

پچیدہ اعداد اور دو درجی مساواتیں COMPLEX NUMBERS AND QUADRATIC EQUATIONS

❖ ریاضی سائنس کی ملکہ ہے اور حساب ریاضی کی

ملکہ ہے (GUASS) ❖

5.1 تعارف (Introduction)



ڈبلیو۔ آر۔ ہیملٹن
(1805-1865)

پچھلی جماعتوں میں ہم نے ایک اور دو Variable والی خطی مساواتیں اور ایک (variable) میں دو درجی مساواتوں کا مطالعہ کیا ہے۔ ہم نے یہ دیکھا ہے کہ مساوات $x^2 + 1 = 0$ کا کوئی حقیقی حل نہیں ہے کیونکہ $x^2 + 1 = 0$ سے ہمیں $x^2 = -1$ حاصل ہوتا ہے اور تمام حقیقی اعداد کا مربع مثبت ہوتا ہے۔ اس لیے ہمیں حقیقی اعداد کے نظام کو ایک بڑے نظام میں بڑھانے کی ضرورت ہے تاکہ ہم $x^2 = -1$ مساوات کا حل نکال سکیں۔ حقیقت میں ہمارا اصل مقصد ہے $ax^2 + bx + c = 0$ مساوات کو حل کرنا جہاں $D = b^2 - 4ac < 0$ ہو، جو کہ حقیقی اعداد کے نظام میں ممکن نہیں ہے۔

5.2 پیچیدہ اعداد (Complex Numbers)

مان لیجئے ہم $\sqrt{-1}$ کو علامت i سے ظاہر کرتے ہیں۔ تب ہمارے پاس ہے $i^2 = -1$ ۔ اس کا مطلب ہے i مساوات $x^2 + 1 = 0$ کا حل ہے۔

$(a + ib)$ کی شکل کا نمبر جہاں a اور b حقیقی اعداد ہیں پیچیدہ عدد کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر $2 + i3$ ، $(-1) + i\sqrt{3}$ ،

$$4 + i \left(\frac{-1}{11} \right)$$

پیچیدہ عدد $z = a + ib$ میں a حقیقی حصہ کہلاتا ہے اور اسے $\text{Re } z$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور b تصوری (خیالی) حصہ کہلاتا ہے اور اسے $\text{Im } z$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر $z = 2 + i5$ ہو تو $\text{Re } z = 2$ اور $\text{Im } z = 5$ ہوگا۔

دو پیچیدہ اعداد $z_1 = a + ib$ اور $z_2 = c + id$ اس وقت برابر ہوں گے جب $a = c$ اور $b = d$ ہوگا۔

مثال 1 اگر $4x + i(3x - y) = 3 + i(-6)$ جہاں x اور y حقیقی اعداد ہیں تو x اور y کی قیمت معلوم کرو۔

حل ہمارے پاس ہے $4x + i(3x - y) = 3 + i(-6)$

حقیقی اور خیالی حصوں کو برابر کرنے پر ہمیں ملتا ہے $4x = 3, 3x - y = -6$

جس کو حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے $x = \frac{3}{4}$ اور $y = \frac{33}{4}$

5.3 پیچیدہ اعداد کا الجبرا (Algebra of Complex Numbers)

اس سیکشن میں ہم پیچیدہ اعداد کے الجبرا کو واضح (develop) کریں گے۔

5.3.1 دو پیچیدہ اعداد کا جوڑ (Addition of two complex number) مان لیجئے $z_1 = a + ib$

اور $z_2 = c + id$ کوئی دو پیچیدہ اعداد ہیں۔ تب $z_1 + z_2$ کا جوڑ اس طرح دکھایا جائے گا۔ $(a + b) + i(b + d)$

$z_1 + z_2 =$ جو کہ پھر ایک پیچیدہ عدد ہے۔

مثال کے طور پر $(2 + i3) + (-6 + i5) = (2 - 6) + i(3 + 5) = -4 + i8$

پیچیدہ اعداد کا جوڑ مندرجہ ذیل خصوصیات رکھتا ہے۔ جو ہم بغیر ثابت کئے دے رہے ہیں۔

(i) بندشی قانون (Closure law) دو پیچیدہ اعداد کا جوڑ ایک پیچیدہ عدد ہے، i.e. $z_1 + z_2$ ایک پیچیدہ عدد ہے تمام

z_1, z_2 پیچیدہ اعداد کے لئے۔

(ii) تقابلی قانون (Commutative law) کوئی بھی دو پیچیدہ اعداد z_1 اور z_2 کے لیے

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

(iii) تلازمی قانون (The Associative law) کن ہی یا کسی بھی تین پیچیدہ اعداد z_1, z_2, z_3 کے لیے

