باب 3

# ٹرگنومیٹرک تفاعلات
# (TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

❖ ایک ریاضی دان جانتا ہے کہ مسئلہ کا حل کس طرح کیا جا تا ہے، وہ اسے کرنہیں سکتا۔ "MILNE" ❖

## 3.1 تعارف (Introduction)

آریہ بھٹ
(476-550)

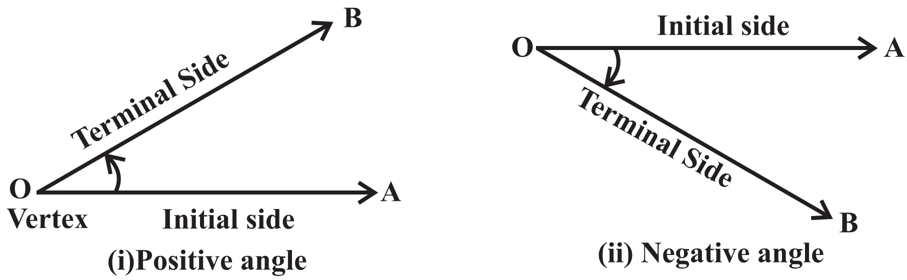
لفظ ٹرگنومیٹری۔ گریک الفاظ "trigon" اور "metron" سے لیا گیا ہے اور اسکا مطلب ہے مثلث کے اضلاع کی پیمائش کرنا ابتدا میں مضمون مثلثوں کے جیومیٹرک مسئلہ کو حل کرنے کے لیے بنایا گیا تھا۔ اس کا مطالعہ جہاز رانی کے سمندری کے کپتانوں، نئ زینوں کے نقشے بنانے والے سرویرز surveyor اور انجینیر ز میں engineers وغیرہ کر چکے تھے۔ آجکل ٹرگنومیٹری کا استعمال بہت سے حلقوں میں کیا جاتا ہے جیسے زلزلہ کی وجوہات جاننے، برقی سرکٹ کے ڈیزائن بنانے، ایٹم کی حالت کو بتانے، سمندر میں لہروں کی اونچائی کی پیش گوئی کرنے، موسیقی کی دھن کو الگ الگ بتانے اور بہت سی دوسری جگہ کیا جاتا ہے۔

ہم پچھلی جماعتوں میں پہلے ہی زاویہ حادہ کی ٹرگنو میٹرک نسبتیں بحیثیت قائم زادی مثلث (right angled triangle) کے ضلعوں کے بیچ نسبت کی حیثیت سے پڑھ چکے ہیں، ہم پہلے ہی ٹرگنومیٹرک اکائی اور انکا استعمال ان مسئلوں کے حل کے لیئے کر چکے ہیں جن میں اونچائی اور فاصلہ پرمبنی سوالات ہوں۔ اس سبق میں ہم ٹرگنومیٹرک نسبتوں کے مفہوم کو عام کر کے ٹرگنومیٹرک تفاعلات اوراس کی خصوصیات کا مطالعہ کریں گے۔

## 3.2 زاویے (Angles)

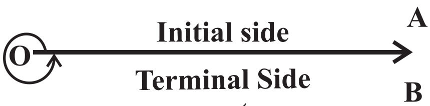
کسی شعاع (Ray) کی نقطہ آغاز کے گرد گھومنے کی مقدار زاویہ (Angle) کہلاتی ہے۔ اصلی شعاع زاویہ کا ابتدائی ضلع (Initial arm)

© NCERT not to be republished




شکل3.1

اور گھومنے کے بعد کی حالت میں وہ شعاع زاویہ کا اختتامی ضلع کہلاتا ہے جس نقطہ کے گرد گھماؤ ہوا ہے اسے نقطہ راس(Vertex) کہتے ہیں۔اگر گھومنے کی سمت anti-clock wise ہوتو زاویہ مثبت زاویہ کہلاتا ہے اور اگر گھومنے کی سمت clock wise ہوتو زاویہ منفی ہوگا۔




شکل3.2

زاویہ کی پیائش (ناپ) وہ ہے جو ابتدائی ضلع سے اختتامی ضلع تک گھومنے سے حاصل ہوتا ہے زاویوں کو ناپنے کے بہت سے پیانے ہیں۔زاویہ کی تعریف ایک اکائی بتاتی ہے۔جس کا مطلب ہے ابتدائی ضلع کی جگہ سے ایک مکمل چکر جیسا کہ شکل 3.2 میں دکھایا گیا۔

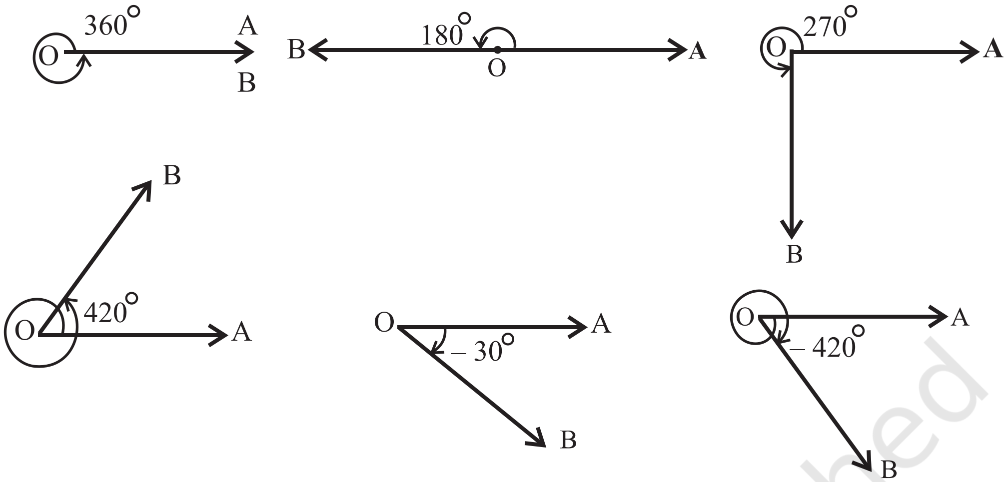
عام طور پر یہ بڑے زاویوں کے لیے (موزوں) ہے۔مثال کے طور پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ایک پہیہ تیزی سے گھومتا ہوا 15 چکر فی سیکنڈ کے حساب سے ایک زاویہ بنا رہا ہے۔ہمیں زاویہ کی پیائش کی دو اور اکائیاں بتانی ہیں جو سب سے زیادہ استعمال ہوتی ہیں مطلب ہے درجہ پیائش(Degree measure) اور(readian measure) ریڈین پیائش۔

**3.2.1 درجہ پیائش(*Degree measure*)** اگر گھماؤ یا گردش ابتدائی ضلع سے اختتامی ضلع تک $\left(\frac{1}{360}\right)^{th}$ چکر ہے تو زاویہ کی پیائش 1 درجہ ہے جو $1°$ لکھا جاتا ہے۔ایک درجہ منٹوں میں بانٹا جاتا ہے اور ایک منٹ سیکنڈوں میں بانٹا جاتا ہے۔درجہ کا ایک ساٹھواں حصہ منٹ کہلاتا ہے جسے $1'$ لکھا جاتا ہے اور ایک منٹ کا ایک۔ساٹھواں حصہ ایک سیکنڈ کہلاتا ہے اور $1''$ لکھا جاتا ہے۔

اس لئے، $1° = 60'$ , $1' = 60''$

کچھ زاویے جن کی ماپ (ناپ) $360°$ ، $180°$ ، $270°$ ، $420°$ ، $-30°$ ، $-420°$ شکل3.3 میں دکھائے گئے ہیں۔

© NCERT not to be republished

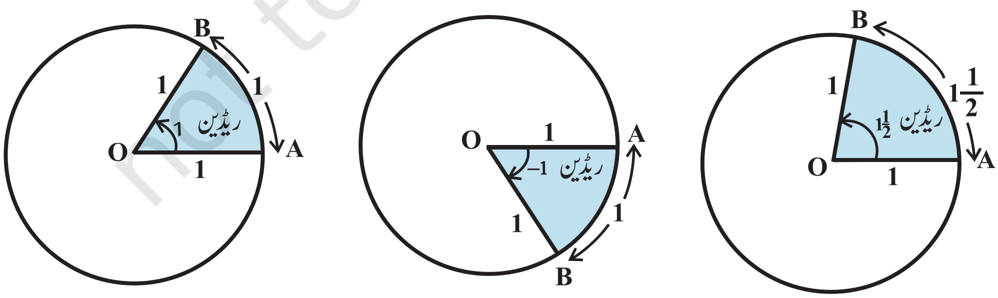



شکل 3.3

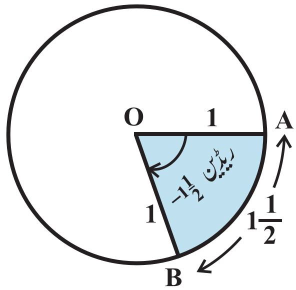
### 3.2.2 ریڈین پیمائش (*Radian mearsure*)

زاویہ کی پیمائش کی ایک دوسری اکائی ریڈین پیمائش ہے۔ ایک اکائی کی لمبائی والے قوس سے مرکز پر جو زاویہ بنتا ہے جسکو ایک اکائی دائرہ (وہ دائرہ جسکا نصف قطر 1 اکائی ہے) کہتے ہیں جسکی پیمائش 1 ریڈین ہے۔ شکل میں (i) 3.4۔ Oa ابتدائی ضلع ہے اور OB اختتامی ضلع ہے یہ شکلیں وہ زاویہ دکھائی ہیں جنکی پیمائش (ناپ) ریڈین، 1 ریڈین $-1$ ریڈین، $1\frac{1}{2}$ ریڈین اور $-1\frac{1}{2}$ ریڈین ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ 1 اکائی نصف قطر والے دائرہ کا محیط $2\pi$ ہے۔ اسلئے ابتدائی ضلع کا ایک مکمل چکر $2\pi$ ریڈین کا زاویہ بناتا ہے۔




