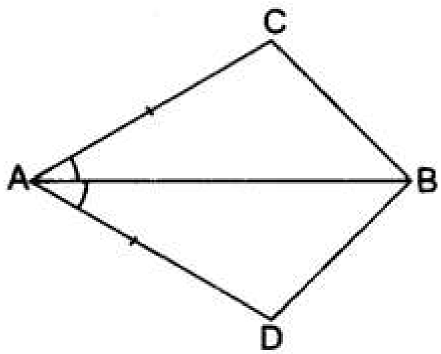
Chapter 7 Triangles (त्रिभुज)

प्रश्नावली 7.1

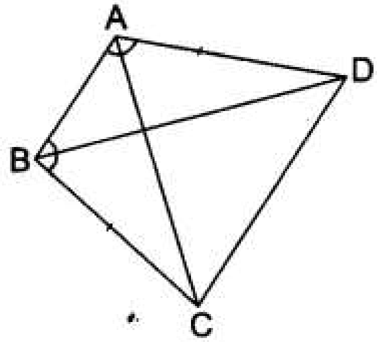
प्रश्न 1.
चतुर्भुज ACBD में, AC = AD है और रेखाखण्ड AB, ∠A को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि ΔABC = ΔABD है। BC और BD के बारे में आप क्या कह सकते हैं?



हल :
दिया है : ACBD एक चतुर्भुज है जिसमें भुजा AC = AD है और रेखाखण्ड AB, ∠A को समद्विभाजित करता है।
सिद्ध करना है : ΔABC = ΔABD; और
ज्ञात करना है : BC और BD में सम्बन्ध।
उपपत्ति: ΔABC और ΔABD की तुलना करने पर,
AC = AD (दिया है)
∠CAB = ∠DAB (दिया है)।
AB = AB (उभयनिष्ठ है)
ΔABC = ΔABD (S.A.S. से)
Proved.
BC = BD

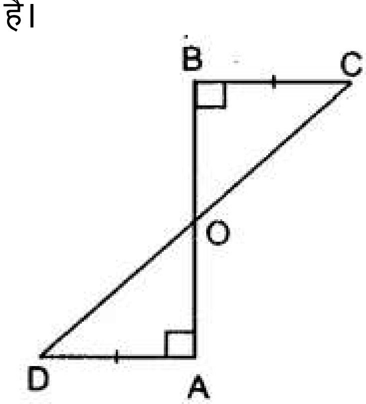
प्रश्न 2.
ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AD = BC और ∠DAB = ∠ CBA है। सिद्ध कीजिए कि

(i) ΔABD = ΔBAC
(ii) BD = AC
(iii) ∠ABD = ∠BAC



हल :
दिया है : चतुर्भुज ABCD में AD = BC और ∠DAB = ∠CBA
सिद्ध करना है :
(i) ΔABD = ΔBAC
(ii) BD = AC
(iii) ∠ ABD = ∠BAC
उपपत्ति (i) ΔABD और ΔBAC में,
AD = BC (दिया है)
∠DAB = ∠CBA (दिया है)
AB = AB (उभयनिष्ठ है)
ΔABD = ΔBAC (S.A.S. से)
(ii) सर्वांगसम त्रिभुजों में संगत मापें बराबर होती हैं और ΔABD और ΔBAC सर्वांगसम हैं।
संगत भुजाएँ BD = AC
(iii) ΔABD = ΔBAC
∠ABD = ∠BAC (C.P.C.T.) Proved.

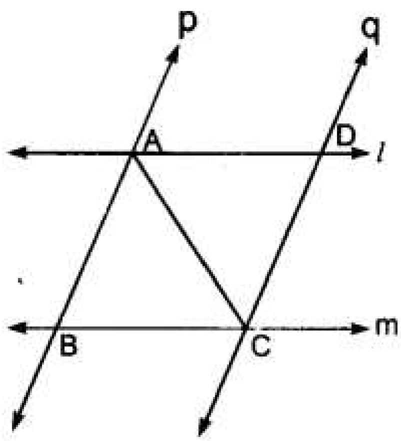
प्रश्न 3.
एक रेखाखण्ड AB पर AD और BC दो बराबर लम्ब रेखाखण्ड हैं। दर्शाइए कि CD, रेखाखण्ड AB को समद्विभाजित करता है।



हल :
दिया है : AB एक रेखाखण्ड है जिसके सिरों A तथा B पर क्रमश: AD और BC लम्ब इस प्रकार हैं कि AD = BC
सिद्ध करना है : CD, रेखाखण्ड AB को समद्विभाजित करता है।
उपपत्ति: प्रश्नानुसार, ∠DAB = 90° ⇒ ∠ DAO = 90°

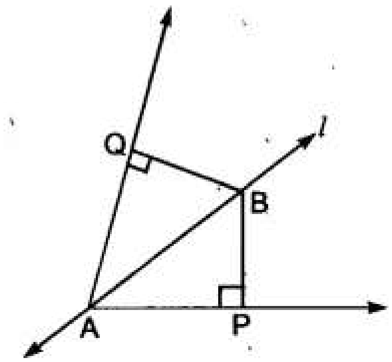
तथा $\angle CBA = 90° \Rightarrow \angle CBO = 90°$
$\angle DAO = \angle CBO$ …(1)
$\angle AOD = \angle COB$ …(2) (शीर्षाभिमुख कोण)
(1) और (2) को जोड़ने पर,
$\angle DAO + \angle AOD = \angle CBO + \angle COB$
$\Rightarrow 180° - \angle ADO = 180° - \angle BCO$ (त्रिभुज के अन्त:कोणों का योग 180° होता है।)
$\Rightarrow \angle ODA = \angle OCB$ …(3)
अब ΔAOD व ΔBOC में,
$\angle DAO = \angle CBO$ [समीकरण (1) से]
AD = BC (दिया है)
$\angle ODA = \angle OCB$ [समीकण (3) से]
$\Delta AOD = \Delta BOC$ (S.A.S. से)
AO = BO (C.P.C.T.)
रेखाखण्ड AB बिन्दु O पर समद्विभाजित होता है।
अत: CD, रेखाखण्ड AB को बिन्दु0 पर समद्विभाजित करता है।
Proved.

प्रश्न 4.
l और m दो समान्तर रेखाएँ हैं जिन्हें समान्तर रेखाओं pऔर qका एक अन्य युग्म प्रतिच्छेदित करता है। दर्शाइए कि $\Delta ABC = \Delta CDA$



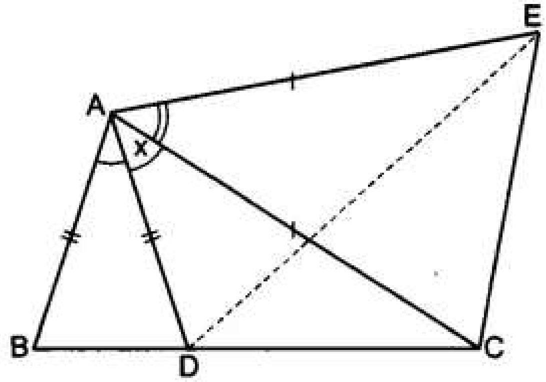
हल:
दिया है। l और m दो समान्तर रेखाएँ हैं जिनको एक अन्य दो समान्तर रेखाओं p और q का युग्म बिन्दुओं A, B, C और D पर प्रतिच्छेदित करता है। रेखाखण्डे AC खींचा गया है।
सिद्ध करना है : $\Delta ABC = \Delta CDA$
उपपत्ति : $l \parallel m$ और AC एक तिर्यक रेखाखण्ड इन्हें प्रतिच्छेदित करता है।
$\angle DAC = \angle BCA$ (एकान्तर कोण युग्म)
इसी प्रकार, $p \parallel q$ है और AC एक तिर्यक रेखाखण्ड इन्हें प्रतिच्छेदित करता है।
$\angle DCA = \angle BAC$ (एकान्तर कोण युग्म)
अब ΔABC और ΔCDA में, $\angle BCA = \angle DAC$ (ऊमर सिद्ध किया है)
AC = AC (उभयनिष्ठ है)
$\angle BAC = \angle DCA$ (ऊपर सिद्ध किया है)
$\Delta BC = \Delta CDA$ (A.S.A से)
Proved.

