iv)** माना $x + \pi = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\pi$

$\therefore$ $p(x)$ को $x + \pi$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-\pi)$
$$= (-\pi)^3 + 3(-\pi)^2 + 3(-\pi) + 1$$
$$= -\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1$$

● **(v)** माना $5 + 2x = 0$

$\Rightarrow \quad 2x = -5$

$\Rightarrow \quad x = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ $p(x)$ को $5 + 2x$ से भाग देने पर शेषफल $= p\left(-\frac{5}{2}\right)$

$$= \left(-\frac{5}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{5}{2}\right) + 1$$
$$= -\frac{125}{8} + \frac{75}{4} - \frac{15}{2} + 1$$
$$= \frac{-125 + 150 - 60 + 8}{8} = -\frac{27}{8}$$

प्रश्न 2.
$x^3 - ax^2 + 6x - a$ को $x - a$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।
हल :
माना $p(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ तथा $x - a = 0$
$p(x)$ को $x - a$ से भाग देने पर शेषफल $= (a)^3 - a(a)^2 + 6(a) - a = a^3 - a^3 + 6a - a = 5a$

प्रश्न 3.
जाँच कीजिए कि $7 + 3x$, $3x^3 + 7x$ का एक गुणनखण्ड है या नहीं।
हल :
माना $p(x) = 3x + 7x$
यदि $7 + 3x$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है तो $p(x)$ को $7 + 3x$ से भाग देने पर शेषफल शून्य होना चाहिए।
माना $7 + 3x = 0 \Rightarrow 3x = -7 \Rightarrow x = \frac{-3}{7}$

$\frac{-3}{7}$

$\therefore$ $p(x)$ को $7+3x$ से भाग देने पर शेषफल $= p\left(-\frac{7}{3}\right) = 3\left(-\frac{7}{3}\right)^3 + 7\left(\frac{7}{3}\right)$

$$= -\frac{343}{9} - \frac{49}{3}$$

$$= \frac{-343-147}{9} = -\frac{490}{9} \neq 0$$

$\because$ शेषफल शून्य नहीं है

$\therefore$ **$7+3x$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।**

$\therefore$ $p(x)$ को $7+3x$ से भाग देने पर शेषफल $= p\left(-\frac{7}{3}\right) = 3\left(-\frac{7}{3}\right)^3 + 7\left(\frac{7}{3}\right)$

$$= -\frac{343}{9} - \frac{49}{3}$$

$$= \frac{-343-147}{9} = -\frac{490}{9} \neq 0$$

$\because$ शेषफल शून्य नहीं है

$\therefore$ **$7+3x$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।**

प्रश्नावली 2.4

प्रश्न 1.

बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में से किस बहुपद का एक गुणनखण्ड $(x+1)$ है।

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$

(ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

(iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})\, x + \sqrt{2}$

हल : माना $x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

- **(i)** माना $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$p(x)$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-1)$

$= (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$= -1 + 1 - 1 + 1 = 0$

$\because$ शेषफल शून्य है

$\therefore$ **$x + 1$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।**

- **(ii)** माना $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$\therefore$ $p(x)$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-1)$

$= (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$

$\because$ शेषफल शून्य नहीं है।

$\therefore$ **$x + 1$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।**

- **(iii)** माना $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

$\therefore$ $p(x)$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-1)$

$= (-1)^4 + 3(-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) + 1$

$= 1 - 3 + 3 - 1 + 1 = 1 \neq 0$

$\because$ शेषफल शून्य नहीं है।

$\therefore$ **$x + 1$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।**

- **(iv)** माना $p(x) = x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})\, x + \sqrt{2}$

$\therefore$ $p(x)$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-1)$

$= (-1)^3 - (-1)^2 - (2 + \sqrt{2})(-1) + \sqrt{2}$

$= -1 - 1 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2} \neq 0$

$\because$ शेषफल शून्य नहीं है।

$\therefore$ **$x + 1$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।**

हल : माना $x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$

- **(i)** माना $p(x)=x^3+x^2+x+1$

$p(x)$ को $x+1$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-1)$

$=(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1$

$=-1+1-1+1=0$

$\because$ शेषफल शून्य है

$\therefore$ **$x+1$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।**

- **(ii)** माना $p(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$

$\therefore$ $p(x)$ को $x+1$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-1)$

$=(-1)^4+(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1$

$=1-1+1-1+1=1\neq 0$

$\because$ शेषफल शून्य नहीं है।

$\therefore$ **$x+1$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।**

- **(iii)** माना $p(x)=x^4+3x^3+3x^2+x+1$

$\therefore$ $p(x)$ को $x+1$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-1)$

$=(-1)^4+3(-1)^3+3(-1)^2+(-1)+1$

$=1-3+3-1+1=1\neq 0$

$\because$ शेषफल शून्य नहीं है।

$\therefore$ **$x+1$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।**

- **(iv)** माना $p(x)=x^3-x^2-(2+\sqrt{2})x+\sqrt{2}$

$\therefore$ $p(x)$ को $x+1$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-1)$

$=(-1)^3-(-1)^2-(2+\sqrt{2})(-1)+\sqrt{2}$

$=-1-1+2+\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}\neq 0$

$\because$ शेषफल शून्य नहीं है।

$\therefore$ **$x+1$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।**

प्रश्न 2.