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

(iv) جمعی تماشلی کا وجود (The existence of additive identity) ایک پیچیدہ عدد $0 + i0$ (جسے 0 سے ظاہر کرتے ہیں) موجود۔ جسے ہم جمعی تماشلی کہتے ہیں یا صفر پیچیدہ عدد۔ اس طرح ہر پیچیدہ عدد z کے لئے

$$z + 0 = z$$

(v) جمعی معکوس کا وجود (The existence of additive inverse) ہر ایک پیچیدہ عدد

$z = a + ib$ کے لئے ہمارے پاس $-a + i(-b)$ پیچیدہ عدد موجود ہے جسے ہم $(-z)$ سے ظاہر کرتے ہیں، جمعی معکوس یا z کا منفی کہلاتا ہے۔ ہم یہ دیکھتے ہیں کہ $z + (-z) = 0$ (جمعی تماشلی)

5.3.2 (Difference of two complex numbers) دو دیے ہوئے پیچیدہ اعداد z_1 اور z_2 کے لیے

فرق $z_1 - z_2$ کو اس طرح define کیا جاتا ہے۔

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

$$(6 + 3i) - (2 - i) = (6 + 3i) + (-2 + i) = 4 + 4i \quad \text{مثال کے طور پر،}$$

$$(2 - i) - (6 + 3i) = (2 - i) + (-6 - 3i) = -4 - 4i \quad \text{اور}$$

5.3.3 دو پیچیدہ اعداد کی ضرب (Multiplication of two complex numbers) مان لیجئے

$z_1 = a + ib$ اور $z_2 = c + id$ کو بھی دو پیچیدہ اعداد ہیں۔ تب z_1 اور z_2 کی ضرب اس طرح بیان کی جائے گی۔

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$(3 + i5)(2 + i6) = (3 \times 2 - 5 \times 6) + i(3 \times 6 + 5 \times 2) = -24 + i28 \quad \text{مثال کے طور پر}$$

پیچیدہ اعداد کی مندرجہ ذیل خاصیتیں رکھتی ہیں جو ہم بغیر Proof کے نیچے دے رہے ہیں۔

(i) بندشی خاصیت (Closure property) دو پیچیدہ اعداد کا حاصل ضرب ایک پیچیدہ عدد ہے۔ تمام پیچیدہ اعداد z_1

اور z_2 کا ضرب $z_1 z_2$ ایک پیچیدہ عدد ہے۔

(ii) تقابلی قانون (The commutative law) کن ہی دو پیچیدہ اعداد z_1 اور z_2 کے لیے

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

(iii) تلازمی قانون (The associative law) کن ہی تین پیچیدہ اعداد z_3, z_2, z_1 کے لیے

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

(iv) ضربی تماشلی کا وجود (The existence of multiplicative identity) ایک پیچیدہ عدد

$1 + i0$ (1 سے ظاہر ہوتا ہے) وجود میں آتا ہے، ضربی تماشلی کہلاتا ہے، اس طرح $z1 = z$ پر پیچیدہ عدد z کے لئے۔

(v) ضربی معکوس کا وجود (The existence of multiplicative inverse) ہر ایک غیر صفر پیچیدہ عدد

$z = a + ib$ یا $a + bi$ ($a \neq 0, b \neq 0$) کے لئے، ہمارے پاس پیچیدہ عدد ہے $(\frac{1}{z})$ یا z^{-1} سے ظاہر ہوتا ہے) $z, \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}$ کا ضربی معکوس کہلاتا ہے۔ اس طرح $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ (ضربی تماشلی)

(vi) تقسیمی قانون (The distributive law) کنہیں تین پیچیدہ اعداد z_3, z_2, z_1 کے لئے۔

$$z_1 (z_2 z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad (a)$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3 \quad (b)$$

5.3.4 دو پیچیدہ اعداد کی تقسیم (Division of two complex numbers) دیے ہوئے دو پیچیدہ

اعداد z_1 اور z_2 کے لیے جہاں $z_2 \neq 0$ خارج قسمت (the quotient) $\frac{z_1}{z_2}$ اس طرح define کیا گیا ہے