प्रश्न 5.
रेखा l कोण A को समद्विभाजित करती है और B रेखा पर स्थित कोई बिन्दु है। BP और BQ कोण A की भुजाओं पर B से डाले गए लम्ब हैं। दर्शाइए कि
(i) ΔAPB = ΔAQB
(ii) BP = BQ अर्थात बिन्दु B कोण A की भुजाओं से समदूरस्थ है।



हल :
दिया है। एक रेखा है जो ∠A को समद्विभाजित करती है। रेखा l पर कोई बिन्दु B स्थित है। बिन्दु B से ∠ A की भुजाओं AP और AQ पर क्रमशः BP और BQ लम्ब खींचे गए हैं।
सिद्ध करना है : (i) ΔAPB = ΔAQB,
(ii) BP = BQ अर्थात् बिन्दु B कोण Δकी भुजाओं से समदूरस्थ है।
उपपत्ति : (i) BP ⊥ AP और BQ ⊥ AQ
∠P = 90° और ∠Q = 90° …(1)
A रेखा l, ∠A को समद्विभाजित करती है।
∠QAB = ∠PAB
∠QAB= ∠PAB = x° …(2)
तब ΔAPB और ΔAQB के अन्त:कोणों के योग की समानता से,
∠ABP + ∠PAB + ∠P = ∠ABQ + ∠QAB + ∠Q
∠ABP + x + 90° = ∠ABQ + x° + 90° [समीकरण (1) तथा (2) से]
∠ABP =∠ABQ
Proved.
अब ΔAPB और ΔAQB में, ∠PAB = ∠QAB (दिया है)
AB = AB (उभयनिष्ठ है)
∠ABP = ∠ABQ (अभी सिद्ध किया है)
ΔAPB = ΔAQB (A.S.A से)
(ii) : ΔAPB = ΔAQB
BP= BQ (C.P.C.T.)
अर्थात बिन्दु B, ∠A की भुजाओं से समदूरस्थ है।
Proved.

प्रश्न 6.
दी गई आकृति में, AC = AE, AB = AD और ∠BAD = ∠EAC है, दर्शाइए कि BC = DE है।



हल :

दिया है : दी गई आकृति के ΔABD में AB = AD तथा ΔACE में AC = AE है और ∠BAD = ∠EAC। रेखाखण्ड DE खींचा। गया है।

सिद्ध करना है : BC = DE

उपपत्ति : ∠ BAD = ∠ EAC दोनों ओर ∠DAC जोड़ने पर,

∠BAD + ∠DAC = ∠EAC + ∠DAC

∠BAC = ∠DAE

अब ΔABC तथा ΔADE में,

AB = AD (दिया है)

∠BAC = ∠DAE [समीकरण (1) से]

AC = AE (दिया है)

ΔABC = ΔDE (S.A.S. से)

अतः BC = DE (C.P.C.T.)

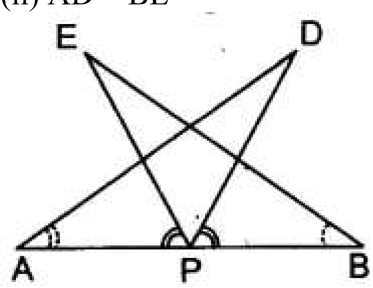
Proved.

प्रश्न 7.

AB एक रेखाखण्ड है और Pइसका मध्य बिन्दु है। D और E रेखाखण्ड AB के एक ही ओर स्थित दो बिन्दु इस प्रकार हैं कि ∠BAD = ∠ABE और ∠EPA = ∠DPB है। दर्शाइए कि

(i) ΔDAP = ΔEBP

(ii) AD = BE



हल :

दिया है : AB एक रेखाखण्ड है जिसका मध्य-बिन्दु P है। AB के एक ही ओर दो बिन्दु D और E हैं। D से रेखाखण्ड DA और DP खींचे गए हैं और E से रेखाखण्ड EB और EP खींचे गए हैं जिससे ∠BAD = ∠ABE तथा ∠EPA = ∠DPB है।

सिद्ध करना है :

(i) ΔDAP = ΔEBP

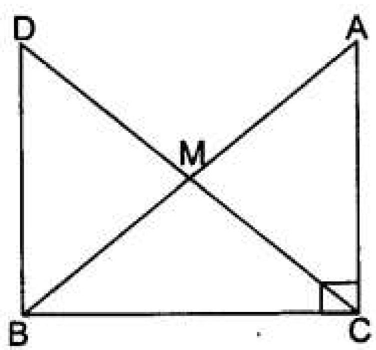
(ii) AD = BE

उपपत्ति (i) P, AB का मध्य बिन्दु है जिससे AP= BP

और ∠BAD = ∠ABE (दिया है)
∠PAD = ∠PBE
हमें ज्ञात है कि ∠EPA = ∠DPB
दोनों पक्षों में ∠EPD जोड़ने पर,
∠EPA + ∠ EPD = ∠DPB + ∠EPD
∠DPA = ∠EPB (चित्र से)
अब ΔDAP तथा ΔEBP में, ∠DPA = ∠ EPB (अभी सिद्ध किया है)
AP = BP (P, AB का मध्य-बिन्दु है)
∠PAD = ∠PBE (सिद्ध कर चुके हैं)
ΔDAP = ΔEBP (A.S.A. से)
(ii) ΔDAP = ΔEBP
AD = BE (C.P.C.T.)
Proved.