गुणनखण्ड प्रमेय लागू करके बताइए कि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में g (x), p (x) का एक गुणनखण्ड है या नहीं :

(i) $p(x)=2x^3+x^2-2x-1$, $g(x)=x+1$

(ii) $p(x)=x^3+3x^2+3x+1$, $g(3)=x+2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 3$

हल : (i) माना $g(x) = 0$

$\Rightarrow \quad x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

$\therefore$ $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-1)$

$= 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1$

$= -2 + 1 + 2 - 1 = 0$

$\because$ शेषफल शून्य है।

$\therefore$ **$g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।**

- **(ii)** माना $g(x) = 0$

$\Rightarrow \quad x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$

$\therefore$ $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-2)$

$= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1$

$= -8 + 12 - 6 + 1$

$= -1 \neq 0$

$\because$ शेषफल शून्य नहीं है।

$\therefore$ **$g(x)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।**

- **(iii)** माना $g(x) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

$\therefore$ $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर शेषफल $= p(3)$

$= (3)^3 - 4(3)^2 + 3 + 6$

$= 27 - 36 + 3 + 6 = 0$

$\because$ शेषफल शून्य है।

$\therefore$ **$g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।**

हल : (i) माना $g(x) = 0$

$\Rightarrow \quad x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

$\therefore$ $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-1)$

$= 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1$

$= -2 + 1 + 2 - 1 = 0$

$\because$ शेषफल शून्य है।

$\therefore$ **$g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।**

- **(ii)** माना $g(x) = 0$

$\Rightarrow \quad x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$

$\therefore$ $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-2)$

$= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1$

$= -8 + 12 - 6 + 1$

$= -1 \neq 0$

$\because$ शेषफल शून्य नहीं है।

$\therefore$ **$g(x)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।**

- **(iii)** माना $g(x) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

$\therefore$ $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर शेषफल $= p(3)$

$= (3)^3 - 4(3)^2 + 3 + 6$

$= 27 - 36 + 3 + 6 = 0$

$\because$ शेषफल शून्य है।

$\therefore$ **$g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।**

प्रश्न 3.

k का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $(x - 1)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड हो :

(i) $p(3) = x^2 + x + k$

(ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}\,x + 1$

(iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

हल : माना $x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1$

● **(i)** $p(x) = x^2 + x + k$

$\because$ $x - 1$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है

$\therefore \quad p(1) = 0$

$\Rightarrow \quad (1)^2 + 1 + k = 0$

$\Rightarrow \quad 1 + 1 + k = 0$

$\Rightarrow \quad k = -2$

● **(ii)** $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

$\because$ $x - 1$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है

$\therefore \quad p(1) = 0$

$\Rightarrow \quad 2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \quad 2 + k + \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \quad k = -(2 + \sqrt{2})$

● **(iii)** $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

$\because$ $x - 1$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$\therefore \quad p(1) = 0$

$\Rightarrow \quad k(1)^2 - \sqrt{2}(1) + 1 = 0$

हल : माना $x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1$

● **(i)** $p(x) = x^2 + x + k$

$\because$ $x - 1$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है

$\therefore \quad p(1) = 0$

$\Rightarrow \quad (1)^2 + 1 + k = 0$

$\Rightarrow \quad 1 + 1 + k = 0$

$\Rightarrow \quad k = -2$

● **(ii)** $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

$\because$ $x - 1$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है

$\therefore \quad p(1) = 0$

$\Rightarrow \quad 2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \quad 2 + k + \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \quad k = -(2 + \sqrt{2})$

● **(iii)** $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

$\because$ $x - 1$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$\therefore \quad p(1) = 0$

$\Rightarrow \quad k(1)^2 - \sqrt{2}(1) + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad k - \sqrt{2} + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad k = \sqrt{2} - 1$

● **(iv)** $p(x) = kx^2 - 3x + k$

$\because$ $x - 1$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$\therefore \quad p(1) = 0$

$\Rightarrow \quad k(1)^2 - 3(1) + k = 0$

$\Rightarrow \quad 2k = 3$

$\Rightarrow \quad k = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \quad k - \sqrt{2} + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad k = \sqrt{2} - 1$

● **(iv)** $p(x) = kx^2 - 3x + k$

$\because$ $x - 1$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$\therefore \quad p(1) = 0$

$\Rightarrow \quad k(1)^2 - 3(1) + k = 0$

$\Rightarrow \quad 2k = 3$

$\Rightarrow \quad k = \frac{3}{2}$

प्रश्न 4.

गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए :

(i) $12x^2 - 7x + 1$

(ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$

(iv) $3x^2 - x - 4$

हल : **(i)** $12x^2 - 7x + 1 = 12x^2 - 4x - 3x + 1$ [$\because 12 \times 1 = 12, (-4) \times (-3) = 12, -4 - 3 = -7$]

$= 4x(3x - 1) - 1(3x - 1)$

$= \mathbf{(3x - 1)(4x - 1)}$

● **(ii)** $2x^2 + 7x + 3 = 2x^2 + 6x + x + 3$ ($\because 2 \times 3 = 6, 6 \times 1 = 6, 6 + 1 = 7$)

$= 2x(x + 3) + 1(x + 3)$

$= \mathbf{(x + 3)(2x + 1)}$

● **(iii)** $6x^2 + 5x - 6 = 6x^2 + 9x - 4x - 6$ [$\because 6 \times (-6) = -36, 9 \times (-4) = -36, 9 - 4 = 5$]

$= 3x(2x + 3) - 2(2x + 3)$

$= \mathbf{(2x + 3)(3x - 2)}$

● **(iv)** $3x^2 - x - 4 = 3x^2 - 4x + 3x - 4$ [$\because 3 \times (-4) = -12, -4 + 3 = -1$]

$= x(3x - 4) + 1(3x - 4)$

$= \mathbf{(3x - 4)(x + 1)}$

हल : (i) $12x^2 - 7x + 1 = 12x^2 - 4x - 3x + 1$

$[\because 12 \times 1 = 12, (-4) \times (-3) = 12, -4 - 3 = -7]$

$= 4x(3x - 1) - 1(3x - 1)$

$= \mathbf{(3x - 1)(4x - 1)}$

- **(ii)** $2x^2 + 7x + 3 = 2x^2 + 6x + x + 3$ $(\because 2 \times 3 = 6, 6 \times 1 = 6, 6 + 1 = 7)$

$= 2x(x + 3) + 1(x + 3)$

$= \mathbf{(x + 3)(2x + 1)}$

- **(iii)** $6x^2 + 5x - 6 = 6x^2 + 9x - 4x - 6$ $[\because 6 \times (-6) = -36, 9 \times (-4) = -36, 9 - 4 = 5]$

$= 3x(2x + 3) - 2(2x + 3)$

$= \mathbf{(2x + 3)(3x - 2)}$

- **(iv)** $3x^2 - x - 4 = 3x^2 - 4x + 3x - 4$ $[\because 3 \times (-4) = -12, -4 + 3 = -1]$

$= x(3x - 4) + 1(3x - 4)$

$= \mathbf{(3x - 4)(x + 1)}$

प्रश्न 5.

गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए :

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

हल : (i) माना $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$\Rightarrow$ $p(x) = x^3 - x - 2x^2 + 2$

$= x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1)$

$= (x^2 - 1^2)(x - 2)$

$= \mathbf{(x - 1)(x + 1)(x - 2)}$ $[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$

- **(ii)** माना $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

यहाँ अचर पद $= 5$

5 के अपवर्तक $= \pm 1, \pm 5$

$x = -1$ पर

शेषफल $p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 5$

$= -1 - 3 + 9 - 5 = 0$

$\because$ शेषफल शून्य है।

$\therefore$ $x + 1$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

अब $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

$= x^2(x + 1) - 4x^2 - 9x - 5$

$= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5x - 5$

हल : (i) माना $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$\Rightarrow$ $p(x) = x^3 - x - 2x^2 + 2$

$= x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1)$

$= (x^2 - 1^2)(x - 2)$

$= \mathbf{(x - 1)(x + 1)(x - 2)}$ $[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$

- **(ii)** माना $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

यहाँ अचर पद $= 5$

5 के अपवर्तक $= \pm 1, \pm 5$

$x = -1$ पर

शेषफल $p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 5$

$= -1 - 3 + 9 - 5 = 0$

$\because$ शेषफल शून्य है।

$\therefore$ $x + 1$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

अब $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

$= x^2(x + 1) - 4x^2 - 9x - 5$

$= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5x - 5$

$= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 - 4x - 5)$

$= (x + 1)(x^2 - 5x + x - 5)$ $[\because 1 \times (-5) = -5, -5 + 1 = -4]$

$= (x + 1)[x(x - 5) + 1(x - 5)]$

$= (x + 1)(x - 5)(x + 1)$

$= \mathbf{(x + 1)^2 (x - 5)}$

- **(iii)** माना $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

यहाँ अचर पद $= 20$

20 के अपवर्तक $= \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$

$x = -1$

शेषफल $p(-1) = (-1)^3 + 13(-1)^2 + 32(-1) + 20$

$= -1 + 13 - 32 + 20 = 0$

$\because$ शेषफल शून्य है।

$\therefore$ $x + 1$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

अब $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

$= x^2(x + 1) + 12x^2 + 32x + 20$

$= x^2(x + 1) + 12x(x + 1) + 20x + 20$

$= x^2(x + 1) + 12x(x + 1) + 20(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 + 12x + 20)$

$= (x + 1)(x^2 + 2x + 10x + 20)$ $(\because 1 \times 20 = 20, 10 \times 2 = 20, 10 + 2 = 12)$

$= (x + 1)[x(x + 2) + 10(x + 2)]$

$= \mathbf{(x + 1)(x + 2)(x + 10)}$

- **(iv)** माना $p(y) = 2y^3 + y^2 - 2y - 1$

$= 2y^3 - 2y + y^2 - 1$

$= 2y(y^2 - 1) + 1(y^2 - 1)$

$= (y^2 - 1)(2y + 1)$

$= (y^2 - 1^2)(2y + 1)$

$= \mathbf{(y - 1)(y + 1)(2y + 1)}$ $[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$

$= x^2(x+1) - 4x(x+1) - 5(x+1)$

$= (x+1)(x^2 - 4x - 5)$

$= (x+1)(x^2 - 5x + x - 5)$ [$\because 1 \times (-5) = -5, -5 + 1 = -4$]

$= (x+1)[x(x-5) + 1(x-5)]$

$= (x+1)(x-5)(x+1)$

$= \mathbf{(x+1)^2 (x-5)}$

● **(iii)** माना $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

यहाँ अचर पद $= 20$

20 के अपवर्तक $= \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$

$x = -1$

शेषफल $p(-1) = (-1)^3 + 13(-1)^2 + 32(-1) + 20$

$= -1 + 13 - 32 + 20 = 0$

$\because$ शेषफल शून्य है।

$\therefore$ $x + 1$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

अब $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

$= x^2(x+1) + 12x^2 + 32x + 20$

$= x^2(x+1) + 12x(x+1) + 20x + 20$

$= x^2(x+1) + 12x(x+1) + 20(x+1)$

$= (x+1)(x^2 + 12x + 20)$

$= (x+1)(x^2 + 2x + 10x + 20)$ ($\because 1 \times 20 = 20, 10 \times 2 = 20, 10 + 2 = 12$)

$= (x+1)[x(x+2) + 10(x+2)]$

$= \mathbf{(x+1)(x+2)(x+10)}$

● **(iv)** माना $p(y) = 2y^3 + y^2 - 2y - 1$

$= 2y^3 - 2y + y^2 - 1$

$= 2y(y^2 - 1) + 1(y^2 - 1)$

$= (y^2 - 1)(2y + 1)$

$= (y^2 - 1^2)(2y + 1)$

$= \mathbf{(y-1)(y+1)(2y+1)}$ [$\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$]

प्रश्नावली 2.5

प्रश्न 1.

उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) (x + 4) (x + 10)

(ii) (x + 8) (x – 10)

(iii) (3x + 4) (3x – 5)

(iv) $(y^2 + \frac{3}{2}$

$) (y^2 - \frac{3}{2})$

(v) (3 – 2x) (3 + 2x)

हल : **(i)** $(x+4)(x+10) = x^2 + x(4+10) + (4)(10)$ $[\because (x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab]$

$= \mathbf{x^2 + 14x + 40}$

- **(ii)** $(x+8)(x-10) = x^2 + x(8-10) + (8)(-10)$ $[\because (x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b)\,x + ab]$

$= \mathbf{x^2 - 2x - 80}$

- **(iii)** $(3x+4)(3x-5) = (3x)^2 + 3x(4-5) + (4)(-5)$

$[\because (x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab]$

$= \mathbf{9x^2 - 3x - 20}$

- **(iv)** $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right) = (y^2)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$ $[\because (a-b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= \mathbf{y^4 - \frac{9}{4}}$

- **(v)** $(3-2x)(3+2x) = (3)^2 - (2x)^2$ $[\because (a-b)(a+b) = a^2 - b^2]$

$= \mathbf{9 - 4x^2}$

प्रश्न 2.

सीधे गुणा किए बिना निम्नलिखित गुणनफलों के मान ज्ञात कीजिए :

(i) 103 x 107

(ii) 95 x 96

(iii) 104 x 96

हल : **(i)** $103 \times 107 = (100+3) \times (100+7)$

$= (100)^2 + 100 \times (3+7) + 3 \times 7$

$[\because (x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab]$

$= 10000 + 1000 + 21$

$= \mathbf{11021}$

- **(ii)** $95 \times 96 = (100-5)(100-4)$

$= (100)^2 + 100 \times (-5-4) + (-5)(-4)$

$[\because (x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab]$

$= 10000 - 900 + 20$

$= \mathbf{9120}$

- **(iii)** $104 \times 96 = (100+4) \times (100-4)$

$= (100)^2 - (4)^2$ $[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= 10000 - 16 = \mathbf{9984}$

हल : **(i)** $103 \times 107 = (100+3) \times (100+7)$

$= (100)^2 + 100 \times (3+7) + 3 \times 7$

$[\because (x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab]$

$= 10000 + 1000 + 21$

$= \mathbf{11021}$

- **(ii)** $95 \times 96 = (100-5)(100-4)$

$= (100)^2 + 100 \times (-5-4) + (-5)(-4)$

$[\because (x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab]$

$= 10000 - 900 + 20$

$= \mathbf{9120}$

- **(iii)** $104 \times 96 = (100+4) \times (100-4)$

$= (100)^2 - (4)^2$ $[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= 10000 - 16 = \mathbf{9984}$

प्रश्न 3.
उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके निम्नलिखित का गुणनखण्डन कीजिए :
(i) $9x^2 + 6xy + y^2$
(ii) $4y^2 - 4y + 1$
(iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

$\frac{y^2}{100}$

हल : (i) $9x^2 + 6xy + y^2 = (3x)^2 + 2(3x)(y) + (y)^2$
$= (3x + y)^2$ $[\because a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2]$

- (ii) $4y^2 - 4y + 1 = (2y)^2 - 2(2y)(1) + 1^2$
$= (2y - 1)^2$ $[\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$
- (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100} = (x)^2 - \left(\frac{y}{10}\right)^2$
$= \left(x - \frac{y}{10}\right)\left(x + \frac{y}{10}\right)$ $[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$

हल : (i) $9x^2 + 6xy + y^2 = (3x)^2 + 2(3x)(y) + (y)^2$
$= (3x + y)^2$ $[\because a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2]$

- (ii) $4y^2 - 4y + 1 = (2y)^2 - 2(2y)(1) + 1^2$
$= (2y - 1)^2$ $[\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$
- (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100} = (x)^2 - \left(\frac{y}{10}\right)^2$
$= \left(x - \frac{y}{10}\right)\left(x + \frac{y}{10}\right)$ $[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$

प्रश्न 4.
उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए :

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ **(ii)** $(2x - y + z)^2$ **(iii)** $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$ **(v)** $(-2x + 5y - 3z)^2$ **(vi)** $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

हल : इनमें से प्रत्येक में निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे—
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

- (i) $(x + 2y + 4z)^2 = x^2 + (2y)^2 + (4z)^2 + 2x(2y) + 2(2y)(4z) + 2(4z)x$
$= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8zx$
- (ii) $(2x - y + z)^2 = (2x)^2 + (-y)^2 + z^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)z + 2z(2x)$
$= 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx$

(i) $(x+2y+4z)^2$ (ii) $(2x-y+z)^2$ (iii) $(-2x+3y+2z)^2$

(iv) $(3a-7b-c)^2$ (v) $(-2x+5y-3z)^2$ (vi) $\left[\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+1\right]^2$

हल : इनमें से प्रत्येक में निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे—