شکل 3.4 (i) سے (iii)



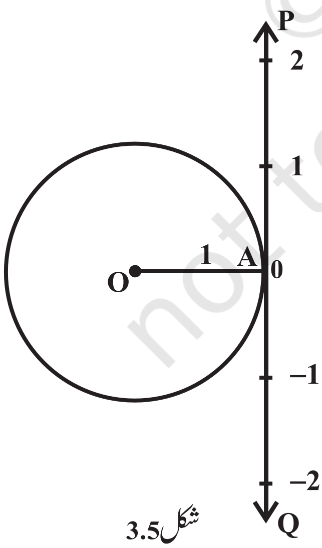

شکل 3.4 (iv)

اور زیادہ عام طور پر۔ $r$ نصف قطر والے دائرہ میں، $r$ لمبائی والا قوس 1 ریڈین کا زاویہ بناتا ہے۔ یہ بخوبی جانا جاتا ہے کہ دائرہ کے برابرے قوس مرکز پر برابر کے زاویہ بناتے ہیں۔ کیونکہ $r$ نصف قطر والے دائرہ میں، ایک قوس جسکی لمبائی $r$ ہے ایک زاویہ بناتی ہے جسکی پیائش 1 ریڈین ہے، اس لیے ایک قوس جسکی لمبائی $l$ ہے ایک زاویہ بنائے گا جسکی پیائش $\frac{l}{r}$ ریڈین ہے۔

اس لیے اگر ایک $r$ نصف قطر والے دائرہ میں، ایک قوس جسکی لمبائی $l$ ہے مرکز پر ایک زاویہ $\theta$ بناتا ہے تو ہمارے پاس ہے۔

$\theta = \frac{l}{r}$ یا $l = r\theta$

## 3.2.3 ریڈین اور حقیقی اعداد کے بیچ میں رشتہ (تعلق) (*Relation between radian and real numbers*)




شکل 3.5

ایک اکائی دائرہ کا تصور کیجئے جسکا مرکز 0 ہے۔ مان لیجئے دائرہ پر A کوئی نقطہ ہے۔ 0A کو زاویہ کا ابتدائی ضلع مان لیجئے۔ تب دائرہ کے ایک قوس کی لمبائی زاویہ کی ریڈین ماپ دے گا جو قوس دائرہ کے مرکز پر بناتا ہے۔ خط PAQ کا تصور کیجئے جو دائرہ میں نقطہ A پر مماس ہے مان لیجئے نقطہ A حقیقی عدد صفر کو دکھاتا ہے۔ AP مثبت حقیقی عدد کو ظاہر کرتا ہے اور AQ منفی حقیقی اعداد کا ظاہر کرتا ہے (شکل 3.5) اگر ہم خط AP کو دائرہ کی anti-clock wise سمت میں گھمائیں اور خط AQ کو clock wise سمت میں گھمائیں تو ہر حقیقی عدد ایک ریڈین پیمانہ کے مطابق ہوگا اور اسکے برعکس۔ اسلئے ریڈین پیائش اور حقیقی اعداد کو ایک سمجھا جاسکتا ہے۔

© NCERT not to be republished

### 3.2.4 درجہ اور ریڈین کے درمیان تعلق (رشتہ) (Relation between degree and radian)

کیونکہ دائرہ مرکز پر ایک زاویہ بناتا ہے جسکی ریڈین پیمائش $2\pi$ ہے اور اس کی درجہ پیمائش $360°$ ہے۔ اس سے یہ ملتا ہے۔

$$2\pi \text{ radian} = 360°$$

یا $\pi \text{ radian} = 180°$

اوپر دیا ہوا رشتہ ہمیں ریڈین پیمائش کو درجہ پیمائش میں ظاہر کرنے میں مدد کرتا ہے اور درجہ پیمائش کو ریڈین پیمائش میں۔ $\pi$ کی تقریباً قدر $\frac{22}{7}$ استعمال کرنے پر ہمارے پاس ہے

$$1 \text{ radian} = \frac{180°}{\pi} = 57°16' \text{ تقریباً}$$

ساتھ ہی $1° = \frac{\pi}{180} \text{ radian} = 0.01746 \text{ radian}$

کچھ زاویوں کا درجہ پیمائش اور ریڈین پیمائش کے بیچ رشتہ مندرجہ ذیل جدول میں دیا گیا ہے۔

| Degree | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Radian | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

### خیالی معاہدہ (سمجھوتہ) National convention

کیونکہ زاویے درجہ یا ریڈین میں ناپے جاتے ہیں، ہم خیالی معاہدہ کو اپناتے ہیں کہ جب بھی ہم زاویہ $\theta°$ لکھیں۔ ہمارا مطلب ہے وہ زاویہ جسکی پیمائش $\theta$ ہے اور جب بھی ہم زاویہ $\beta$ لکھیں، ہمارا مطلب ہو وہ زاویہ جسکی ریڈین پیمائش $\beta$ ہے۔

یہ بات نوٹ کر لیجئے جب کوئی زاویہ ریڈین میں ظاہر کیا جائے۔ لفظ ریڈین کو زیادہ تر ہٹا دیں۔ اس لیے $\pi = 180°$ اور $\frac{\pi}{4} = 45°$ اس سمجھ کے ساتھ لکھے گئے ہیں کہ $\pi$ اور $\frac{\pi}{4}$ ریڈین پیمائش میں۔ اسطرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$\text{ریڈین پیمائش} = \frac{\pi}{180} \times \text{درجہ پیمائش}$$

$$\text{درجہ پیمائش} = \frac{180}{\pi} \times \text{ریڈین پیمائش}$$

**مثال 1** $40°20'$ کو ریڈین پیمائش میں بدلنے۔

**حل** ہم جانتے ہیں کہ $180° = \pi$ ریڈین

© NCERT not to be republished

یہاں $40°20' = 40\frac{1}{3}^{\circ}$ درجات، $= \frac{121}{3} \times \frac{\pi}{180}$ ریڈین $= \frac{121\pi}{540}$ ریڈین

اس لیے $40°20' = \frac{121\pi}{540}$ ریڈین

**مثال 2** 6 ریڈین کو درجہ پیمائش میں بدلئے۔

**حل** ہم جانتے ہیں کہ $\pi$ ریڈین $= 180°$

اس لئے 6 ریڈین $= \frac{180}{\pi} \times 6$ درجہ $= \frac{1080 \times 7}{22}$ درجہ

$= 343\frac{7}{11}$ درجہ $= 343° \frac{7 \times 60}{11}$ منٹ (کیونکہ $1° = 60'$)

$= 343° + 38' + \frac{2}{11}$ منٹ (کیونکہ $1' = 60''$)

$= 343° + 38' + 10.9''$ $= 343°38' 11''$ تقریباً

اس لئے 6 ریڈین $= 343°38' 11''$ (تقریباً)

**مثال 3** دائرہ کا نصف قطر معلوم کیجئے جس میں $60°$ کا مرکزی زاویہ ایک قوس کو کاٹتا ہے جس کی لمبا 37.4 سم ہے ($\pi$ کا $\frac{22}{7}$ استعمال کریں)

**حل** یہاں $l = 37.4$ اور $\theta = 60° = \frac{60\pi}{180}$ ریڈین $\frac{\pi}{3}$ ہے۔

اس طرح $r = \frac{l}{\theta}$ کا استعمال کرکے ہمارے پاس ہے۔

$r = \frac{37.4 \times 3}{\pi} = \frac{37.4 \times 3 \times 7}{22} = 35.7$ سم۔

**مثال 4** ایک گھڑی کی منٹ والی سوئی کی لمبائی 1.5 سم ہے۔ یہ 40 منٹ میں کتنا آگے بڑھے گی؟ $\pi = 3.14$ کا استعمال کیجئے۔

**حل** 60 منٹ میں، منٹ والی سوئی گھڑی کا ایک چکر لگائی ہے۔ اس لیے 40 منٹ میں منٹ والی سوئی $\frac{2}{3}$ چکر لگائے گی۔

© NCERT not to be republished

اس لیے $\theta = \frac{2}{3} \times 360°$ یا $\frac{4\pi}{3}$ ریڈین یہاں طے کیا گیا۔

فاصلہ $l = r\theta = 1.5 \times \frac{4\pi}{3}$ سم $= 2\pi$ سم $= 2 \times 3.14$ سم $= 6.28$ سم

**مثال 5** اگر دو برابر لمبائی والے قوس دائروں کے مرکز پر بالترتیب °65 اور °110 کے زاویہ بناتے ہیں تو انکے نصف قطروں کی نسبت معلوم کیجیے۔

**حل** مان لیجیے $r_1$ اور $r_2$ دو دائروں کے نصف قطر ہیں۔ دیا ہوا ہے

$$\theta_1 = 65° = \frac{\pi}{180} \times 65 = \frac{13\pi}{36}$$ ریڈین

اور $$\theta_2 = 110° = \frac{\pi}{180} \times 110 = \frac{22\pi}{36}$$ ریڈین

مان لیجیے ہر قوس کی لمبائی $l$ ہے، تب $l = r_1\theta_1 = r_2\theta_2$ جو دیتا ہے

$$\frac{13\pi}{36} \times r_1 = \frac{22\pi}{36} \times r_2, \text{ i.e., } \frac{r_1}{r_2} = \frac{22}{13}$$

اس لیے $r_1 : r_2 = 22 : 13$

## مشق 13.1

.1 ذیل میں دی گئی درجہ پیمائش کے مطابق ریڈین پیمائش معلوم کیجیے۔

(i) $25°$ (ii) $-47°30'$ (iii) $240°$ (iv) $520°$

.2 ذیل میں دی گئی ریڈین پیمائش کے مطابق درجہ پیمائش معلوم کیجیے۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ کا استعمال کیجیے)