प्रश्न 8.
एक समकोण त्रिभुज ABC में, जिसमें ∠C समकोण है, M कर्ण AB का मध्य बिन्दु है। C को M से मिलाकर D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि DM = CM है। बिन्दु D को बिन्दु B से मिला दिया जाता है। दर्शाइए कि :
(i) ΔAMC = ΔBMD
(ii) ∠DBC एक समकोण है।
(iii) ΔDBC = ΔACB
(iv) CM = $\frac{1}{2}$

AB

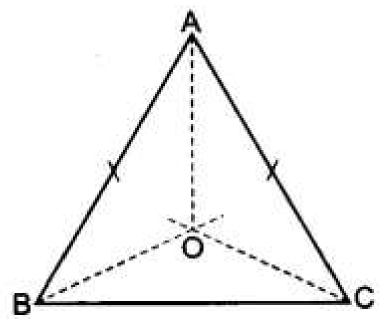


हल :
दिया है: ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें ∠C = 90° है तथा कर्ण AB को मध्य-बिन्दु M है। रेखाखण्ड CM खींचकर इसे बिन्दु D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि CM = DM है। बिन्दु D को बिन्दु B से मिलाकर रेखा BD खींची गई है।
सिद्ध करना है :
(i) ΔAMC = ΔBMD
(ii) ∠DBC एक समकोण है।
(iii) ΔDBC = ΔACB
(iv) CM = AB
उपपत्ति : (i) ΔAMC और ΔBMD में,
AM = BM (M, AB का मध्य-बिन्दु है)
∠AMC = ∠BMD (शीर्षाभिमुख कोण)
CM = DM (दिया है)
ΔAMC = ΔBMD (S.A.S. से)
(ii) ΔAMC = ΔBMD
∠MAC = ∠ MBD

AC || BD
∠DBC + ∠ACB = 180°
∠DBC + 90° = 180°
(iii) ΔDBC और ΔACB में,
DB = AC (C.P.C.T.) [ΔAMC = ΔBMD]
∠DBC = ∠ACB [भाग (ii) से]
BC = BC (उभयनिष्ठ)
ΔDBC = ΔACB (S.A.S. से)
(iv) DC = AB (C.P.C.T.)
2CM = AB (DM = CM)
CM = $\frac{1}{2}$AB
Proved.

प्रश्नावली 7.2

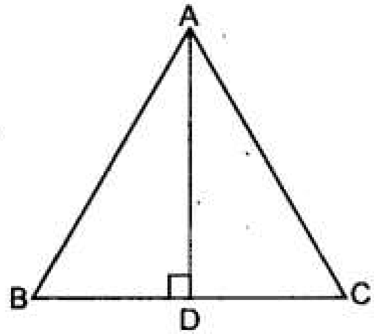
प्रश्न 1.
एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में जिसमें AB = AC है, ∠B और ∠C के समद्विभाजक परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। A और O को जोड़िए और दर्शाइए कि
(i) OB = OC
(ii) AO, ∠A को समद्विभाजित करता है।



हल :
दिया है : समद्विबाहु ΔABC में, AB = AC है।
∠B और ∠C के समद्विभाजक BO तथा CO बिन्दु O पर मिलते हैं। रेखाखण्ड AO को जोड़ा गया है।
सिद्ध करना है :
(i) OB = OC
(ii) AO, ∠A को समद्विभाजित करता है।
उपपत्ति :
(i) ΔABC में, AC = AB (दिया है)
∠ABC = ∠ACB
(त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं)
$\frac{1}{2}$∠ABC = $\frac{1}{2}$∠ACB
∠OBC = ∠OCB …(1) (BO, CO क्रमशः ∠B और ∠C के समद्विभाजक हैं) :
ΔOBC में,
∠OBC = ∠OCB
अतः OB = OC (त्रिभुज में समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।)
(ii) ΔABO तथा ΔACO में,
AB = AC (दिया है)

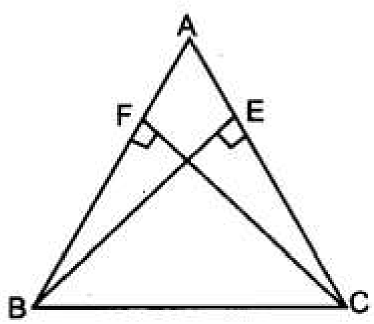
OB = OC (ऊपर सिद्ध किया है)
AO = AO (उभयनिष्ठ भुजा है)
ΔABO = ΔACO (S.S.S. से)
∠BAO = ∠CAO (C.P.C.T.)
अर्थात, AO, ∠A को समद्विभाजित करता है।
Proved.

प्रश्न 2.
ΔABC में AD भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है दर्शाइए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है।



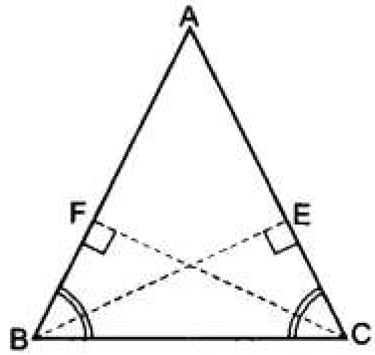
हल :
दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसमें भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक AD है।
सिद्ध करना है : ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है।
उपपत्ति : AD, BC का लम्ब समद्विभाजक है।
BD = CD तथा ∠ADB = ∠ADC = 90°
अब ΔABD और ΔACD में,
BD = CD (ऊपर सिद्ध किया है)
∠ADB = ∠ADC (ऊपर सिद्ध किया है)
AD = AD (उभयनिष्ठ भुजा है)
ΔABD = ΔACD (S.A.S.से)
AB = AC (C.P.C.T.)
अर्थात् ΔABC समद्विबाहु है।
Proved.

प्रश्न 3.
ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें बराबर भुजाओं AC और AB पर क्रमशः शीर्षलम्ब BE तथा CF खींचे गए हैं। दर्शाइए कि ये शीर्ष लम्ब बराबर हैं।

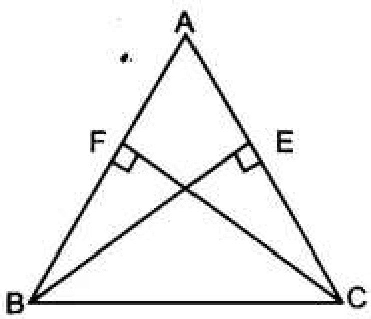


हल :

दिया है : एक समद्विबाहु ΔABC में AB = AC तथा शीर्ष B से भुजा AC पर BE लम्ब डाला गया है और शीर्ष C से भुजा AB पर CF लम्ब डाला। गया है।
सिद्ध करना है : BE = CF
उपपत्ति: ΔABC में,
AC = AB (दिया है)
∠ABC = ∠ACB … (1) (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं)
अब ΔBCF और ΔCBE में,
∠ BFC = ∠CEB (BE ⊥ AC तथा CF ⊥ AB)
BC = BC (उभयनिष्ठ भुजा)
∠FBC = ∠ ECB (∠ABC = ∠FBC तथा ∠ACB = ∠ECB)
ΔBCF = ΔCBE (A.S.A. से)
BE = CF (C.P.C.T.)
Proved.
अर्थात दोनों शीर्षलम्ब बराबर हैं।

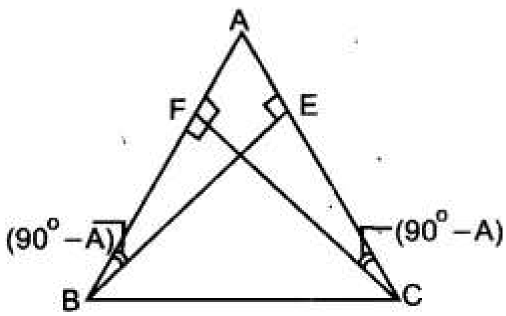


प्रश्न 4.
ABC एक त्रिभुज है जिसमें AC और AB पर खींचे गए शीर्षलम्ब BE तथा CF बराबर हैं। दर्शाइए कि
(i) ΔABE = ΔACF
(ii) AB = AC अर्थात ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