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

- **(i)** $(x+2y+4z)^2 = x^2+(2y)^2+(4z)^2+2x(2y)+2(2y)(4z)+2(4z)x$
$$= \mathbf{x^2+4y^2+16z^2+4xy+16yz+8zx}$$
- **(ii)** $(2x-y+z)^2 = (2x)^2+(-y)^2+z^2+2(2x)(-y)+2(-y)z+2z(2x)$
$$= \mathbf{4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4zx}$$
- **(iii)** $(-2x+3y+2z)^2 = (-2x)^2+(3y)^2+(2z)^2+2(-2x)(3y)+2(3y)(2z)+2(2z)(-2x)$
$$= \mathbf{4x^2+9y^2+4z^2-12xy+12yz-8zx}$$
- **(iv)** $(3a-7b-c)^2 = (3a)^2+(-7b)^2+(-c)^2+2(3a)(-7b)+2(-7b)(-c)+2(-c)(3a)$
$$= \mathbf{9a^2+49b^2+c^2-42ab+14bc-6ca}$$
- **(v)** $(-2x+5y-3z)^2 = (-2x)^2+(5y)^2+(-3z)^2+2(-2x)(5y)+2(5y)(-3z)+2(-3z)(-2x)$
$$= \mathbf{4x^2+25y^2+9z^2-20xy-30yz+12zx}$$
- **(vi)** $\left[\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+1\right]^2 = \left(\frac{1}{4}a\right)^2+\left(-\frac{1}{2}b\right)^2+1^2+2\left(\frac{1}{4}a\right)\left(-\frac{1}{2}b\right)+2\left(-\frac{1}{2}b\right)(1)+2(1)\left(\frac{1}{4}a\right)$
$$= \mathbf{\frac{1}{16}a^2+\frac{1}{4}b^2+1-\frac{1}{4}ab-b+\frac{1}{2}a}$$

- **(iii)** $(-2x+3y+2z)^2 = (-2x)^2+(3y)^2+(2z)^2+2(-2x)(3y)+2(3y)(2z)+2(2z)(-2x)$
$$= \mathbf{4x^2+9y^2+4z^2-12xy+12yz-8zx}$$
- **(iv)** $(3a-7b-c)^2 = (3a)^2+(-7b)^2+(-c)^2+2(3a)(-7b)+2(-7b)(-c)+2(-c)(3a)$
$$= \mathbf{9a^2+49b^2+c^2-42ab+14bc-6ca}$$
- **(v)** $(-2x+5y-3z)^2 = (-2x)^2+(5y)^2+(-3z)^2+2(-2x)(5y)+2(5y)(-3z)+2(-3z)(-2x)$
$$= \mathbf{4x^2+25y^2+9z^2-20xy-30yz+12zx}$$
- **(vi)** $\left[\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+1\right]^2 = \left(\frac{1}{4}a\right)^2+\left(-\frac{1}{2}b\right)^2+1^2+2\left(\frac{1}{4}a\right)\left(-\frac{1}{2}b\right)+2\left(-\frac{1}{2}b\right)(1)+2(1)\left(\frac{1}{4}a\right)$
$$= \mathbf{\frac{1}{16}a^2+\frac{1}{4}b^2+1-\frac{1}{4}ab-b+\frac{1}{2}a}$$

प्रश्न 5.
गुणनखण्डन कीजिए :

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4\sqrt{2}\,yz - 8xz$

हल : इनमें से प्रत्येक में निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

- **(i)** $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

$= (2x)^2 + (3y)^2 + (-4z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(3y)(-4z) + 2(-4z)(2x)$

$= \mathbf{(2x + 3y - 4z)^2}$

- **(ii)** $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4\sqrt{2}\,yz - 8xz$

$= (-\sqrt{2}\,x)^2 + y^2 + (2\sqrt{2}\,z)^2 + 2(-\sqrt{2}\,x)(y) + 2(y)(2\sqrt{2}\,z) + 2(-\sqrt{2}\,x)(2\sqrt{2}z)$

$= \mathbf{(-\sqrt{2}\,x + y + 2\sqrt{2}\,z)^2}$

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4\sqrt{2}\,yz - 8xz$

हल : इनमें से प्रत्येक में निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

- **(i)** $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

$= (2x)^2 + (3y)^2 + (-4z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(3y)(-4z) + 2(-4z)(2x)$

$= \mathbf{(2x + 3y - 4z)^2}$

- **(ii)** $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4\sqrt{2}\,yz - 8xz$

$= (-\sqrt{2}\,x)^2 + y^2 + (2\sqrt{2}\,z)^2 + 2(-\sqrt{2}\,x)(y) + 2(y)(2\sqrt{2}\,z) + 2(-\sqrt{2}\,x)(2\sqrt{2}z)$

$= \mathbf{(-\sqrt{2}\,x + y + 2\sqrt{2}\,z)^2}$

प्रश्न 6.

निम्नलिखित घनों को प्रसारित रूप में लिखिए :

(i) $(2x + 1)^3$ **(ii)** $(2a - 3b)^3$ **(iii)** $\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^3$ **(iv)** $\left(x - \frac{2}{3}y\right)^3$

हल : (i) $(2x + 1)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$\therefore \quad (2x + 1)^3 = (2x)^3 + (1)^3 + 3(2x)(1)(2x + 1)$

$= 8x^3 + 1 + 6x(2x + 1)$

$= \mathbf{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1}$

- **(ii)** $(2a - 3b)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$= x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

$\therefore \quad (2a - 3b)^3 = (2a)^3 - (3b)^3 - 3(2a)(3b)(2a - 3b)$

$= 8a^3 - 27b^3 - 18ab(2a - 3b)$

$= \mathbf{8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2}$

(i) $(2x+1)^3$ **(ii)** $(2a-3b)^3$ **(iii)** $\left(\frac{3}{2}x+1\right)^3$ **(iv)** $\left(x-\frac{2}{3}y\right)^3$

हल : (i) $(2x+1)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$\therefore \quad (2x+1)^3 = (2x)^3 + (1)^3 + 3(2x)(1)(2x+1)$

$= 8x^3 + 1 + 6x(2x+1)$

$= \mathbf{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1}$

- **(ii)** $(2a-3b)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$= x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$

$\therefore \quad (2a-3b)^3 = (2a)^3 - (3b)^3 - 3(2a)(3b)(2a-3b)$

$= 8a^3 - 27b^3 - 18ab(2a-3b)$

$= \mathbf{8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2}$

- **(iii)** $\left(\frac{3}{2}x+1\right)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$\therefore \quad \left(\frac{3}{2}x+1\right)^3 = \left(\frac{3}{2}x\right)^3 + (1)^3 + 3\left(\frac{3}{2}x\right)(1)\left(\frac{3}{2}x+1\right)$