(i) $\frac{11}{16}$ (ii) $-4$ (iii) $\frac{5\pi}{3}$ (iv) $\frac{7\pi}{6}$

.3 ایک پہیہ ایک منٹ میں 360 چکر لگاتا ہے۔ ایک سیکنڈ میں یہ کتنے ریڈین گھومتا ہے؟

.4 ایک قوس جسکی لمبائی 22 سم ہے ایک دائرہ کے مرکزی پر جسکا نصف قطر 100 سم ہے زاویہ بناتا ہے اسکی درجہ پیمائش معلوم کیجیے۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ کا استعمال کیجیے)

.5 ایک 40 سم قطر والے دائرہ میں وتر کی لمبائی 20 سم ہے۔ وتر کے چھوٹے قوس کی لمبائی معلوم کیجیے؟

© NCERT not to be republished

.6 اگر دو دائروں میں برابر لمبائی والے قوس مرکز پر $60^\circ$ اور $75^\circ$ کے زاویہ بناتے ہیں تو ان کے نصف قطر کی نسبت معلوم کیجئے۔

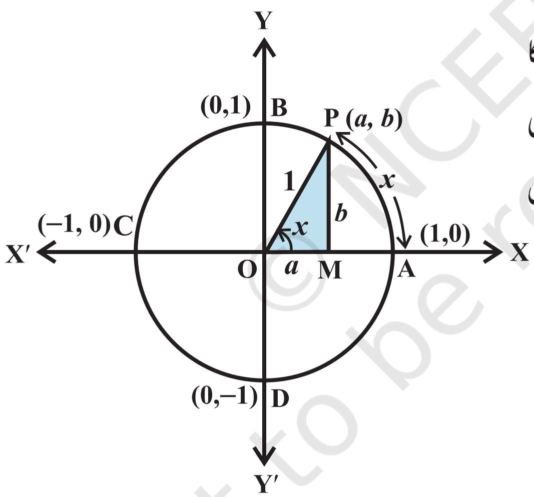
.7 ایک 75 سم لمبا پنڈولم (لنگر) جھول رہا ہے۔ اسکا سرا ذیل لمبائی والے قوس بناتا ہے۔

(i) 10 سم (ii) 15 سم (iii) 21 سم

ریڈین میں ان زاویوں کی پیمائش معلوم کیجئے؟

## 3.3 ٹرگنومیٹریکل تفاعلات (Trigonometric Functions)

پچھلی جماعتوں میں حادہ زاویوں کی ٹرگنوں میٹری نسبتیں قائمی زاوی مثلث (Right angle trangle) کے اضلاع کی نسبتوں کی حیثیت سے پڑھ چکے ہیں اب ہم ٹرگنومیٹری نسبت کی تعریف کوسی بھی زاویے کی ریڈین پیمائش تک بڑھا کر ٹرگنومیٹری تفاعلات کی حیثیت سے مطالع کریں گے۔




شکل 3.6

مختص محاور (Co-ordinate aes) پر ایک اکائی دائرہ جسکا مرکز مبدہ پر ہو لیجئے۔ مان لیجئے $P(a, b)$ دائرہ پر کوئی نقطہ ہے جس میں زاویہ $AOP = x$ ریڈین i.e. قوس AP کی لمبائی $= x$ (شکل 3.6)

ہم بیان کرتے ہیں $\cos x = a$ اور $\sin x = b$ کیونکہ $\Delta OMP$ ایک قائم مثلث ہے ہمارے پاس ہے۔

$$OM^2 + MP^2 = OP^2$$

یا $a^2 + b^2 = 1$

اس لیے اکائی دائرہ پر ہر نقطے کے لیے۔ ہمارے پاس ہے۔

$$a^2 + b^2 = 1$$

یا $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

کیونکہ ایک پورا چکر مرکز پر $2\pi$ ریڈین کا زاویہ بناتا ہے، $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ ، $\angle AOC = \pi$ ، $\angle AOD = \frac{3\pi}{2}$ وہ

© NCERT not to be republished

زاویے جو $\frac{\pi}{2}$ کے مضروب (Multiples) میں ربعی زاویے (Quandrantal angles) کہلاتے ہیں۔نقطات A، B، C اور D کے مختص بالترتیب (1,0)، (0,1)، (-1,0) اور (0,-1) ہیں۔اس لیے

$$\cos 0° = 1 \qquad \sin 0° = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos \pi = -1 \qquad \sin \pi = 0$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\cos 2\pi = 1 \qquad \sin 2\pi = 0$$

اگر اب ہم نقط P سے ایک مکمل چکر لیں ہم دوبارہ پھر اسی نقطہ P پر آجائیں گے۔اس لیے اب ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اگر $x$ بڑھتا ہے (یا گھٹتا ہے) $2\pi$ کے تکملہ ضریب سے تو sine اور cosine تفاعل کی قدر نہیں بدلتی۔ اس لیے

$$\cos(2n\pi + x) = \cos x, n \in \mathbf{Z} \text{ ، } \sin(2n\pi + x) = \sin x, n \in \mathbf{Z}$$

آگے $\sin x = 0, \text{ if } x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots \text{i.e.,}$

جب $x$ ایک $\pi$ کا تکملہ ضریب ہو۔

اور $\cos x = 0, \text{ if } x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots \text{i.e.,}$

اس کا مطلب $\cos x$ ختم ہو جاتا ہے جبکہ x، $\frac{\pi}{2}$ کا طاق ضریب ہو۔اس لیے

$$\mathbf{\sin x = 0 \text{ implies } x = np}, \quad n \text{ is any integer}$$

$$\mathbf{\cos x = 0 \text{ implies } x = (2n+1)\frac{\pi}{2}}, \quad n \text{ is any integer}$$

اب ہم دوسرے ٹرگنومیٹری تفاعل sine اور cosine تفاعل کی شکل میں بیان کریں گے۔

($n$ ایک صحیح عدد ہے)

$$\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}, x \neq n\pi, \quad n \text{ is integer}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n \text{ is integer}$$

© NCERT not to be republished

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n \text{ is integer}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \neq n\pi, n \text{ is integer}$$

ہم تمام حقیقی x کے لیے یہ دکھا چکے ہیں

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

اس سے یہ ملتا ہے۔

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ (کیوں؟)

$1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x$ (کیوں؟)

ہم اپنی پچھلی جماعتوں میں ٹرگنومیٹری نسبت کی قدریں 0°، 30°، 45°، 60° اور 90° کے بارے میں بحث و مباحثہ کر چکے ہیں۔ ٹرگنومیٹری تفاعل کی قدریں ان زاویوں کے لیے وہی ہیں جو ٹرگنومیٹری نسبت کی پچھلی جماعتوں میں پڑھی ہیں۔ اس لیے ہمارے پاس مندرجہ ذیل جدول ہے:

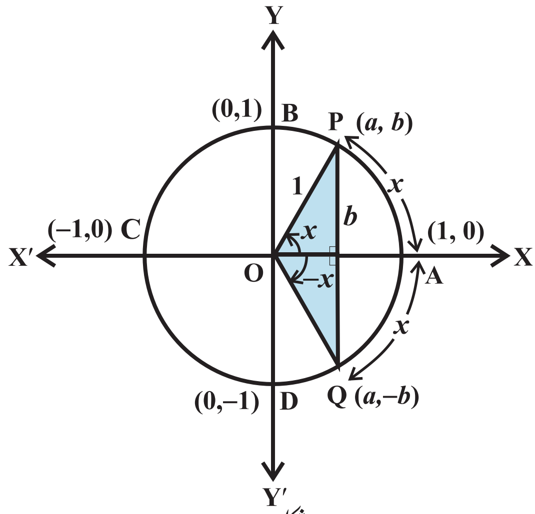
| | $0^\circ$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | –1 | 0 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | –1 | 0 | 1 |
| tan | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | not defined | 0 | not defined | 0 |

cosec $x$، sec $x$ اور cot $x$ کی قدریں sin $x$، cos $x$ اور tan $x$ کے بالترتیب مقلوب ہیں۔

### 3.3.1 ٹرگنومیٹرک تفاعل کے نشانات (Signs of trignometric functions)

مان لیجئے $P(a, b)$ اکائی دائرہ پر جسکا مرکز مبدء پر ہے کوئی نقطہ ہے تا کہ $\angle AOP = x$ اگر $\angle AOQ = -x$ ہو تو نقطہ Q کے مختص $(a, -b)$ ہوں گے (شکل 3.7)۔ اس لیے

© NCERT not to be republished



شکل3.7

$\cos(-x) = \cos x$

اور $\sin(-x) = -\sin x$

کیونکہ کسی بھی اکائی دائرہ پر نقطہ P (a,b) کے لیے $-1 \le a \le 1$ اور $-1 \le b \le 1$ ہمارے پاس ہے اور $-1 \le \sin x \le 1$ تمام x کے لئے۔ ہم اپنی پچھلی جماعتوں سے جانتے ہیں کہ پہلے ربع میں $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ a اور b دونوں مثبت ہیں دوسرے ربع $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$ میں a منفی ہے اور b مثبت تیسرے ربع میں $\left(\pi < x < 3\frac{\pi}{2}\right)$ a اور b دونوں منفی ہیں اور چوتھے ربع میں $\left(3\frac{\pi}{2} < x < 2\pi\right)$ a مثبت ہے اور b منفی۔ اس لیے $\sin x$ ' $0 < x < \pi$ کے لیے مثبت ہے اور $\pi < x < 2\pi$ کے لیے منفی (اسی طرح) مشابہ کے طور پر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ کے لیے cosx مثبت ہے اور $\frac{\pi}{2} < x < 3\frac{\pi}{2}$ کے لیے منفی اور $3\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$ کے مثبت۔ اسی طرح ہم دوسرے ٹرگنومیٹرک تفاعل کے لیے نشانات نکال سکتے ہیں مختلف ربعات میں۔ حقیقت میں ہمارے پاس مندرجہ ذیل جدول موجود ہے:

| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| sin x | + | + | – | – |
| cos x | + | – | – | + |
| tan x | + | – | + | – |
| cosec x | + | + | – | – |
| sec x | + | – | – | + |
| cot x | + | – | + | – |