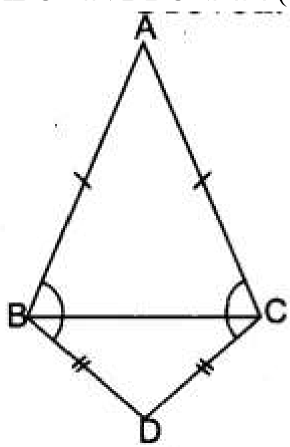


हल :
दिया है : ΔABC में शीर्ष B से शीर्षलम्ब BE तथा शीर्ष C से शीर्षलम्ब CF, क्रमशः AC और AB पर इस प्रकार खींचे गए हैं कि BE = CF है।
सिद्ध करना है :
(i) ΔABE = ΔACF
(ii) AB = AC अर्थात ΔABC समद्विबाहु है।
उपपत्ति : (i) BE शीर्षलम्ब है AC पर ∠AEB = 90°
∠ABE = 90° – A (त्रिभुज के अन्त:कोणों को योग 180° होता है)
इसी प्रकार, CF शीर्षलम्ब है AB पर

∠AFC = 90°
∠ACF = 90° – A (त्रिभुज के अन्त:कोणों का योग 180° होता है)
∠ABE = ∠ACF …….(1)
अब ΔABE और ΔACF में,
∠ABE = ∠ACF [समीकरण (1) से]
BE = CF (दिया है)
∠AEB= ∠AFC (प्रत्येक 90°)
ΔABE = ΔACF (A.S.A.से)
(ii) ΔABE = ΔACF
AB = AC (C.P.C.T.)
अत: ΔABC समद्विबाहु है।
Proved.



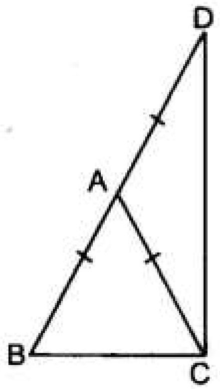
प्रश्न 5.
ABC और DBC समान (एक ही) आधार पर स्थित दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं। दर्शाइए कि ∠ABD = ∠ACD



हल :
दिया है। दो समद्विबाहु ΔABC और ΔDBC एक ही आधार BC पर स्थित हैं और AB = AC तथा DB = DC
सिद्ध करना है : ∠ABD = ∠ACD
उपपत्ति : ΔABC में,
AB = AC (दिया है)
∠ACB = ∠ABC (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं) …(1)
पुनः ΔDBC में, DB = DC (दिया है)
∠BCD = ∠CBD (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं) …(2)
समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,
∠ ACB + ∠BCD = ∠ABC + ∠CBD
∠ACD = ∠ABD

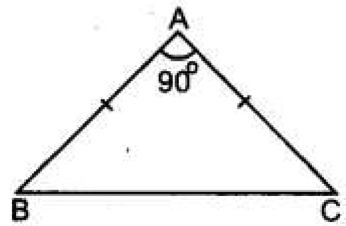
अतः ∠ABD = ∠ACD
Proved.

प्रश्न 6.
ABC एक समद्विभाहु त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है। भुजा BA बिन्दु D तक इस प्रकार बढ़ाई गई है कि AD = AB है। दर्शाइए कि ∠BCD एक समकोण है।



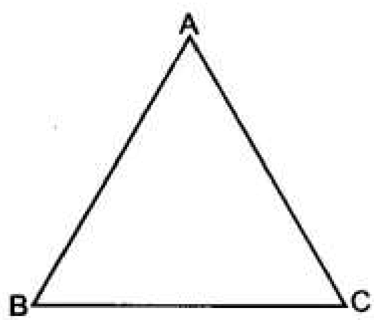
हल :
दिया है : ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें भुजा AB = AC है और भुजा BA को , बिन्दु D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि AD = AB है।
सिद्ध करना है : ∠BCD एक समकोण है।
उपपत्ति : ΔABC में,
AC = AB (दिया है)
∠ABC = ∠ACB (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं) …(1)
भुजा BA को बिन्दु D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि
AB = AD
परन्तु दिया है कि AB = AC भी हैं।
AC = AD
ΔACD में,
∠ADC = ∠ACD (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं) …(2)
समीकरण (1) व समीकरण (2) को जोड़ने पर,
∠ABC + ∠ADC = ∠ACB + ∠ACD
∠ABC + ∠ADC = ∠ BCD (चित्र से)
∠DBC +∠BDC = ∠BCD (∠ ABC = ∠ DBC तथा ∠ ADC = ∠BDC) …(3)
अब : ΔBCD में,
∠DBC + ∠BDC + ∠BCD = 180° (त्रिभुज के अन्त:कोणों का योग 180° होता है)
∠BCD + ∠BCD = 180° [समीकरण (3) से]
2 ∠BCD = 180°
∠BCD = 90°
अतः ∠BCD एक समकोण है।
Proved.

प्रश्न 7.
ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें ∠A = 90° और AB = AC है। ∠B और ∠C ज्ञात कीजिए।



हल :
दिया है : ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें A = 90° और बराबर भुजाओं में AB = AC है।
ज्ञात करना है : ∠B तथा ∠C
गणना : ΔABC समद्विबाहु है जिसमें AB = AC है।
∠C = ∠B (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं) …(1)
त्रिभुज के अन्त:कोणों का योग 180° होता है।
∠A + ∠B + ∠C = 180°
90° +∠B + ∠B = 180° [समीकरण (1) से]
2 ∠B = 180° – 90° = 90°
∠B = 45° …(1)
∠C = ∠ B
∠C = 45°
अतः ∠B = 45° तथा ∠C = 45°

प्रश्न 8.
दर्शाइए कि किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° होता है।

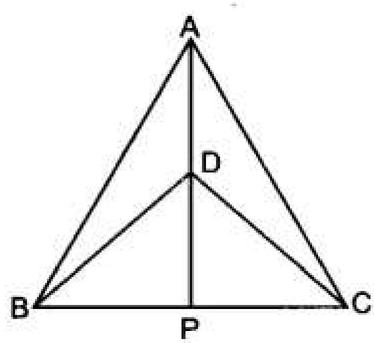


हल :
दिया है : ABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसमें भुजाएँ AB, BC और CA परस्पर समान लम्बाई की हैं।
∠A, ∠B और ∠C समबाहु त्रिभुज के अन्त: कोण हैं।
सिद्ध करना है : त्रिभुज का प्रत्येक अन्त:कोण = 60°
उपपत्ति: ΔABC समबाहु है जिसमें AB = BC = AC
यदि AB = AC तो ∠C = ∠B …..(1)
यदि AB = BC तो ∠C = ∠A …(2) (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं)
समीकरण (1) व समीकरण (2) से
∠A = ∠B = ∠C …(3)
परन्तु त्रिभुज के अन्त:कोणों का योग = 180°
∠A + ∠B + ∠C = 180°
⇒ ∠A + ∠A + ∠A = 180°

$\Rightarrow 3\angle A = 180°$
$\Rightarrow \angle A = 60°$
तब समीकरण (3) से
$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$
अतः समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक अन्त: कोण = 60°
Proved.