$= \frac{27x^3}{8} + 1 + \frac{9x}{2}\left(\frac{3x}{2}+1\right) = \mathbf{\frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1}$

- **(iv)** $\left(x-\frac{2}{3}y\right)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

$\therefore \quad \left(x-\frac{2}{3}y\right)^3 = (x)^3 - \left(\frac{2}{3}y\right)^3 - 3(x)\left(\frac{2}{3}y\right)\left(x-\frac{2}{3}y\right)$

$= x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2xy\left(x-\frac{2}{3}y\right)$

$= \mathbf{x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2}$

● **(iii)** $\left(\frac{3}{2}x+1\right)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$\therefore \quad \left(\frac{3}{2}x+1\right)^3 = \left(\frac{3}{2}x\right)^3 + (1)^3 + 3\left(\frac{3}{2}x\right)(1)\left(\frac{3}{2}x+1\right)$$
$$= \frac{27x^3}{8} + 1 + \frac{9x}{2}\left(\frac{3x}{2}+1\right) = \frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$$

● **(iv)** $\left(x-\frac{2}{3}y\right)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

$$\therefore \quad \left(x-\frac{2}{3}y\right)^3 = (x)^3 - \left(\frac{2}{3}y\right)^3 - 3(x)\left(\frac{2}{3}y\right)\left(x-\frac{2}{3}y\right)$$
$$= x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2xy\left(x-\frac{2}{3}y\right)$$
$$= \mathbf{x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2}$$

प्रश्न 7.
उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :
(i) $(99)^3$
(ii) $(102)^3$
(iii) $(998)^3$

हल : **(i)** $(99)^3 = (100-1)^3$
$= (100)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)(100-1)$
$= 1000000 - 1 - 300 \times 99$
[सर्वसमिका $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ से]
$= 1000000 - 1 - 29700$
$= \mathbf{970299}$

● **(ii)** $(102)^3 = (100+2)^3$
$= (100)^3 + (2)^3 + 3(100)(2)(100+2)$
[सर्वसमिका $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ से]
$= 1000000 + 8 + 600 \times 102$
$= 1000000 + 8 + 61200$
$= \mathbf{1061208}$

● **(iii)** $(998)^3 = (1000-2)^3$
$= (1000)^3 - (2)^3 - 3(1000)(2)(1000-2)$
[सर्वसमिका $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ से]
$= 1000000000 - 8 - 6000 \times 998$
$= 1000000000 - 8 - 5988000$
$= \mathbf{994011992}$

हल : (i) $(99)^3 = (100-1)^3$

$= (100)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)(100-1)$

$= 1000000 - 1 - 300 \times 99$

[सर्वसमिका $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ से]

$= 1000000 - 1 - 29700$

$=$ **970299**

- **(ii)** $(102)^3 = (100+2)^3$

$= (100)^3 + (2)^3 + 3(100)(2)(100+2)$

[सर्वसमिका $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ से]

$= 1000000 + 8 + 600 \times 102$

$= 1000000 + 8 + 61200$

$=$ **1061208**

- **(iii)** $(998)^3 = (1000-2)^3$

$= (1000)^3 - (2)^3 - 3(1000)(2)(1000-2)$

[सर्वसमिका $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ से]

$= 1000000000 - 8 - 6000 \times 998$

$= 1000000000 - 8 - 5988000$

$=$ **994011992**

प्रश्न 8.

निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखण्डन कीजिए।

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ **(ii)** $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ **(iv)** $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ **(ii)** $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ **(iv)** $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

हल : **(i)** $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2 = (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$

$= (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)(b)(2a + b)$

[सर्वसमिका $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ से]

$= \mathbf{(2a + b)^3}$

- **(ii)** $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2 = (2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)^2 b + 3(2a)\, b^2$

$= (2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)(b)(2a - b)$

[सर्वसमिका $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ से]

$= \mathbf{(2a - b)^3}$

- **(iii)** $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2 = (3)^3 - (5a)^3 - 3(3)^2(5a) + 3(3)(5a)^2$

$= (3)^3 - (5a)^3 - 3(3)(5a)(3 - 5a)$

[सर्वसमिका $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ से]

$= \mathbf{(3 - 5a)^3}$

- **(iv)** $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2 = (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)^2(3b) + 3(4a)(3b)^2$

$= (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)(3b)(4a - 3b)$

[सर्वसमिका $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ से]

$= \mathbf{(4a - 3b)^3}$

- **(v)** $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p = (3p)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - 3(3p)^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3(3p)\left(\frac{1}{6}\right)^2$

$= (3p)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - 3(3p)\left(\frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)$

[सर्वसमिका $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ से]

$= \mathbf{\left(3p - \frac{1}{6}\right)^3}$

हल : (i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2 = (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$

$= (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)(b)(2a + b)$

[सर्वसमिका $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ से]

$= \mathbf{(2a + b)^3}$

- **(ii)** $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2 = (2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)^2b + 3(2a)b^2$

$= (2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)(b)(2a - b)$

[सर्वसमिका $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ से]

$= \mathbf{(2a - b)^3}$

- **(iii)** $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2 = (3)^3 - (5a)^3 - 3(3)^2(5a) + 3(3)(5a)^2$

$= (3)^3 - (5a)^3 - 3(3)(5a)(3 - 5a)$

[सर्वसमिका $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ से]

$= \mathbf{(3 - 5a)^3}$

- **(iv)** $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2 = (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)^2(3b) + 3(4a)(3b)^2$

$= (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)(3b)(4a - 3b)$

[सर्वसमिका $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ से]

$= \mathbf{(4a - 3b)^3}$

- **(v)** $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p = (3p)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - 3(3p)^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3(3p)\left(\frac{1}{6}\right)^2$

$= (3p)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - 3(3p)\left(\frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)$

[सर्वसमिका $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ से]

$= \mathbf{\left(3p - \frac{1}{6}\right)^3}$

प्रश्न 9.