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}$$

مثال کے طور پر مان لیجئے $z_1 = 6 + 3i$ اور $z_2 = 2 - i$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \left((6 + 3i) \times \frac{1}{2 - i} \right) = (6 + 3i) \left(\frac{2}{2^2 + (-1)^2} + i \frac{-(-1)}{2^2 + (-1)^2} \right) \\ &= (6 + 3i) \left(\frac{2 + i}{5} \right) = \frac{1}{5} [12 - 3 + i(6 + 6)] = \frac{1}{5} (9 + 12i) \end{aligned} \quad \text{تب}$$

5.3.5 i کی قوت (Power of i)

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, \quad i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$$

$$i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 i = -i, \quad i^5 = (i^2)^2 = (-1)^2 i = i$$

ساتھ ہی ہمارے پاس ہے

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1, \quad i^{-1} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1, \quad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{1} = i$$

عام طور پر کسی صحیح عدد k کے لیے $i^{4k+3} = -i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k} = 1$

5.3.6 منفی حقیقی عدد کے جزر (The square roots of a negative real number)

نوٹ کر لیجئے کہ $i^2 = -1$ اور $(-i)^2 = i^2 = -1$

اس لیے، -1 کے جزر i اور $-i$ ہیں۔ حالانکہ علامتی طور پر $\sqrt{-1}$ ، اس کا مطلب ہے صرف i ۔

اب ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ i اور $-i$ دونوں مساوات $x^2 + 1 = 0$ یا $x^2 = -1$ کے حل ہیں۔

$$(\sqrt{3}i)^2 = (\sqrt{3})^2 i^2 = 3(-1) = -3, \quad \text{اسی طرح،}$$

$$(-\sqrt{3}i)^2 = (-\sqrt{3})^2 i^2 = -3$$

اس لئے، -3 کے جزر $\sqrt{3}i$ اور $-\sqrt{3}i$ ہیں۔

دوبارہ، علامت $\sqrt{-3}$ کا مطلب ہے صرف $\sqrt{3}i$ کو ظاہر کرنا اس طرح (i.e.) $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \sqrt{-1} = \sqrt{a} i, \quad \text{عام طور پر اگر } a \text{ ایک مثبت حقیقی عدد ہے،}$$

ہم پہلے سے ہی جانتے ہیں کہ $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ تمام مثبت حقیقی اعداد a اور b کے لیے۔ یہ نتیجہ اس وقت بھی

صحیح ہے جب یا تو $a > 0$, $b < 0$ یا $a < 0$, $b > 0$ کیا ہے اگر $a < 0$, $b < 0$ ؟ ہمیں جانچ کرنی چاہئے۔

یہ نوٹ کر لیجئے

$$i^2 = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} \text{ (by assuming } \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \text{ for all real numbers)}$$

$$= \sqrt{1} = 1, \text{ which is a contradiction to the fact the } i^2 = -1$$

اس لیے اگر دونوں a اور b منفی حقیقی اعداد ہیں تو $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$

اس لیے آگے، اگر a اور b صفر ہیں تو صاف طور پر $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} = 0$

5.3.7 تماثلات (identities) ہم ذیل تماثلات ثابت کرتے ہیں

تمام پیچیدہ اعداد z_1 اور z_2 کے لئے۔

ثبوت ہمارے پاس ہے، $(z_1 + z_2)^2 = (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)$

$$= (z_1 + z_2)z_1 + (z_1 + z_2)z_2 \quad (\text{تقسیمی قانون})$$

$$= z_1^2 + z_2z_1 + z_1z_2 + z_2^2 \quad (\text{تقسیمی قانون})$$

$$= z_1^2 + z_1z_2 + z_1z_2 + z_2^2 \quad (\text{ضرب کا تقابلی قانون})$$

$$= z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$$

اسی طرح ہم مندرجہ ذیل تماثلات ثابت کر سکتے ہیں۔

$$(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2 \quad (i)$$

$$(z_1 + z_2)^3 = z_1^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3 \quad (ii)$$

$$(z_1 - z_2)^3 = z_1^3 - 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 - z_2^3 \quad (iii)$$

$$z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) \quad (iv)$$

حقیقت میں، بہت سے دوسرے تماثلات جو تمام حقیقی اعداد کے لیے درست ہیں۔ پیچیدہ اعداد کے لیے بھی درست ثابت کیے جاسکتے ہیں۔