प्रश्नावली 7.3

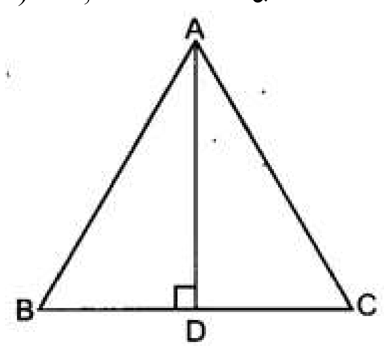
प्रश्न 1.
ΔBC और ΔDBC एक ही आधार BC पर बने दो समद्विबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि A और D, भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं। यदि AD बढ़ाने पर BC को P पर प्रतिच्छेद करे तो दर्शाइए कि :
(i) ΔABD = ΔACD
(ii) ΔABP = ΔACP
(iii) AP, ∠A और ∠D दोनों को समद्विभाजित करता है।
(iv) AP, रेखाखण्ड BC का लम्ब समद्विभाजक है।



हल :
दिया है। एक ही आधार BC पर दो समद्विबाहु त्रिभुज, ΔABC और ΔDBC ऐसे स्थित हैं कि A और D, BC के एक ही ओर हैं।
AD को बढ़ाने पर यह BC को P पर काटती है।
सिद्ध करना है :
(i) ΔABD = ΔACD
(ii) ΔABP = ΔACP
(iii) AP, ∠A और ∠D दोनों को समद्विभाजित करता है।
(iv) AP, रेखाखण्ड BC का लम्ब समद्विभाजक है।
उपपत्ति : ΔABC समद्विबाहु है जिसको आधार BC है।
AB = AC
और ΔDBC समद्विबाहु है जिसका आधार BC है।
BD = CD
(i) ΔABD और ΔACD में,
AB = AC [समीकरण (1) से]
BD = CD [समीकरण (2) से]
AD = AD (उभयनिष्ठ भुजा से)
ΔABD = ΔACD (S.S.S. से)
(ii) ΔABD = ΔACD
∠BAD = ∠CAD
अर्थात् AD, ∠A का समद्विभाजक है। (C.P.C.T.)

तबे AD को आगे बढ़ाने पर AP भी ∠A का समद्विभाजक होगा।
अब ΔABP और ΔACP में,
AB = AC [समीकरण (1) से]
∠BAP = ∠CAP (AP, ∠A का समद्विभाजक है।)
AP = AP (उभयनिष्ठ भुजा)
ΔABP = ΔACP (S.A.S. से)
(iii) ΔABP = ΔACP के ∠BDP = ∠CDP (C.P.C.T.)
DP, ∠D का समद्विभाजक है।
AP, ∠D का समद्विभाजक है। और हम अभी सिद्ध कर चुके हैं कि AP, ∠A का समद्विभाजक है।
तब, AP, ∠A और ∠D दोनों को समद्विभाजित करता है।
(iv) अभी हमने सिद्ध किया है कि ΔABP = ΔCP
∠APB = ∠APC
तथा BP = CP (C.P.C.T.)
अब BP = CP
AP, भुजा BC का समद्विभाजक है।
∠ APB + ∠ APC = 180° और ∠APB = ∠APC (रेखीय युग्म)
तब हल करने पर,
∠APB = ∠APC = 90°
AP, BC पर लम्ब है।
AP, BC पर लम्ब भी है और AP, BC का समद्विभाजक भी है।
अतः AP रेखाखण्ड BC का लम्ब समद्विभाजक है।
Proved.

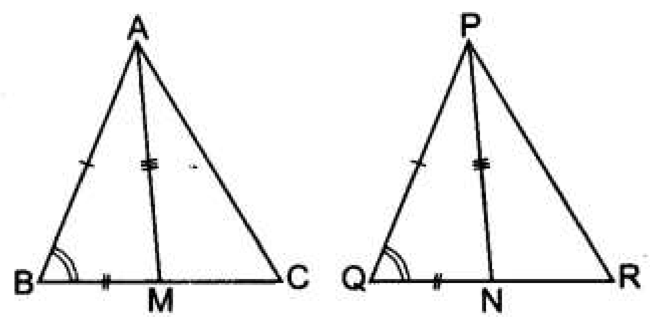
प्रश्न 2.
AD एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC का शीर्षलम्ब है, जिसमें AB = AC है। दर्शाइए कि
(i) AD, रेखाखण्ड BC को समद्विभाजित करता है।
(ii) AD, ∠A को समद्विभाजित करता है।



हल :
दिया है : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है।
त्रिभुज के शीर्ष A से BC पर AD लम्ब डाला गया है जिससे AD शीर्षलम्ब है।
सिद्ध करना है :
(i) AD, रेखाखण्ड BC को समद्विभाजित करता है।
(ii) AD, ∠A को समद्विभाजित करता है।
उपपत्ति : AD, ΔABC का शीर्षलम्ब है।
AD ⊥ BC के ∠ADB = 90°
और ∠ADC = 90°

AB, ΔABD को और AC, ΔACD का कर्ण है।
तब समकोण त्रिभुज ABD और समकोण त्रिभुज ACD में, ∠ADB = ∠ADC (प्रत्येक 90°)
AB = AC (दिया है)
AD = AD (उभयनिष्ठ भुजा)
ΔABD = ΔACD (R.H.S.)
(i) ΔBD = ΔACD
BD = CD (C.P.C.T.)
D, BC का मध्य-बिन्दु है।
अत: AD, रेखाखण्ड BC को समद्विभाजित करता है।
(ii) ΔABD = ΔACD
∠BAD = ∠CAD (C.P.C.T.)
अत: AD, ∠A को समद्विभाजित करता है।
Proved.

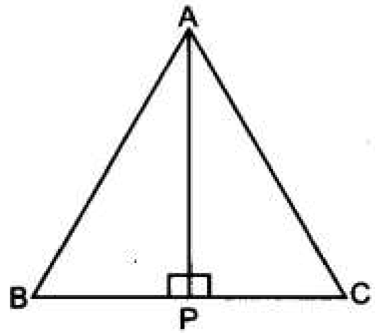
प्रश्न 3.
एक ΔBC की दो भुजाएँ AB तथा BC और माध्यिका AM क्रमशः एक-दूसरे ΔPQR की भुजाओं PQ तथा QR और माध्यिका PN के बराबर है। दर्शाइए कि
(i) ΔABM = ΔPQN
(ii) ΔABC = ΔPQR



हल :
दिया है: ΔABC और ΔPQR दो त्रिभुज हैं जिनमें AB = PQ, BC = QR तथा माध्यिका AM = PN
सिद्ध करना है :
(i) ΔABM = ΔPQN
(ii) ΔABC = ΔPQR
उपपत्ति : BC = QR (दिया है)
$\frac{BC}{2} = \frac{QR}{2}$
BM = QN (AM व PN माध्यिकाएँ हैं)
(i) ΔABM और ΔPQN में,
AB = PQ (दिया है)
AM = PN (दिया है)
BM = QN (ऊपर सिद्ध किया है)
ΔABM = ΔPQN (S.S.S. से)
(ii) ΔABM = ΔPQN ⇒ ∠B = ∠Q (C.P.C.T.) …(1)
अब ΔBC तथा ΔPVR में,
AB = PQ (दिया है)
BC = QR (दिया है)
∠B = ∠Q [समीकरण (1) से]

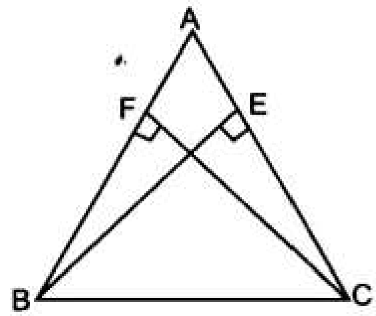
अतः ΔBC = APQR (S.A.S. पराक्षण स)
Proved.