सत्यापित कीजिए :

(i) $\mathbf{x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)}$ **(ii)** $\mathbf{x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)}$

हल : (i) सर्वसमिका $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ से,

$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

$= (x + y)[(x + y)^2 - 3xy]$

$= (x + y)(x^2 + y^2 + 2xy - 3xy)$

$= \mathbf{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}$ **यही सिद्ध करना था।**

- **(ii)** सर्वसमिका $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ से,

$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$

$= (x - y)[(x - y)^2 + 3xy]$

$= (x - y)(x^2 + y^2 - 2xy + 3xy)$

$= \mathbf{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}$ **यही सिद्ध करना था।**

(i) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ **(ii)** $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

हल : (i) सर्वसमिका $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ से,

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$
$$= (x+y)[(x+y)^2 - 3xy]$$
$$= (x+y)(x^2 + y^2 + 2xy - 3xy)$$
$$= \mathbf{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}$$ **यही सिद्ध करना था।**

- **(ii)** सर्वसमिका $(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$ से,

$$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$$
$$= (x-y)[(x-y)^2 + 3xy]$$
$$= (x-y)(x^2 + y^2 - 2xy + 3xy)$$
$$= \mathbf{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}$$ **यही सिद्ध करना था।**

प्रश्न 10.

निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखण्डन कीजिए

(i) $27y^3 + 125z^3$ **(ii)** $64m^3 - 343n^3$

हल : (i) $27y^3 + 125z^3 = (3y)^3 + (5z)^3$

$$= (3y+5z)[(3y)^2 - (3y)(5z) + (5z)^2]$$

[सर्वसमिका $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ से]

$$= \mathbf{(3y+5z)(9y^2 - 15yz + 25z^2)}$$

(i) $27y^3 + 125z^3$ **(ii)** $64m^3 - 343n^3$

हल : (i) $27y^3 + 125z^3 = (3y)^3 + (5z)^3$

$$= (3y+5z)[(3y)^2 - (3y)(5z) + (5z)^2]$$

[सर्वसमिका $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ से]

$$= \mathbf{(3y+5z)(9y^2 - 15yz + 25z^2)}$$

- **(ii)** $64m^3 - 343n^3 = (4m)^3 - (7n)^3$

$$= (4m-7n)[(4m)^2 + (4m)(7n) + (7n)^2]$$

[सर्वसमिका $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ से]

$$= \mathbf{(4m-7n)(16m^2 + 28mn + 49n^2)}$$

- **(ii)** $64m^3 - 343n^3 = (4m)^3 - (7n)^3$

$$= (4m-7n)[(4m)^2 + (4m)(7n) + (7n)^2]$$

[सर्वसमिका $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ से]

$$= \mathbf{(4m-7n)(16m^2 + 28mn + 49n^2)}$$

प्रश्न 11.

गुणनखण्ड कीजिए : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

हल : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz = (3x)^3 + (y)^3 + (z)^3 - 3(3x)(y)z$

$$= (3x+y+z)[(3x)^2 + y^2 + z^2 - (3x)y - yz - z(3x)]$$

[सर्वसमिका $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ से]

$$= \mathbf{(3x+y+z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3zx)}$$

हल : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz = (3x)^3 + (y)^3 + (z)^3 - 3(3x)(y)z$

$= (3x + y + z)[(3x)^2 + y^2 + z^2 - (3x)y - yz - z(3x)]$

[सर्वसमिका $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ से]

$= \mathbf{(3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3zx)}$

प्रश्न 12.

सत्यापित कीजिए :

$$\mathbf{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]}$$

हल : हम जानते हैं कि

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)\ [(x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz)$

$+ (z^2 + x^2 - 2zx)]$

$[\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$

$= \mathbf{\frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]}$

यही सिद्ध करना था।

$$\mathbf{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]}$$

हल : हम जानते हैं कि

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)\ [(x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz)$

$+ (z^2 + x^2 - 2zx)]$

$[\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$

$= \mathbf{\frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]}$

यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 13.

यदि $x + y + z = 0$ हो तो दिखाइए कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

हल : हम जानते हैं कि

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$x + y + z = 0$ रखने पर,

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \times (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$

$\mathbf{x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz}$ **यही सिद्ध करना था।**

हल : हम जानते हैं कि

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$x + y + z = 0$ रखने पर,

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \times (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$

$\mathbf{x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz}$ **यही सिद्ध करना था।**

प्रश्न 14.

घनों का परिकलन किए बिना निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$ **(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$**

हल : (i) माना $-12 = x, \quad 7 = y, \quad 5 = z$

$\therefore \quad x + y + z = -12 + 7 + 5 = 0$

हम जानते हैं कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ यदि $x + y + z = 0$

$\Rightarrow \quad (-12)^3 + (7)^3 + (5)^3 = 3(-12)(7)(5)$

$= -1260$

● **(ii)** माना $28 = x, \quad -15 = y, \quad -13 = z$

$\therefore \quad x + y + z = 28 - 15 - 13 = 0$

हम जानते हैं कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ यदि $x + y + z = 0$

$\Rightarrow \quad (28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3 = 3(28)(-15)(-13)$

$= 16380$

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$ **(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$**

हल : (i) माना $-12 = x, \quad 7 = y, \quad 5 = z$

$\therefore \quad x + y + z = -12 + 7 + 5 = 0$

हम जानते हैं कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ यदि $x + y + z = 0$

$\Rightarrow \quad (-12)^3 + (7)^3 + (5)^3 = 3(-12)(7)(5)$

$= -1260$

● **(ii)** माना $28 = x, \quad -15 = y, \quad -13 = z$

$\therefore \quad x + y + z = 28 - 15 - 13 = 0$

हम जानते हैं कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ यदि $x + y + z = 0$

$\Rightarrow \quad (28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3 = 3(28)(-15)(-13)$

$= 16380$

प्रश्न 15.