## 3.2.2 ٹرگنومیٹرک تفاعلات کا علاقہ اور وسعت (Domain and range of trigonometri functionssine)

اور cosine تفاعلات کی تعریف سے ہم نے یہ دیکھا کہ وہ حقیقی اعداد کے لیے دکھائے گئے ہیں اسکے بعد ہم نے یہ دیکھا کہ تمام حقیقی اعداد $x$ کے لیے،

$-1 \le \sin x \le 1$ اور $-1 \le \cos x \le 1$

اس لیے y کا علاقہ sinx اور cosx، y تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہے اور اسکی وسعت ایک وقفہ $[-1,1]$ ہے۔یعنی

$$-1 \le y \le 1$$

کیونکہ $\cos ecx = \frac{1}{\sin x}$، y کا علاقہ = x cosecx جو سیٹ ہے $\{x : x \in \mathbf{R}$ اور $x \ne n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ اور وسعت ایک سیٹ ہے $(y \ge 1)$ یا $(y : y \in \mathbf{R}, y \le -1)$ اسی طرح y کا علاقہ secx جو ایک سیٹ ہے $\left\{x : x \in \mathbf{R}\ and\ x \ne (2n+1)\frac{\pi}{2} n \in \mathbf{Z}\right\}$ اور وسعت ایک سیٹ ہے $(y \ge 1)$ یا $(y : y \in \mathbf{R},\ y \le -1)$ y کا علاقہ = tan x جو کہ ایک سیٹ ہے $\left\{x : x \in \mathbf{R}\ and\ x \ne (2n+1)\frac{\pi}{2} n \in \mathbf{Z}\right\}$ اور وسعت تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہے۔ y کا علاقہ = $\cot x$ جو ایک سیٹ ہے $\{x : x \in \mathbf{R}\ and\ x \ne n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ اسکی وسعت تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہے۔

مزید ہم یہ دیکھتے ہیں کہ پہلے ربع میں جیسے x، 0 سے $\frac{\pi}{2}$ بڑھتا ہے۔ sinx، 0 سے 1 بڑھ جاتا ہے، جیسے x $\frac{\pi}{2}$ سے $\pi$ بڑھ جاتا ہے، sin x، 1 سے 0 گھٹتا ہے۔ تیسرے ربع میں جیسے x، $\pi$ سے $3\frac{\pi}{2}$ بڑھتا ہے تو sinx 0 سے -1 کی طرف گھٹ جاتا ہے۔ اور آخیر میں جوتھے ربع میں sinx، -1 سے 0 کی طرف بڑھتا ہے جبکہ x، $3\frac{\pi}{2}$ سے $2\pi$ تک بڑھتا ہے

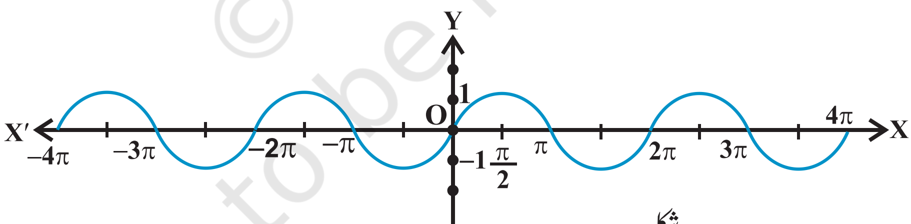
| | I quadrant | II quadrant | III quadrant | IV quadrant |
|---|---|---|---|---|
| sin | increases from 0 to 1 | decreases from 1 to 0 | decreases from 0 to -1 | increases from -1 to 0 |
| cos | decreased from 1 to 0 | decreases from 0 to -1 | increases from -1 to 0 | increases from 0 to 1 |
| tan | increases from 0 to ∞ | inceases from -∞ to 0 | increases from 0 to ∞ | increases from -∞ to 0 |
| cot | decreases from ∞ to 0 | decreases from 0 to -∞ | decreases from ∞ to 0 | decreases from 0 to -∞ |
| sec | increases from 1 to ∞ | increases from -∞ to -1 | decreases from -1 to ∞ | decreases from ∞ to 1 |
| cosec | decreases from ∞ to 1 | increases from 1 to ∞ | increases from -∞ to -1 | decreases from -1 to -∞ |

© NCERT not to be republished

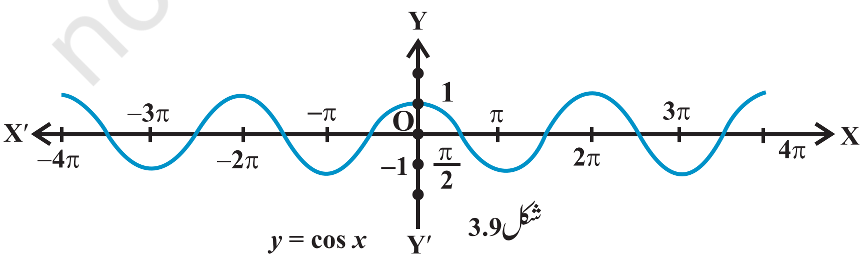
اسی طرح ہم دوسرے ٹرگنومیٹرک تفاعلات کے رویہ کے بارے میں بحث ومباحثہ کر سکتے ہیں۔ درحقیقت ہمارے پاس مندرجہ ذیل جدول موجود ہے۔

**ریمارک** اوپر دیئے ہوئے جدول میں، اس طرح کا بیان کہ tanx، 0 سے (in finity) کی طرف بڑھتا ہے، $0 < x < \frac{\pi}{2}$ کے لیے۔ اس کا آسان مطلب یہ ہے کہ tanx بڑھتا ہے جبکہ x بڑھتا ہے $0 < x < \frac{\pi}{2}$ کے لیے اور بڑی مثبت اختیاری قدرون کو مانئے جبکہ x، $\frac{\pi}{2}$ کی طرف بڑھتا ہے۔ اسی طرح یہ کہنا کہ Coses x، -1 سے $-\infty$ (minus unfinty) کی طرف گھٹتا ہے چوتھے ربع میں کا مطلب ہے $x \in (3\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ $\operatorname{cosec} x$ کے لیے گھٹتا ہے۔ علامتیں $\infty$ اور $-\infty$ سادہ پر کچھ تفاعلات اور تغیر کے رویہ کو خاص طور پر بتاتے ہیں۔

ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ sin x اور cos x کی قدریں 2π وقفہ کے بعد دہرائی جاتی ہے۔ اس لیے coseex اور secx کی قدریں $2\pi$ وقفہ کے بعد بھی دہرائی جائیں گی۔ ہم اگلے سیکشن میں دیکھیں گے $\tan(\pi + x) = \tan x$ اس لئے tan x کی قدریں π وقفہ کے بعد دہرائی جائیں گی کیونکہ cot x اور tan x کا مقلوب ہے اس کی قدر بھی وقفہ $\pi$ کے بعد دہرائی جائے گی۔ اس جانکاری اور ٹرگنومیٹرک تفاعلات کے رویہ کا استعمال کر کے ہم ان تفاعلات کے گراف بنا سکتے (کھینچ سکتے) ہیں۔ ان تفاعلات کے گراف نیچے دیئے گئے ہیں۔

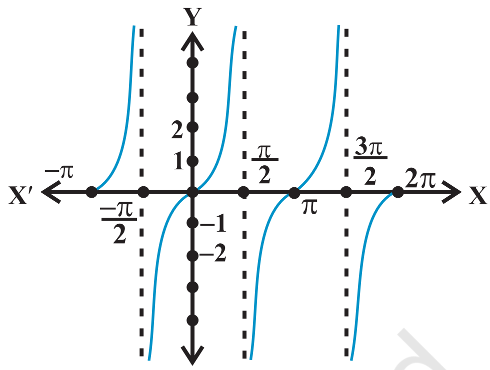



شکل 3.8

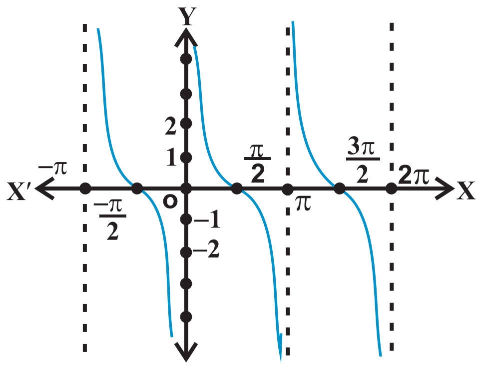



شکل 3.9

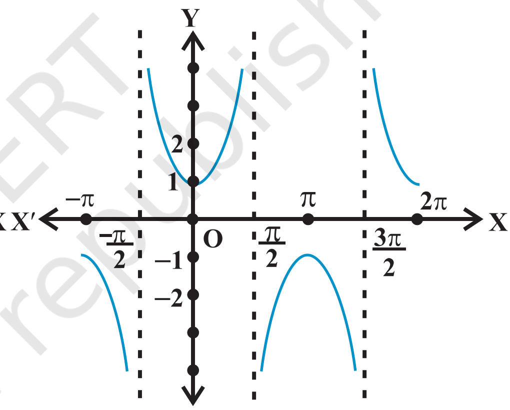
© NCERT not to be republished



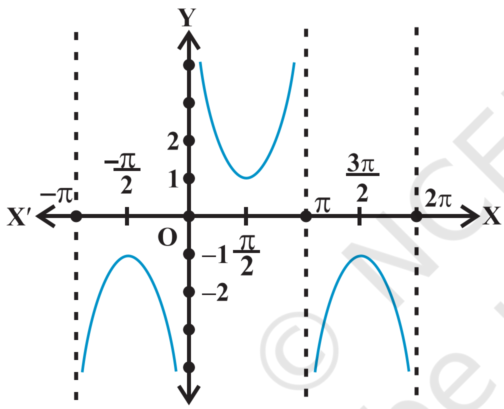

$y = \tan x$ شکل 3.10




$y = \cot x$ شکل 3.11




$y = \sec x$ شکل 3.12




$y = \operatorname{cosec} x$ شکل 3.13

**مثال 6** اگر $\cos x = \frac{-3}{5}$ ، x تیسرے ربع میں ہے، دوسرے پانچ (5) ٹرگنومیٹرک تفاعلات کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