प्रश्न 4.
BE और CF एक ΔABC के दो बराबर शीर्षलम्ब हैं। R.H.S. सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



हल :
दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसमें शीर्ष B से भुजा AC पर BE शीर्ष लम्ब खींचा गया है और शीर्ष C से भुजा AB पर CF शीर्षलम्ब इस प्रकार है कि BE = CF
सिद्ध करना है: ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।
उपपत्ति : ΔABC में BE, शीर्ष B से AC पर शीर्षलम्ब है।
$\angle BEC = 90°$
ΔBEC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कर्ण BC है।
पुनः ΔABC में CF, शीर्ष C से AB पर शीर्षलम्ब है।
$\angle BFC = 90°$
ΔBFC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कर्ण BC है।
समकोण त्रिभुज ΔBEC और ΔBFC में,
$\angle BEC = \angle CFB$ (प्रत्येक 90°)
BE = CF (दिया है)
BC = BC (उभयनिष्ठ भुजा)
ΔBEC = ΔBFC (R.H.S.)
$\angle ECB = \angle FBC$
$\Rightarrow \angle ACB = \angle ABC$ (C.P.C.T.)
अब ΔABC में,
$\angle ACB = \angle ABC$
AB = AC (त्रिभुज में समाने कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं)
अतः ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।
Proved.

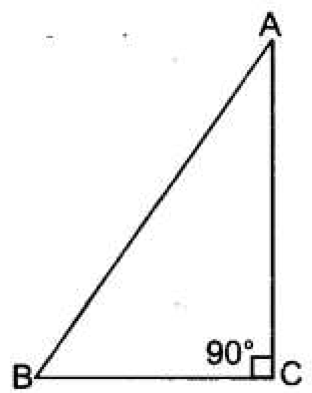
प्रश्न 5.
ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। AP ⊥ BC खींचकर दर्शाइए कि $\angle B = \angle C$



हल :
दिया है: ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है।
शीर्ष A से BC पर AP लम्ब खींचा गया है। सिद्ध करना है : $\angle B = \angle C$
उपपत्ति: $AP \perp BC$
ΔAPB में, $\angle APB = 90°$ जिससे कर्ण AB है।
और ΔAPC में, $\angle APC = 90°$ जिससे कर्ण AC है।
अब ΔAPB और ΔAPC में,
$\angle APB = \angle APC$ (प्रत्येक 90°)
$AB = AC$ (दिया है)
$AP = AP$ (उभयनिष्ठ भुजा)
$\Delta APB = \Delta APC$ (R.H.S. से)
अतः $\angle B = \angle C$ (C.P.C.T.)
Proved.

प्रश्नावली 7.4

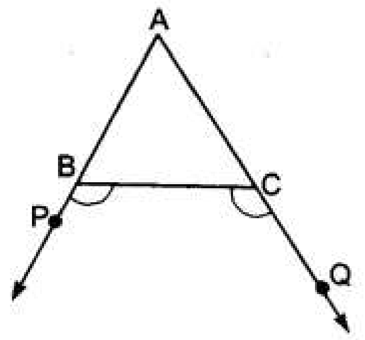
प्रश्न 1.
दर्शाइए कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लम्बी (या सबसे बड़ी) भुजा होती है।



हल :
दिया है : ΔABC में, $\angle C = 90°$ तथा भुजा AB कर्ण है।
सिद्ध करना है : कर्ण AB, सबसे बड़ी भुजा है।
उपपत्ति: ΔABC में, $\angle C = 90°$ (दिया है)
$\angle A + \angle B = 180° - \angle C = 180° - 90° = 90°$ (त्रिभुज के अन्त:कोणों का योग 180° होता है)
$\angle A$ तथा $\angle B$, 90° से छोटे हैं।
$\angle C > \angle A$ तथा $\angle C > \angle B$

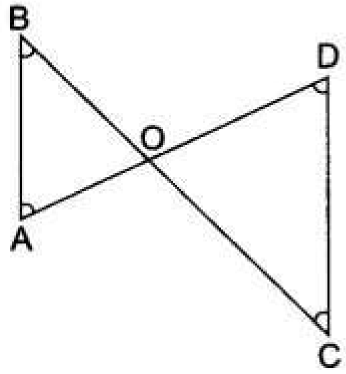
ΔABC में,
∠C > ∠A
AB > BC (प्रमेय-4 से)
∠C > ∠B
AB > CA (प्रमेय-4 से)
AB > BC और AB > CA
AB, दोनों (BC व CA) से बड़ी है।
अतः कर्ण AB सबसे बड़ी भुजा है।
Proved.

प्रश्न 2.
सम्मुख आकृति में, ΔABC की भुजाओं AB और AC को क्रमशः बिन्दुओं P और Q तक बढ़ाया गया है साथ ही ∠PBC < ∠QCB है। दर्शाइए कि AC > AB



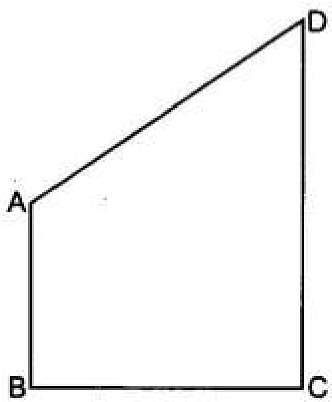
हल :
दिया है : ΔABC में भुजाओं AB और AC को आगे बढ़ाया गया है। बढ़ी हुई AB पर बिन्दु P और बढ़ी हुई AC पर बिन्दु Q लिया गया है।
इस प्रकार बने बहिष्कोणों में ∠PBC AB
उपपत्ति : PBC, ΔABC का बहिष्कोण है।
∠PBC = ∠ACB +∠A …..(1)
और ∠QCB भी ΔABC का बहिष्कोण है।
∠QCB = ∠ABC + ∠A …(2)
∠PBC
∠ACB + ∠A
[समीकरण (1) तथा (2) से
∠ACB
अब ΔABC में,
∠ACB ∠ACB
AC > AB (बड़े कोण की सम्मुख,भुजा बड़ी होती है)
Proved.