नीचे दिए गए आयतों, जिनमें उनके क्षेत्रफल दिए गए हैं, में से प्रत्येक की लम्बाई और चौड़ाई के लिए सम्भव व्यंजक दीजिए।

(i) क्षेत्रफल : $25a^2 - 35a + 12$

(ii) क्षेत्रफल : $35y^2 + 13y - 12$

हल : (i) आयत का क्षेत्रफल $= 25a^2 - 35a + 12$

$\Rightarrow \quad$ लम्बाई $\times$ चौड़ाई $= 25a^2 - 35a + 12$

$= 25a^2 - 20a - 15a + 12$

$[\because 25 \times 12 = 300; 300 = (-20)(-15); -20 - 15 = -35]$

$= 5a(5a - 4) - 3(5a - 4)$

$= (5a - 4)(5a - 3)$

यहाँ पर दो परिणाम सम्भव है :

यदि लम्बाई $= \mathbf{5a - 4}$ तो चौड़ाई $= \mathbf{5a - 3}$

यदि लम्बाई $= \mathbf{5a - 3}$ तो चौड़ाई $= \mathbf{5a - 4}$

● **(ii)** आयत का क्षेत्रफल $= 35^2 + 13y - 12$

$= 35y^2 + 28y - 15y - 12$

$[\because 35 \times (-12) = -420; -420 = 28 \times (-15); 28 - 15 = 13]$

$= 7y(5y + 4) - 3(5y + 4) = (5y + 4)(7y - 3)$

यहाँ पर दो परिणाम सम्भव है :

यदि लम्बाई $= \mathbf{5y + 4}$ तो चौड़ाई $= \mathbf{7y - 3}$

यदि लम्बाई $= \mathbf{7y - 3}$ तो चौड़ाई $= \mathbf{5y + 4}$

हल : (i) आयत का क्षेत्रफल $= 25a^2 - 35a + 12$

$\Rightarrow$ लम्बाई $\times$ चौड़ाई $= 25a^2 - 35a + 12$

$= 25a^2 - 20a - 15a + 12$

$[\because 25 \times 12 = 300; 300 = (-20)(-15); -20 - 15 = -35]$

$= 5a(5a - 4) - 3(5a - 4)$

$= (5a - 4)(5a - 3)$

यहाँ पर दो परिणाम सम्भव है :

यदि लम्बाई $= \mathbf{5a - 4}$ तो चौड़ाई $= \mathbf{5a - 3}$

यदि लम्बाई $= \mathbf{5a - 3}$ तो चौड़ाई $= \mathbf{5a - 4}$

● **(ii)** आयत का क्षेत्रफल $= 35^2 + 13y - 12$

$= 35y^2 + 28y - 15y - 12$

$[\because 35 \times (-12) = -420; -420 = 28 \times (-15); 28 - 15 = 13]$

$= 7y(5y + 4) - 3(5y + 4) = (5y + 4)(7y - 3)$

यहाँ पर दो परिणाम सम्भव है :

यदि लम्बाई $= \mathbf{5y + 4}$ तो चौड़ाई $= \mathbf{7y - 3}$

यदि लम्बाई $= \mathbf{7y - 3}$ तो चौड़ाई $= \mathbf{5y + 4}$

प्रश्न 16.

घनाभों (Cuboids), जिनके आयतन नीचे दिए गए हैं, की विमाओं के लिए सम्भव व्यंजक क्या हैं :

(i) आयतन : $3x^2 - 12x$

(ii) आयतन : $12ky^2 + 8ky - 20k$

हल : (i) घनाभ का आयतन $= 3x^2 - 12x$

$\Rightarrow$ लम्बाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई $= 3x^2 - 12x$

$= 3x(x - 4)$

$\therefore$ घनाभ की विमाएँ $= \mathbf{3, x}$ **और** $\mathbf{(x - 4)}$

● **(ii)** घनाभ का आयतन $= 12ky^2 + 8ky - 20k$

$\Rightarrow$ लम्बाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई $= 12ky^2 + 8ky - 20k$

$= 4k(3y^2 + 2y - 5)$

$= 4k(3y^2 + 5y - 3y - 5)$

$[\because 3 \times (-5) = -15; -15 = 5 \times (-3); 5 - 3 = 2]$

$= 4k[y(3y + 5) - 1(3y + 5)] = 4k(3y + 5)(y - 1)$

$\therefore$ घनाभ की विमाएँ $= \mathbf{4k, (3y + 5)}$ **और** $\mathbf{(y - 1)}$

हल : (i) घनाभ का आयतन $= 3x^2 - 12x$

$\Rightarrow$ लम्बाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई $= 3x^2 - 12x$

$= 3x(x - 4)$

$\therefore$ घनाभ की विमाएँ $= \mathbf{3, x}$ **और** $\mathbf{(x - 4)}$

● **(ii)** घनाभ का आयतन $= 12ky^2 + 8ky - 20k$

$\Rightarrow$ लम्बाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई $= 12ky^2 + 8ky - 20k$

$= 4k(3y^2 + 2y - 5)$

$= 4k(3y^2 + 5y - 3y - 5)$

$[\because 3 \times (-5) = -15; -15 = 5 \times (-3); 5 - 3 = 2]$

$= 4k[y(3y + 5) - 1(3y + 5)] = 4k(3y + 5)(y - 1)$

$\therefore$ घनाभ की विमाएँ $= \mathbf{4k, (3y + 5)}$ **और** $\mathbf{(y - 1)}$