**حل** کیونکہ $\cos x = \frac{-3}{5}$ ہمارے پاس ہے $\sec x = -\frac{5}{3}$

اب $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ یا $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

یا $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

اس لیے $\sin x = \pm\frac{4}{5}$

© NCERT not to be republished

کیونکہ x تیسرے ربع میں موجود ہے۔ sin x ایک منفی ہے۔ اس لیے

$$\sin x = -\frac{4}{5}$$

جو یہ بھی دیتا ہے

$$\operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}$$

اس کے آگے، ہمارے پاس ہے

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3} \text{ اور } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{4}$$

**مثال 7** اگر $\cot x = \frac{-5}{12}$، x دوسرے ربع میں واقع ہے، دوسرے پانچ ٹرگنومیٹرک تفاعلات کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

**حل** کیونکہ $\cot x = \frac{-5}{12}$ ہمارے پاس ہے۔

$$\tan x = \frac{-12}{5}$$

اب

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$= 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$$

اس لیے

$$\sec x = \pm\frac{13}{5}$$

کیونکہ x دوسرے ربع میں واقع ہے۔ اسلیے secx منفی ہوگا۔

اس لیے

$$\sec x = -\frac{13}{5}$$

آگے ہمارے پاس ہے

$$\sin x = \tan x . \cos x = \left(\frac{-12}{5}\right) \times \left(\frac{-5}{13}\right) = \frac{12}{13}$$

اور

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{13}{12}$$

**مثال 8** $\sin \frac{31\pi}{3}$ کی قیمت (قدر) معلوم کیجئے۔

© NCERT not to be republished

**حل** ہم جانتے ہیں کہ sin x کی قدریں وقفہ $2\pi$ کے بعد دہرائی جاتی ہیں۔

اس لیے $\sin\frac{31\pi}{3} = \sin(10\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**مثال 9** $\cos(-1710^0)$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

**حل** ہم جانتے ہیں کہ cosx کی قدر $2\pi$ یا 360 کے وقفہ کے بعد دہرائی جاتی ہیں۔

اس لیے،
$$\cos(-1710^0) = \cos(-1710^0 + 5\times 360^0)$$
$$= \cos(-1710^0 + 1800^0)$$
$$= \cos = 90^0 = 0$$

## مشق 3.2

دوسرے پانچ ٹرگنومیٹرک تفاعلات کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

.1 $\cos x = -\frac{1}{2}$ ، x تیسرے ربع میں واقع ہے۔

.2 $\sin x = \frac{3}{5}$ ،x دوسرے ربع میں واقع ہے۔

.3 $\cot x = \frac{3}{4}$ ، x تیسرے ربع میں واقع ہے۔

.4 $\sec x = \frac{13}{5}$ ،x چوتھے ربع میں واقع ہے۔

.5 $\tan x = \frac{-5}{12}$ ،x دوسرے ربع میں واقع ہے۔

ذیل میں دیئے ٹرگنومیٹرک تفاعلات کی قدریں معلوم کیجئے۔

.6 $\sin 765^0$

.7 $\operatorname{cosec}(-1410^0)$

.8 $\tan\frac{19\pi}{3}$

.9 $\sin(-\frac{11\pi}{3})$

.10 $\cot(-\frac{15\pi}{4})$

© NCERT not to be republished

## 3.4 دوزاویوں کے جوڑ اورفرق کے ٹرگنومیٹرک تفاعلات

## (Trigonometric Functions of Sum and Difference of Two Angles)

اس حصہ (سیکشن) میں ہم دو اعداد (زاویوں) کے جوڑ اور فرق اور ان سے ملتی جلتی (مبنی) عبارتوں کے لیے ٹرگنومیٹرک تفاعلات کے لیے عبارتیں نکالیں گے۔اس بابت میں بنیادی نتیجوں کوٹرگنومیٹرک مماثلت کہا جاتا ہے۔ہم دیکھ چکے ہیں کہ۔

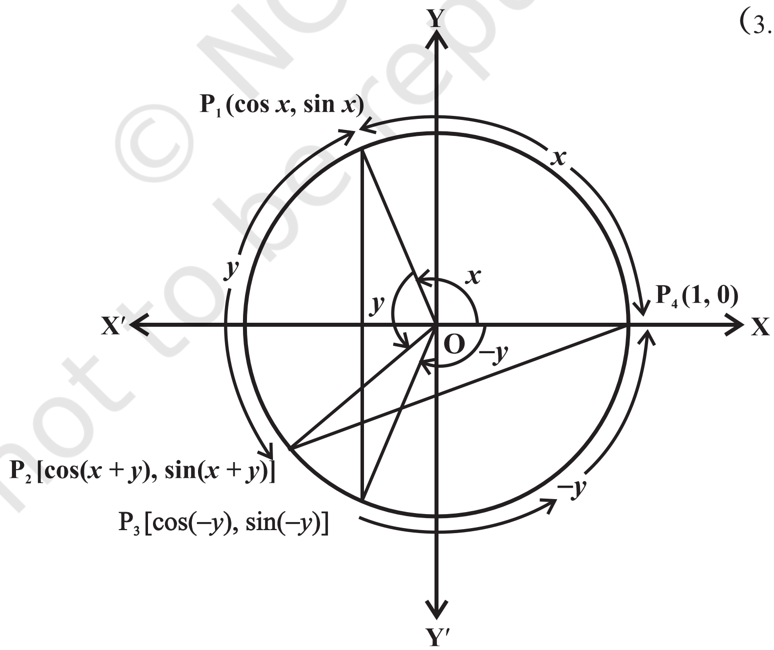
.1 $\sin(-x) = -\sin x$

.2 $\cos(-x) = \cos x$

اب ہم کچھ اور نتائج ثابت کریں گے:

.3 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

ایک اکائی دائرہ لیجئے جس کا مرکز مبدا پر واقع ہو۔مان لیجئے زاویہ $P_4OP_1$ ، x ہے اور زاویہ $P_1OP_2$ y ہے تب $(x + y)$ زاویہ $P_4OP_2$ ہے ساتھ ہی مان لیجئے $(-y)$ زاویہ $P_4OP_3$ ہے اس لیے $P_1$ ، $P_2$ ، $P_3$ اور $P_4$ کے مختص $P_1(\cos x, \sin x)$ ، $P_2[\cos(x + y), \sin(x+y)]$ ، $P_3[\cos(-x), \sin(-x)]$ اور $P_4(1,0)$ ہونگے ۔ (شکل 3.14)




شکل 3.14

© NCERT not to be republished

مثلث $P_1OP_3$ اور $P_2OP_4$ پر غور کیجئے۔ دونوں متماثل ہیں (کیوں؟)۔اس لیے $P_1P_3$ اور $P_2P_4$ برابر ہیں۔ فاصلہ کا فارمولہ (ضابطہ) استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$P_1P_3^2 = [\cos x - \cos(-y)]^2 + [\sin x - \sin(-y)]^2$$

$$= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$$

$$= \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x \cos y + \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y$$

$$P_1P_3 = 2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) \text{ (کیونکہ؟)}$$

یہ بھی، $$P_2P_4^2 = [1 - \cos(x+y)]^2 + [0 - \sin(x+y)]^2$$

$$= 1 - 2\cos(x+y) + \cos^2(x+y) + \sin^2(x+y)$$

$$= 2 - 2\cos(x+y)$$

کیونکہ $$P_1P_3 = P_2P_4, \textit{ we have } P_1P_3^2 = P_2P_4^2$$

اس لیے $$2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2 - 2\cos(x+y)$$

اس لیے $$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

4. $$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

مماثلت 3 میں y کو -y سے تبدیل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\cos[(x+(-y)] = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

5. $$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

اگر ہم x کی جگہ $\frac{\pi}{2}$ رکھیں اور y کی جگہ x اکائی (4) میں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x$$

© NCERT not to be republished

.6 $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

مماثلت 5 استعمال کرنے پر ہمارے پاس ہے۔

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos x$$

.7 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\sin(x + y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x + y)\right) = \cos\left((\frac{\pi}{2} - x) - y\right)$$

$$= \cos(\frac{\pi}{2} - x)\cos y + \sin(\frac{\pi}{2} - x)\sin y$$

$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

.8 $= \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

اگر ہم مماثلت 7 میں $y$ کو $-y$ سے تبدیل کر دیں تو، ہمیں نتیجہ مل جاتا ہے۔

.9 متماثلات 3،4،7 اور 8 میں x کی مناسب قدریں (قیمتیں) لینے پر ہم ذیل نتیجوں پر پہنچتے ہیں۔

$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ $\quad$ $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\quad$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\quad$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\sin(2\pi - x) = -\sin x$ $\quad$ $\cos(2\pi - x) = \cos x$

$\sin x$ اور $\cos x$ کے نتیجوں سے ہم $\tan x$ ، $\cot x$ ، $\sec x$ اور $\operatorname{cosec} x$ کے مشابہ نتائج نکال سکتے ہیں۔

.10 اگر x، y اور (x+y) میں سے کوئی سا بھی زاویہ $\frac{\pi}{2}$ کا طاق ضریب نہیں ہے، تو

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

کیونکہ x، y اور (x+y) میں سے کوئی بھی $\frac{\pi}{2}$ کا طاق ضریب نہیں ہے۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ $\cos x$ ، $\cos y$ اور