مثال 2 ذیل کو $a + bi$ کی شکل میں لکھئے:

$$(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3 \quad (ii) \quad (-5i)\left(\frac{1}{8}i\right) \quad (i)$$

$$(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right) = \frac{-5}{8}i^2 = \frac{-5}{8}(-1) = \frac{5}{8} = \frac{5}{8} + i0 \quad (i) \quad \text{حل}$$

$$(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3 = 2 \times \frac{1}{8 \times 8 \times 8} \times i^5 = \frac{1}{256}(i^2)^2 i = \frac{1}{256}i \quad (ii)$$

مثال 3 $(5 - 3i)^3$ کو $a + bi$ کی شکل میں لکھئے۔

حل ہمارے پاس ہے $(5 - 3i)^3 = 5^3 - 3 \times 5^2 \times (3i) + 3 \times 5(3i)^2 - (3i)^3$

$$= 125 - 225i - 135 + 27i = -10 - 198i$$

مثال 4 $(-\sqrt{3} + \sqrt{-2})(2\sqrt{3} - i)$ کو $a + ib$ کی شکل میں لکھئے

حل ہمارے پاس ہے $(-\sqrt{3} + \sqrt{-2})(2\sqrt{3} - i) = (-\sqrt{3} + \sqrt{2}i)(2\sqrt{3} - i)$

$$= -6 + \sqrt{3}i + 2\sqrt{6}i - \sqrt{2}i^2$$

$$= (-6 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}(1 + 2\sqrt{2})i$$

5.4 ایک پیچیدہ عدد کا مقیاس اور زوجی

(The modulus and the conjugate of a complex number)

مان لیجئے $z = a + ib$ ایک پیچیدہ عدد ہے۔ تب z کا مقیاس (modules) جسے $|z|$ ظاہر کیا جاتا ہے اسے غیر منفی حقیقی عدد

کہتے ہیں $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ie $\sqrt{a^2 + b^2}$ اور z کا زوجی (Conjugate) جسے $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے $a - ib$

پیچیدہ ہے۔ i.e., $\bar{z} = a - ib$

$$|3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}, |2 - 5i| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

مثال کے طور پر،

$$\overline{3 + i} = 3 - i, \overline{2 - 5i} = 2 + 5i, \overline{-3i - 5} = 3i - 5$$

اور

دیکھئے کہ غیر صفر پیچیدہ عدد z کا ضربی معکوس اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$z^{-1} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$z \bar{z} = |z|^2$$

یا

$$|z_2| \neq 0 \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{(ii)} \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{(i)}$$

$$z_2 \neq 0 \text{ اگر } \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{z_1}{z_2} \quad (v) \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2} \quad (iv) \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2} \quad (iii)$$

مثال 5 $2 - 3i$ کا ضربی معکوس معلوم کیجئے

حل مان لیا $z = 2 - 3i$

$$|z|^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13 \text{ اور } \overline{z} = 2 + 3i \quad \text{تب}$$

اس لئے $2 - 3i$ کا ضربی معکوس دیا گیا ہے

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{2 + 3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

اوپر دیا ہوا عمل نیچے دیئے گئے طریقے سے بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{2 - 3i} = \frac{2 + 3i}{(2 - 3i)(2 + 3i)} \\ &= \frac{2 + 3i}{2^2 - (3i)^2} = \frac{2 + 3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i \end{aligned}$$

مثال 6 ذیل کو $a + ib$ کی شکل میں ظاہر کیجئے۔

$$i^{-35} \quad (ii) \quad \frac{5 + \sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i} \quad (i)$$

$$\frac{5 + \sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i} = \frac{5 + \sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i} \times \frac{1 + \sqrt{2}i}{1 + \sqrt{2}i} \quad (i) \text{ ہمارے پاس ہے،}$$

$$= \frac{5 + 5\sqrt{2}i + \sqrt{2}i - 2}{1 - (\sqrt{2}i)^2}$$

$$= \frac{3 + 6\sqrt{2}i}{1 + 2} = \frac{3(1 + 2\sqrt{2}i)}{3} = 1 + 2\sqrt{2}i$$

$$i^{-35} = \frac{1}{i^{35}} = \frac{1}{(i^2)^{17} i} = \frac{1}{-i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-i^2} = i \quad (ii)$$