प्रश्न 3.
सम्मुख आकृति में ∠B < ∠A और ∠C < ∠D है। दर्शाइए कि AD < BC



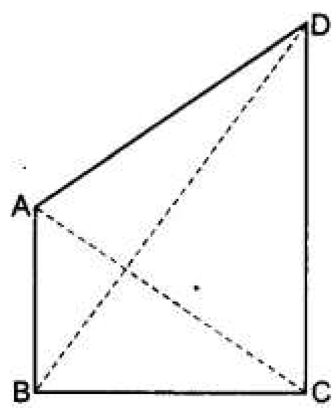
हल :
दिया है : दी गई आकृति में ΔABO में ∠B
और ΔCDO में ∠C
सिद्ध करना है : ऋजु रेखा AD
उपपत्ति: ΔABO में,
∠B
AO
इसी प्रकार ΔCDO में, ∠C
OD
1) व (2) को जोड़ने पर,
AO + OD
AD
AD

प्रश्न 4.
सम्मुख आकृति में, AB और CD क्रमशः एक चतुर्भुज ABCD की सबसे छोटी और सबसे बड़ी भुजाएँ हैं। दर्शाइए कि ∠A > ∠C और ∠B > ∠D

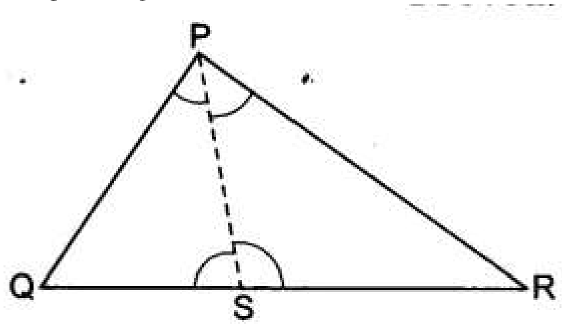


हल :
दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AB सबसे छोटी और CD सबसे बड़ी भुजा है।
सिद्ध करना है : ∠A > ∠C और ∠B > ∠D
रचना : रेखाखण्ड AC तथा BD खींचिए।
उपपत्ति : AB सबसे छोटी भुजा है। तब ΔABC में,
BC > AB
∠BAC > ∠ACB (प्रमेय-3 से) …(1)

पुनः CD सबसे बड़ी भुजा है।
ΔACD में,
$CD > AD$
$\angle DAC > \angle DCA$ (प्रमेय-3 से) …(2)
(1) व (2) को जोड़ने पर,
$\angle BAC + \angle DAC > \angle ACB + \angle DCA$
$\angle BAD > \angle BCD$
$\angle A > \angle C$
AB सबसे छोटी भुजा है।
तब ΔABD में,
$AD > AB$
$\angle ABD > \angle ADB$ (प्रमेय-3 से) …(3)
इसी प्रकार, CD सबसे बड़ी भुजा है।
तब ΔBCD में,
$CD > BC$
$\angle CBD > \angle BDC$ (प्रमेय-3 से) …(4)
(3) व (4) को जोड़ने पर,
$\angle ABD + \angle CBD > \angle ADB + \angle BDC$
$\angle ABC > \angle ADC$
$\angle B > \angle D$
Proved.

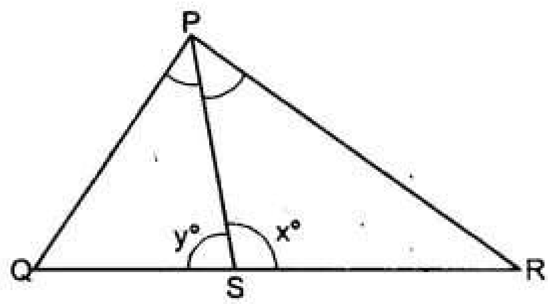


प्रश्न 5.
सम्मुख आकृति में, $PR > PQ$ है और PS, $\angle QPR$ को समद्विभजित करता है। सिद्ध कीजिए कि $\angle PSR > \angle PSQ$ है।

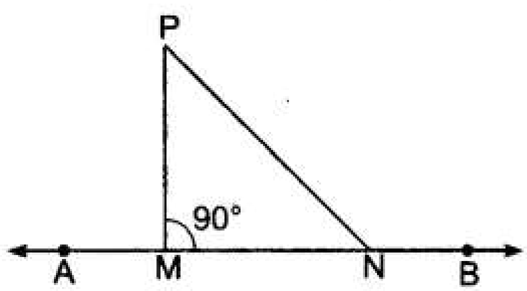


हल :
दिया है: ΔPQR में, $PR > PQ$ और $\angle QPR$ को समद्विभाजक, QR से बिन्दु S पर मिलता है।
माना $\angle PSR = x°$ तथा $\angle PSQ = y°$

सिद्ध करना है : $\angle PSR > \angle PSQ$
उपपत्ति: ΔPQR में,
$PR > PQ$
$\angle Q > \angle R$ (प्रमेय-3 से)
PS, $\angle P$ को समद्विभाजक है।
$\angle QPS = \frac{1}{2}\angle P$
तथा $\angle RPS = \frac{1}{2}\angle P$
$\angle x°$, ΔPQS का भुजा QS के बिन्दु S पर बहिष्कोण है।
$x° = \angle Q + \angle QPS$
$\Rightarrow \angle Q = x° - \angle QPS$
$\angle Q = x° - \frac{1}{2}\angle P$ …..(1)
$\angle y°$, ΔPRS का भुजा RS के बिन्दु S पर बहिष्कोण है।
$y° = \angle R + \angle RPS$
$\Rightarrow \angle R = y° - \frac{1}{2}\angle RPS$
$\Rightarrow \angle R = y° - \frac{1}{2}\angle P$
$\angle Q > \angle R$ …..(2)
$x° - \frac{1}{2}\angle P > y° - \frac{1}{2}\angle P$
[समीकरण (1) व (2) से]
$x° > y°$
$\angle PSR > \angle PSQ$
Proved.



प्रश्न 6.
दर्शाइए कि एक रेखा पर एक दिए हुए बिन्दु से, जो उस रेखा पर स्थित नहीं है, जितने रेखाखण्ड खींचे जा सकते हैं उनमें लम्ब रेखाखण्ड सबसे छोटा होता है।

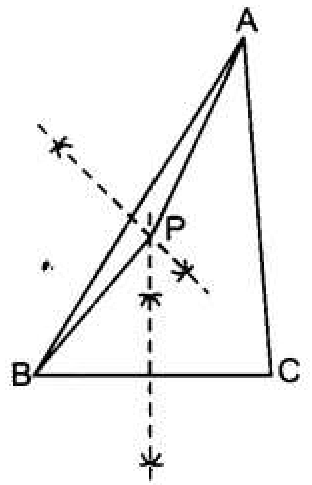


हल :
दिया है: AB एक सरल रेखा है और P उसके बाहर दिया हुआ एक बिन्दु है। P से रेखा AB पर PM और PN रेखाखण्ड खींचे गए हैं, जिनमें $PM \perp AB$
सिद्ध करना है : PM

उपपत्ति : ΔMPN में, $\angle M = 90°$, $PM \perp AB$ शेष कोण $\angle MPN + \angle PNM = 90°$ (त्रिभुज के अन्त:कोणों का योग 180° होता है)
$\angle PMN$ सबसे बड़ा कोण है। $\angle M > \angle N$
$PN > PM$ (प्रमेय-4 से)
अत: P से खींचे रेखाखण्डों में PM सबसे छोटा है।
Proved.