© NCERT not to be republished

$\cos(x+y)$ صفرنہیں ہیں۔اب

$$\tan(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$

$$=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}$$

شمارکنندہ اورنسبت نماں دونوں کو $\cos x\cos y$ سے تقسیم کرنے پر

$$\tan(x+y)=\frac{\dfrac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}+\dfrac{\cos x\sin y}{\text{s o n }x\text{ s as}y}}{\dfrac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}-\dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}$$

$$=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

**.11** $$\mathbf{\tan(x-y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}}$$

اگرہم متماثل 10 میں $y$ کو $-y$ سے تبدیل کریں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\tan(x-y)=\tan[x+(-y)]$$

$$=\frac{\tan x+\tan(-y)}{1-\tan x\tan(-y)}=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$$

**.12** اگرکوئی بھی زاویہ $x$، $y$ $(x+y)$ $\pi$ کا ضریب نہیں ہے،تو

$$\mathbf{\cot(x+y)=\frac{\cot x\cot y-1}{\cot y+\cot x}}$$

کیونکہ $x$، $y$ اور $(x+y)$ میں سے کوئی بھی $\pi$ کا ضریب نہیں ہے،ہم یہ نکال تے ہیں کہ $\sin x$، $\sin y$ اور $\sin(x+y)$ غیرصفر ہیں۔اب

$$\cot(x+y)=\frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)}$$

$$\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\sin x\cos y+\cos x\sin y}$$

شمارکنندہ اورنسبت نماں کو $\sin x\sin y$ سے تقسیم کرنے پر ہمارے پاس ہے

© NCERT not to be republished

$$\cot(x+y)=\frac{\cot x\cot y-1}{\cot y+\cot x}$$

**.13** $$\cot(x-y)=\frac{\cot x\cot y+1}{\cot y-\cot x}$$

اگر متماثل 12 میں ہم y کی y- رکھیں تو ہم نتیجہ پر پہنچ جاتے ہیں۔

**.14** $$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x \text{ or } 2\cos^2 x=1+\cos 2x$$

ساتھ ہی $$\cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

ہمارے پاس ہے $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}$$

ہر ایک رکن کو $\cos^2 x$ سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

ہم جانتے ہیں کہ $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

y کی جگہ x رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin x^2=2\cos^2 x-1$$

$$=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=2\cos^2-1$$

دوبارہ $$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$=1-\sin^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$$

**.15** $$\sin 2x=2\sin x\cos x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

ہمارے پاس ہے۔

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

y کی جگہ x رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

© NCERT not to be republished

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

دوبارہ
$$\sin 2x = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 + \sin^2 x}$$

ہر رکن کو $\cos^2 x$ سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

**.16** $$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}$$

y کی جگہ x رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

**.17** $$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

ہمارے پاس ہے

$$\sin 3x = \sin(2x+x)$$

$$= \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x$$

$$= 2\sin x\cos x\cos x + (1-2\sin^2 x)\sin x$$

$$= 2\sin x(1-\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x$$

$$= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x$$

$$= 3\sin x - 4\sin^3 x$$

**.18** $$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

ہمارے پاس ہے

$$\cos 3x = \cos(2x+x)$$

© NCERT not to be republished

$$= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x$$

$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x)$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

**.19** $$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

ہمارے پاس ہے $\tan 3x = \tan(2x + x)$

$$= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - 3\tan 2x \tan x} = \frac{\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} + \tan x}{1 - \frac{2\tan x \tan x}{1 - \tan^2 x}}$$

$$= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

**.20** (i) $$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

(ii) $$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

(iii) $$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

(iv) $$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \text{(1)...}$$

اور
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad \text{(2)...}$$

(1) اور (2) کو جمع کرنے اور گھٹانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x \cos y \quad \text{(3)...}$$

اور $\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y$ (4)...

اس کے آگے $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ (5)...

اور $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$ (6)...

(5) اور (6) جمع کرنے اور گھٹانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y \quad (7)...$$

$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y \quad (8)...$$

مان لیجئے $x+y=\theta$ اور $x-y=\phi$ ہے اس لیے۔

$$x=\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) \text{ اور } y=\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

x اور y کی قیمتیں (3)، (4)، (7)، (8)، میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\cos\theta+\cos\phi=2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta-\cos\phi=-2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta+\sin\phi=2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta-\sin\phi=2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

کیونکہ $\theta$ اور $\phi$ کی کوئی بھی حقیقی قدریں ہوسکتی ہیں اس لئے ہم $\theta$ کی جگہ x اور $\phi$ کی جگہ y لکھ سکتے ہیں۔

اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

© NCERT not to be republished

**ریمارک** متماثلات 20 میں دیئے گئے حصہ کے طور پر ہم نے مندرجہ ذیل نتیجے ثابت کیے ہیں۔

**.21** (i) $2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$

(ii) $-2\sin x \sin y = \cos(x+y) - \cos(x-y)$

(iii) $2\sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$

(iv) $2\cos x \sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$

**مثال 10** ثابت کیجئے کہ

$$3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4} = 1$$

**حل** ہمارے پاس ہے

$$\text{L.H.S.} = 3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}$$

$$= 3\times\frac{1}{2}\times 2 - 4\sin\left(\pi \frac{\pi}{6}\right)\times 1 = 3 - 4\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 3 - 4\times\frac{1}{2} = 1 = \text{R.H.S.}$$

**مثال 11** $\sin 15^\circ$ کی قدر معلوم کیجئے۔

**حل** ہمارے پاس ہے

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

**مثال 12** $\frac{13\pi}{12}$ کی قدر معلوم کیجئے۔

**حل** ہمارے پاس ہے

© NCERT not to be republished

$$\tan\frac{13\pi}{12}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)=\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$$

**مثال 13** ثابت کیجیے

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}$$

**حل** ہمارے پاس ہے

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\cos y-\cos x\sin y}$$

شمارکنندہ اور نسب نماں کو $\cos x\cos y$ سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}$$

**مثال 14** ثابت کیجیے

$$\tan 3x\tan 2x\tan x=\tan 3x-\tan 2x-\tan x$$

**حل** ہم جانتے ہیں کہ $3x=2x+x$

اس لیے، $\tan 3x=\tan(2x+x)$

یا $\tan 3x=\dfrac{\tan 2x+\tan x}{1-\tan 2x\tan x}$

یا $\tan 3x-\tan 3x\tan 2x\tan x=\tan 2x+\tan x$

یا $\tan 3x-\tan 2x-\tan x=\tan 3x\tan 2x\tan x$

یا $\tan 3x\tan 2x\tan x=\tan 3x-\tan 2x-\tan x$

**مثال 15** ثابت کیجیے کہ $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos x$

© NCERT not to be republished

**حل** اکائی 20(i) استعمال کرنے پر، ہمارے پاس ہے۔

$$\text{L.H.S.} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x-(\frac{\pi}{4}-x)}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos x = 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sqrt{2}\cos x = \text{R.H.S.}$$

**مثال 16** ثابت کیجئے کہ $\dfrac{\cos 7x+\cos 5x}{\sin 7x-\sin 5x} = \cot x$

**حل** اکائی 20(i) اور 20(iv) استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{L.H.S.} \quad \frac{2\cos\frac{7x+5x}{2}\cos\frac{7x-5x}{2}}{2\cos\frac{7x+5x}{2}\sin\frac{7x-5x}{2}} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \text{R.H.S.}$$

**مثال 17** ثابت کیجئے کہ $\dfrac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x} = \tan x$

**حل** ہمارے پاس ہے

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x} = \frac{\sin 5x+\sin x-2\sin 3x}{\cos 5x-\cos x}$$

$$= \frac{2\sin 3x\cos 2x-2\sin 3x}{2\sin 3x\sin 2x} = \frac{\sin 3x(\cos 2x-1)}{\sin 3x\sin 2x}$$

$$= \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \tan x = \text{R.H.S.}$$

## مشق 3.3

ثابت کیجئے کہ:

1. $\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}-\tan^2\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$

© NCERT not to be republished

.2 $2\sin^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$

.3 $\cot^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{6}+\tan^2\frac{\pi}{6}=6$

.4 $2\sin^2\frac{3\pi}{4}+2\cos^2\frac{\pi}{4}+\sec^2\frac{\pi}{3}=10$

.5 قدر معلوم کیجیے:

(i) $\sin 75^0$ (ii) $\tan 15^0$

.6 مندرجہ ذیل کو ثابت کیجیے:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sin(x+y)$$

.7 $$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$$

.8 $$\frac{\cos(\pi+y)\cos(-x)}{\sin(\pi-x\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\cot^2 x$$

.9 $$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos(2\pi+x)\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cot(2\pi+x)\right]=1$$

.10 $\sin(n+1)x\sin(n+2)x+\cos(n+1)x\cos(n+2)x=\cos x$

.11 $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{2}\sin x$

.12 $\sin^2 6x-\sin^2 4x=\sin 2x\sin 10x$

.13 $\cos^2 2x-\cos^2 6x=\sin 4x\sin 8x$

.14 $\sin 2x+2\sin 4x+\sin 6x=4\cos^2 x\sin 4x$

.15 $\cot 4x(\sin 5x+\sin 3x)=\cot x(\sin 5x-\sin 3x)$

© NCERT not to be republished

16. $\dfrac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x} = -\dfrac{\sin 2x}{\cos 10x}$

17. $\dfrac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4x$

18. $\dfrac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan \dfrac{x-y}{2}$

19. $\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan 2x$

20. $\dfrac{\sin x - \sin 3x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = 2\sin x$

21. $\dfrac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x$

22. $\cot x \cot 2x - \cot 2x \cot 3x - \cot 3x \cot x = 1$

23. $\tan 4x = \dfrac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x + \tan^4 x}$