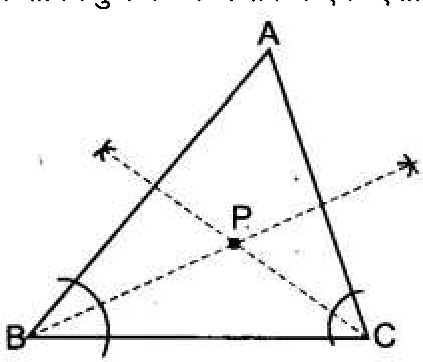
प्रश्नावली 7.5

प्रश्न 1.
ABC एक त्रिभुज है। इसके अभ्यन्तर में एक ऐसा बिन्दु ज्ञात कीजिए जो ΔABC के तीनों शीर्षों से समदूरस्थ है।



हल :
एक ΔABC के अभ्यन्तर में एक ऐसा बिन्दु P ज्ञात करना है जो त्रिभुज के तीनों शीर्षों A, B व C से समान दूरी पर हो।
रचना विधि :
(1) सर्वप्रथम दिया हुआ त्रिभुज ABC बनाइए।
(2) AB तथा BC के लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो परस्पर बिन्दु P पर काटें।
(3) रेखाखण्ड PA, PB और PC खींचिए।
P अभीष्ट बिन्दु है जो तीनों शीर्षों से समदूरस्थ है।

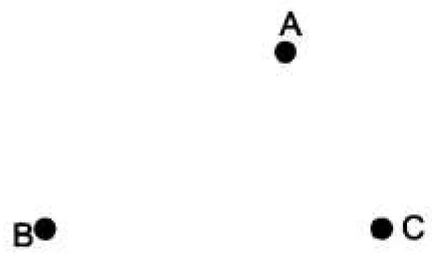
प्रश्न 2.
किसी त्रिभुज के अभ्यन्तर में एक ऐसा बिन्दु ज्ञात कीजिए जो त्रिभुज की सभी भुजाओं से समदूरस्थ है।



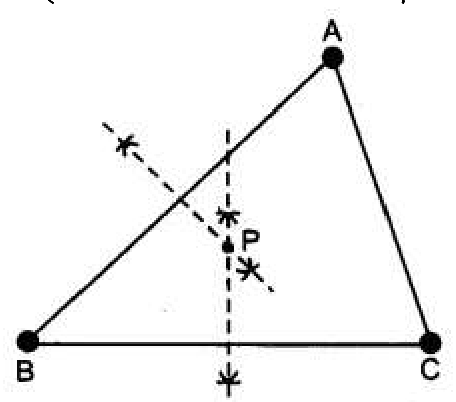
हल :
माना ABC एक त्रिभुज है जिसके अभ्यन्तर में एक ऐसा बिन्दु P ज्ञात करना है जो त्रिभुज की तीनों भुजाओं AB, BC और CA

से समदूरस्थ हो।
रचना विधि :
(1) सर्वप्रथम दिया हुआ ΔABC बनाइए।
(2) ∠B और ∠C के समद्विभाजक खींचिए जो परस्पर बिन्दु P पर काटें।
P अभीष्ट बिन्दु है जो तीनों भुजाओं से समदूरस्थ है।

प्रश्न 3.
एक बड़े पार्क में, लोग तीन बिन्दुओं (स्थानों) पर केन्द्रित हैं :
A : जहाँ बच्चों के लिए फिसलपट्टी और झूले हैं।
B : जिसके पास मानव निर्मित एक झील है।
C : जो एक बड़े पार्किंग स्थल और बाहर निकलने के रास्ते के निकट है।
एक आइसक्रीम का स्टॉल कहाँ लगाना चाहिए ताकि वहाँ लोगों की अधिकतम संख्या पहुँच सके?

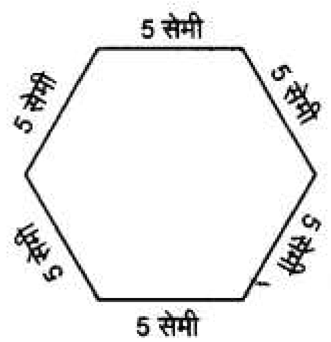


हल :
A, B और C तीन बिन्दु स्थान हैं। आइसक्रीम का स्टॉल लगाने के लिए लोगों की उस पर अधिकतम पहुँच होने के लिए यह आवश्यक है कि स्टॉल तीनों स्थानों से B’ समदूरस्थ हो।
अत: आइसक्रीम स्टॉल लगाने के लिए हमें एक ऐसे स्थान (बिन्दु) P का चयन करना है जो पार्क के तीनों स्थानों से समान दूरी पर हो।
ज्ञात करने की विधिः
(1) बिन्दु Δसे बिन्दु B को, बिन्दु B से बिन्दु C को और बिन्दु C से बिन्दु A को ऋजु रेखाओं द्वारा मिलाकर ΔABC बनाइए।
(2) किन्हीं दो भुजाओं (AB व BC) के लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो परस्पर बिन्दु P पर काटें।
आइसक्रीम स्टॉल के चयन के लिए उपयुक्त स्थान बिन्दु P होगा जो तीनों है स्थानों से समदूरस्थ है।

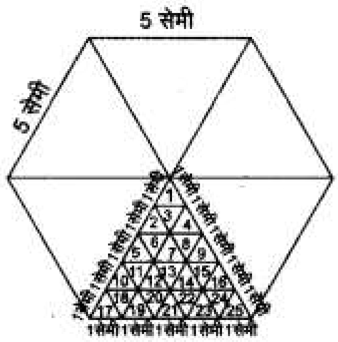


प्रश्न 4.
घड्भुजीय और तारे के आकार की रंगोलियों को 1 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुजों से भरकर पूरा कीजिए। प्रत्येक स्थिति में त्रिभुजों की संख्या गिनिए। किसमें अधिक त्रिभुज हैं?

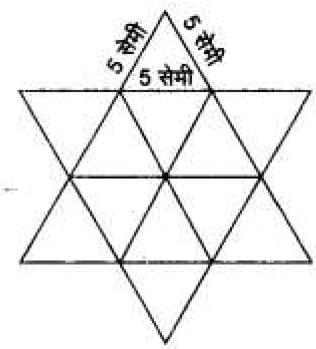
हल :



चित्रों से स्पष्ट है कि विकर्गों को मिलाने पर षड्भुजीय आकृति को 6 समबाहु त्रिभुजों में और तारे के आकार की आकृति को 1∠समबाहु त्रिभुजों में विभाजित किया जा सकता है जबकि समबाहु त्रिभुजों में प्रत्येक भुजा, 5 सेमी है।



षड्भुजीय रंगोली



तारे के आकार की रंगोली

पुनः षड्भुजीय आकृति के एक समबाहु त्रिभुज जिसकी भुजा 5 सेमी है, को 1 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुजों में विभाजित कर स्पष्ट किया गया है कि 5 सेमी भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज को 1 सेमी भुजा वाले 25 त्रिभुजों में विभाजित किया जा सकता है।

तब स्थिति 1 : षड्भुजीय रंगोली

इसको 1 सेमी भुजा वाले 6 x 25 = 150 समबाहु त्रिभुजों में बाँटा जा सकता है।

स्थिति 2 : तारे के आकार की रंगोली

5 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुजों की संख्या = 12

आकृति में 1 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुजों की संख्या = 12 x 25 = 300

स्पष्ट है कि तारे के आकार वाली आकृति में त्रिभुजों की संख्या अधिक है।