24. $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

25. $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$

## 3.5 ٹرگنومیٹریائی مساواتیں (Trigonometric Equations)

ایسی مساواتیں جن میں متغیر (variable) کے ٹرگنومیٹریائی تفاعل شامل ہوں ٹرگنومیٹریائی مساواتیں کہلاتی ہیں۔ اس سیکشن میں ہم اسطرح کی مساوات کا حل معلوم کریں گے۔ ہم پہلے ہی پڑھ چکے ہیں کہ $\sin x$ اور $\cos x$ کی قدریں وقفہ $2\pi$ کے بعد دہرائی جاتی ہیں اور $\tan x$ کی قدر وقفہ $\pi$ کے بعد دہرائی جاتی ہے۔ مساوات کے حل $0 \leq x < 2\pi$ کے لیے پرنسپل حل کہلاتے ہیں۔ جو عبارت صحیح عدد $n$ پر مبنی ہوا ور ٹرگنو میٹریائی مساوات کے تمام حل دے اسے عمومی حل (general solution) کہتے ہیں ہم لفظ Z کا استعمال صحیح اعداد کے لیے کریں گے۔

مندرجہ ذیل مساواتیں ٹرگنومیٹریائی مساواتوں کو حل کرنے میں سودگار ثابت ہوں گی۔

**مثال 18** مساوات $\sin x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ کے پرنسپل حل معلوم کے لیے۔

**حل** ہم جانتے ہیں کہ $\sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ اور $\sin \dfrac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

اس لیے $\dfrac{\pi}{3}$ اور $x = \dfrac{2\pi}{3}$ اس مساوات کے پرنسپل حل ہیں۔

**مثال 19** مساوات $\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ کے پرنسپل حل معلوم کیجیے۔

**حل** ہم جانتے ہیں کہ $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ اس لیے $\tan(\pi-\frac{\pi}{6})=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

اور $\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

اس لیے $\tan\frac{5\pi}{6}=\tan\frac{11\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

اس لیے $\frac{5\pi}{6}$ اور $\frac{11\pi}{6}$ پرنسپل حل ہیں۔

اب ہم ٹرگنومیٹریائی مساواتوں کا عام حل معلوم کریں گے۔ ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ:

$\sin x=0$ دیتا ہے $x=n\pi$ جہاں $n\in\mathbf{Z}$

$\cos x=0$ دیتا ہے $x=(2n+1)0\frac{\pi}{2}$ جہاں $n\in\mathbf{Z}$

اب ہم مندرجہ ذیل نتائج کو ثابت کریں گے۔

**مسئلہ 1** کوئی بھی x اور y حقیقی اعداد کے لیے۔

$$\sin x=\sin y \quad implies\ x=n\pi+(-1)^n y,\ where\ n\in\mathbf{Z}$$

**ثبوت** اگر $\sin x=\sin y$ تب

$\sin x-\sin y=0$ یا $2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=0$

جو دیتا ہے $\cos\frac{x+y}{2}=0$ یا $\sin\frac{x-y}{2}=0$

اس لیے $\frac{x+y}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{x-y}{2}=n\pi$ جہاں $n\in\mathbf{Z}$

$x=2(n\pi+y+1)\pi-y$ یا $x=2n\pi+y$ جہاں $n\in\mathbf{Z}$

اس لیے $x=(2n+1)\pi+(-1)^{2n-1}y$ یا $x=2n\pi+(-1)^{2n}$ جہاں $n\in\mathbf{Z}$

ان دونوں نتائج کو ساتھ ملانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x=n\pi+(-1)^n y \text{ جہاں } n\in Z$$

© NCERT not to be republished

**مسئلہ 2** کن ہی حقیقی اعداد x اور y کے لیے $\cos x = \cos y$ مطلب ہے $x = 2n\pi \pm y$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$

**ثبوت** اگر $\cos x = \cos y$ تب

$$\cos x - \cos y = 0 \quad i.e. \quad -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$$

اس لیے $\sin\frac{x+y}{2} = 0$ یا $\sin\frac{x-y}{2} = 0$

اس لیے $\frac{x+y}{2} = n\pi$ یا $\frac{x-y}{2} = n\pi$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$

یعنی $x = 2n\pi - y$ یا $x = 2n\pi + y$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$

اس لیے $x = 2n\pi \pm y$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$

**مسئلہ 3** ثابت کیجئے کہ اگر x اور y، $\frac{\pi}{2}$ کے ناطق ضریب نہیں ہیں تو $\tan x = \tan y$ کا مطلب ہے

$x = 2n\pi \pm y$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$

**ثبوت** اگر $\tan x = \tan y$ تب

$\tan x - \tan y = 0$

یعنی $\sin x \cos y - socx \sin y$

جو دیتا ہے $\sin(x-y) = 0$ (کیونکہ؟)

اس لیے $x - y = n\pi$ اس کا مطلب ہے $x = n\pi + y$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$

**مثال 20** $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ کا حل معلوم کیجئے۔

**حل** ہمارے پاس ہے $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}$

اس لیے $\sin x = \sin\frac{4\pi}{3}$ جو دیتا ہے۔

$x = n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3}$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$

© NCERT not to be republished

**نوٹ** $x$ کی $\frac{4\pi}{3}$ ایک ایسی قدر جس کے لیے $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہے۔ x کی ایک دوسری قدر بھی لی جاسکتی ہے جس کے لیے $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہو۔ اسطرح حاصل ہوئے حل یکساں ہوں گے جبکہ یہ دکھائی دینے میں الگ الگ ہیں۔

**مثال 21** $\cos x = \frac{1}{2}$ کو حل کیجیے۔

**حل** ہمارے پاس ہے $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

اس لیے $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ جہاں $n \in Z$

**مثال 22** $\tan 2x = -\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ کو حل کیجیے۔

**حل** ہمارے پاس ہے $\tan 2x = -\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}+x+\frac{\pi}{3}\right)$

یا $\tan 2x = \tan\left(x+\frac{5\pi}{5}\right)$

اس لیے $2x = n\pi + x + \frac{5\pi}{5}$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$

یا $x = n\pi + \frac{5\pi}{5}$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$

**مثال 23** $\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0$ کو حل کیجیے۔

**حل** مساوات کو اسطرح لکھا جاسکتا ہے:

$$\sin 6x + \sin 2x - \sin 4x = 0$$

یا $2\sin 4x \cos 2x - \sin 4x = 0$

ie $\sin 4x(2\cos 2x - 1) = 0$

اس لیے $\sin 4x = 0$ یا $\cos 2x = \frac{1}{2}$

© NCERT not to be republished

ie $\sin 4x = 0$ یا $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

اس لیے $4x = n\pi$ یا $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$

ie $x = \frac{n\pi}{4}$ یا $x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$

**مثال 24** $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ کو حل کیجیے۔

**حل** مساوات کو اسطرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$2(1-\sin^2 x) + 3\sin x = 0$$

یا $$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$$

یا $$(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

اس لیے $\sin x = -\frac{1}{2}$ یا $\sin x = 2$

لیکن $\sin x = 2$ ممکن نہیں ہے (کیوں؟)

اس لیے $$\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6}$$

اس لیے حل اسطرح دیا گیا ہے۔

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$

## مشق 3.4

ذیل مساواتوں کے صدر (Principal) اور عمومی (General) حل معلوم کیجیے۔

.1 $\tan x = \sqrt{3}$     .2 $\sec x = 2$

.3 $\cot x = -\sqrt{3}$     .4 $\operatorname{cosec} x = -2$

ذیل میں دی گئی ہر ایک مساواتوں کے مجموعی حل معلوم کیجیے۔

.5 $\cos 4x = \cos 2x$     .6 $\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$

© NCERT not to be republished

.7 $\sin 2x + \cos x = 0$ .8 $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

.9 $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

## متفرق مثالیں

**مثال 25** اگر $\sin x = \frac{3}{5}$ ، $\cos y = \frac{12}{13}$ جہاں x اور y دونوں دوسرے ربع میں واقع ہیں $\sin(x+y)$ کی قدر معلوم کیجیے۔

**حل** ہم جانتے ہیں کہ

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

اب $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

اس لیے $\cos x = 1 \pm \frac{4}{5}$

کیونکہ x دوسرے ربع میں ہے اس لیے cos x منفی ہے۔

اس لیے $\cos x = -\frac{4}{5}$

اب $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

یعنی $\sin y = \pm\frac{5}{13}$

کیونکہ y دوسرے ربع میں موجود ہے، siny مثبت ہے۔ اس لیے $\sin y = \frac{5}{13}$ اور cosy کی قیمتیں مساوات (i) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sin(x+y = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{5}{13} \quad = \frac{36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$$

**مثال 26** ثابت کیجیے کہ

$$Cos2xCos\frac{x}{2} - Cos3xCos\frac{9x}{2} = SinxSin\frac{5x}{2}$$

© NCERT not to be republished

**حل** ہمارے پاس ہے۔

$$\text{L.H.S} = \frac{1}{2}\left[2Cos2xCos\frac{x}{2} - 2Cos\frac{9x}{2}Cos3x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[Cos\left(2x+\frac{x}{2}\right) - Cos\left(2x-\frac{x}{2}\right) - Cos\left(\frac{9x}{2}+3x\right) - Cos\left(\frac{9x}{2}-3x\right)\right]$$

$$\left[Cos\frac{5x}{2} + Cos\frac{3x}{2} - Cos\frac{15x}{2} - Cos\frac{3x}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[Cos\frac{5x}{2} - Cos\frac{15x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}+\frac{15x}{2}}{2}\right\}Sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}-\frac{15x}{2}}{2}\right\}\right]$$

$$= -Sin5xSin\left(-\frac{5x}{2}\right) = Sin5xSin\frac{5x}{2} = \text{R.H.S}$$

**مثال 27** $\text{Tan}\frac{\pi}{8}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

**حل** مان لیجئے $X = \frac{\pi}{8}$ تب $2X = \frac{\pi}{4}$

اب $\text{Tan}2x = \frac{2Tanx}{1-\text{Tan}^2 x}$

یا $\text{Tan}\frac{\pi}{4} = \frac{2Tan\frac{\pi}{8}}{1-\text{Tan}^2\frac{\pi}{8}}$

مان لیجئے $y = Tan\frac{\pi}{8}$ تب $1 = \frac{2y}{1-y^2}$

یا $y^2 + 2y - 1 = 0$

اس لیے $y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

کیونکہ $\frac{\pi}{8}$ پہلے ربع میں موجود ہے اس لیے $y = Tan\frac{\pi}{8}$ مثبت ہے۔

© NCERT not to be republished

اس لیے $Tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

**مثال 28** اگر $Tanx=\frac{3}{4}$ ، $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ ، $Sin\frac{x}{2}$ ، $Cos\frac{x}{2}$ اور $Tan\frac{x}{2}$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

**حل** کیونکہ $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ ، $Cosx$ منفی ہے۔

ساتھ ہی $\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{2}$

اس لیے $Sin\frac{x}{2}$ بھی مثبت ہوگا اور $Cos\frac{x}{2}$ منفی ہے

اب $Sec^2x=1+Tan^2x=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$

اس لیے $Cos^2x=\frac{16}{25}$ یا $Cosx=-\frac{4}{5}$ (کیونکہ؟)

اب $2Sin^2\frac{x}{2}=1-Cosx=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$

اس لیے $2Sin^2\frac{x}{2}=\frac{9}{10}$

یا $Sin\frac{x}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$ (کیونکہ؟)

دوبارہ $2Cos^2\frac{x}{2}=1+Cosx=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

اس لیے $Cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{10}$

یا $Cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$ کیوں؟

اس لیے $Tan\frac{x}{2}=\frac{Sin\frac{x}{2}}{Cos\frac{x}{2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}\times\left(\frac{-\sqrt{10}}{1}\right)=-3$

**مثال 29** ثابت کیجیے کہ $Cos^2x+Cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+Cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$

© NCERT not to be republished

**حل** ہمارے پاس ہے۔

$$\text{L. H. S} = \frac{1+Cos2x}{2} + \frac{1+Cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2} + \frac{1+Cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+Cos2x+Cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+Cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+Cos2x+2Cos2xCos\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+Cos2x+2Cos2xCos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+Cos2x+2Cos2xCos\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+Cos2x+2Cos2x\right] = \frac{3}{2} \quad \text{R.H.S}$$

## متفرق مشق باب 3

ثابت کیجئے کہ:

.1 $2Cos\frac{\pi}{13}Cos\frac{9\pi}{13}+Cos\frac{3\pi}{13}+Cos\frac{5\pi}{13}=0$

.2 $(Sin3x+Sinx)Sinx+(Cos3x-Cosx)Cosx=0$

.3 $(Cosx+Cosy)^2+(Sinx-Siny)^2=4Cos^2\frac{x+y}{2}$

.4 $(Cosx-Cosy)^2+(Sinx-Siny)^2=4Sin^2\frac{x-y}{2}$

.5 $Sinx+Sin3x+Sin5x+Sin7x=4CosxCos2xSin4x$

.6 $\frac{(Sin7x+Sin5x)+(Sin9x+Sin3x)}{(Cos7x+Cos5x)+(Cos9x+Cos3x)}=Tan6x$

.7 $Sin3x+Sin2x-Sinx=4SinxCos\frac{x}{2}Cos\frac{3x}{2}$

© NCERT not to be republished

$Sin\frac{x}{2}$ ، $Cos\frac{x}{2}$ اور $Tan\frac{x}{2}$ کی قیمتیں ذیل میں معلوم کیجئے۔

.8 $Tanx = -\frac{4}{3}$ x دوسرے ربع میں ہے۔

.9 $Cosx = -\frac{1}{3}$ x تیسرے ربع میں ہے۔

.10 $Sinx = \frac{1}{4}$ x دوسرے ربع میں ہے۔

## خلاصہ (Summary)

- اگر ایک قوس جسکی لمبائی l ہے ایک دائرہ میں جسکا نصف قطر r ہے θ ریڈین کا زاویہ بناتا ہے۔ تو $l = r\theta$
- ریڈین پیمائش $\times \frac{\pi}{180}$ ڈگری پیمائش
- ڈگری پیمائش $\times \frac{\pi}{180}$ ریڈین پیمائش
- $\text{Cos}^2 x + \text{Sin}^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \text{Sec}^2 x$
- $1 + \text{Cot}^2 x = \text{Cosec}^2 x$
- $\text{Cos}(2n\pi + x) = \text{Cos}x$
- $\text{Sin}(2n\pi + x) = \text{Sin}x$
- $\text{Sin}(-x) = -\text{Sin}x$
- $\text{Cos}(-x) = \text{Cos}x$
- $\text{Cos}(x + y) = \text{Cos}x\text{Cos}y - \text{Sin}x\text{Sin}y$
- $\text{Cos}(x - y) = \text{Cos}x\text{Cos}y + \text{Sin}x\text{Sin}y$
- $\text{Cos}(\frac{\pi}{2} - x) = \text{Sin}x$
- $\text{Sin}(\frac{\pi}{2} - x) = \text{Cos}x$

© NCERT not to be republished

- $\text{Sin}(x+y) = \text{Sin}x\text{Cos}y + \text{Cos}x\text{Sin}y$
- $\text{Sin}(x-y) = \text{Sin}x\text{Cos}y - \text{Cos}x\text{Sin}y$
- $\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\text{Sin}x \qquad \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \text{Cos}x$

  $\text{Cos}(\pi-x) = -\text{Cos}x \qquad \text{Sin}(\pi-x) = \text{Sin}x$

  $\text{Cos}(\pi+x) = -\text{Cos}x \qquad \text{Sin}(\pi+x) = -\text{Sin}x$

  $\text{Cos}(2\pi-x) = \text{Cos}x \qquad \text{Sin}(2\pi-x) = -\text{Sin}x$
- اگر کسی بھی زاویہ $x$، $y$ اور $(x \pm y)$، $\frac{\pi}{2}$ کے طاق ضرب نہیں ہیں، تب

  $$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
- $$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$
- اگر کسی بھی زاویہ $x$، $y$ اور $(x \pm y)$، $\pi$ کے ضرب نہیں ہیں، تب

  $$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$
- $$\cot(x-y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$$
- $$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$
- $$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$
- $$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$
- $$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$
- $$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
- $$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

© NCERT not to be republished

- (i) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

  (ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

  (iii) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

  (iv) $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

- (i) $2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$

  (ii) $-2\sin x\sin y = \cos(x+y) - \cos(x-y)$

  (iii) $2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$

  (iv) $2\cos x\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$

- $\sin x = 0$ دیتا ہے $x = n\pi$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$
- $\cos x = 0$ دیتا ہے $x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$
- $\sin x = \sin y$ کا مطلب ہے $x = n\pi + (-1)^n y$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$
- $\cos x = \cos y$ کا مطلب ہے $x = 2n\pi \pm y$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$
- $\tan x = \tan y$ کا مطلب ہے $x = 2n\pi + y$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$

## تاریخ کے اوراق سے

ٹرگنومیٹری کی تعلیم پہلے ہندوستان میں شروع ہوئی تھی۔ قدیمی ہندوستانی ریاضی داں آریہ بھٹ (476) برہم گپتا (598AD) بھاسکر (600AD) اور بھاسکر II (1114 AD) کو اہم نتائج ملے۔ یہ تمام معلومات پہلے ہندوستان سے مدیھہ ایشیا اور پھر وہاں سے یورپ کی طرف گئی۔ یونانی بھی ٹرگنومیٹری کی تعلیم شروع کر چکے تھے لیکن ان کا راستہ اناڑی پن (بغیر سوچ سمجھے آگے بڑھنے) کا تھا کہ جب ہندوستانی کھوج سب کو معلوم ہوئی، تب ہی دنیا میں سب نے اسے اپنا لیا۔

© NCERT not to be republished

ہندوستان میں جدید ٹرگنو میٹریائی تفاعل کا پیش رو جو زاویہ کے sine کہلا تے تھے اور Sine تفاعل (Sine function) کا آغاز اجرام فلکی کے لئے ایک عظیم دین ہے اور ریاضی کی تاریخ ہے۔

بھاسکرا I، (600AD کے قریب) نے سائن تفاعل کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے ضابطہ (Formulas) دیئے جہاں زاویہ $90^0$ سے زیادہ ہوں۔ سولھویں صدی میں Malaylam کام جو Yuktibhasa کہلاتا ہے میں (A+B)، sine کے پھیلاؤ کا ثبوت ہے۔ Sines اور Cosines کی درست عبارت $18^0$، $36^0$، $54^0$، $72^0$ وغیرہ بھاسکر II نے دی ہے۔

$\sin^{-1} x$، $\cos^{-1} x$ وغیرہ کی علامتیں قوس Sinx قوس Cosx وغیرہ کے ماہر فلکیات Sir John F.W. نے تجویز کیں۔ Thales کا نام (600 B.C کے قریب) مستقبل (یکساں) طور پر اونچائی اور فاصلے کے مسائل کے ساتھ جڑا ہے۔ اسے اس بات کا شرف حاصل ہے اس نے مصر کے حرم (Pysamid) کی اونچائی حرم کے عکس کے اونچائی کی مدد سے معلوم کی جو ایک امدادی عملہ (Staff) جسکی اونچائی پہلے سے ہی معلوم تھی ان دونوں کی نسبت کا موازنہ کیا۔

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{(sun's attitude)}$$

tan= (سورج کی شعاعوں کا سطح سمندر سے زاویہ)

کہا جاتا ہے کہ Thales نے ایک کشتی کا فاصلہ سطح سمندر پر نکالا تھا جو اس نے یکساں مثلثوں کے ضلعوں کی نسبت کا استعمال کر کے کیا۔ یکساں خصوصیت کا استعمال اونچائی اور فاصلہ کے مسئلہ پر قدیم ہندوستانی کاموں میں پایا جاتا ہے۔

© NCERT not to be republished