مشق 5.1

تمام دیئے ہوئے پیچیدہ اعداد مشق 1 تا 10 کی شکل میں لکھے

$$1. (5i)\left(-\frac{3}{5}i\right) \quad 2. i^9 + i^{19} \quad 3. i^{-39}$$

$$4. 3(7+i7) + i(7+i7) \quad 5. (1-i) - (-1+i6)$$

$$6. \left(\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}\right) - \left(4 + i\frac{5}{2}\right) \quad 7. \left[\left(\frac{1}{3} + i\frac{7}{3}\right) + \left(4 + i\frac{1}{3}\right)\right] - \left(-\frac{4}{3} + i\right)$$

$$8. (1-i)^4 \quad 9. \left(\frac{1}{3} + 3i\right)^3 \quad 10. \left(-2 - \frac{1}{3}i\right)^3$$

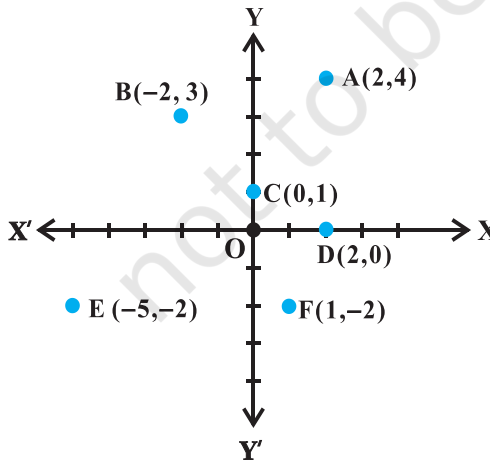
دیئے ہوئے مشق میں 11 تا 13 پیچیدہ عدد کے ضربی معکوس معلوم کیجئے۔

$$11. 4 - 3i \quad 12. \sqrt{5} + 3i \quad 13. -i$$

14. نیچے دی ہوئی expression کو $a + ib$ کی شکل میں ظاہر کیجئے:

$$\frac{(3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}i) - (\sqrt{3} - i\sqrt{2})}$$

5.5 آرگنڈ مستوی اور قطبی تعبیر (اظہار) (Argand Plane and Polar Representation)



شکل 5.1

ہم پہلے یہ جانتے ہیں کہ ہر حقیقی اعداد کے مرتب جوڑے (x, y)

کے مطابق ہمیں مستوی XY میں ایک یکتا نقطہ ملتا ہے اور اس

کے ہر عکس باہمی عمودی لائنوں کے سیٹ کے حوالے

سے۔ x -axis اور y -axis کہا جاتا ہے۔ پیچیدہ عدد $x + iy$ جو

مرتب جوڑے (x, y) کے مطابق جیومیٹری کے انداز سے یکتا

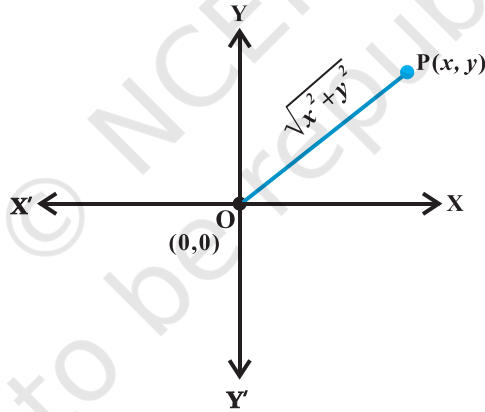
نقطہ $P(x, y)$ سے مستوی XY میں ظاہر کیا جاسکتا ہے اور اس

کے برعکس۔

کچھ پیچیدہ اعداد جیسے $0 + 1i$ ، $-2 + 3i$ ، $2 + 4i$

، $2 + 0i$ ، $-5 - 2i$ اور $1 + 2i$ مرتب جوڑے $(2, 4)$ ، $(-2, 3)$ ، $(0, 1)$ ، $(2, 0)$ ، $(-5, -2)$ اور $(1, -2)$ کے مطابق بالترتیب مطابق ہیں جیومیٹری کلی نقطہ A' B' C' D' E' F سے دکھایا گیا ہے شکل 5.1 میں۔
ایسی مستوی جس میں ہر نقطہ (Point) کو ایک پیچیدہ عدد دیا گیا (assigned) ہو پیچیدہ مستوی یا آرگنڈ مستوی (Argand Plane) کہلاتی ہے۔

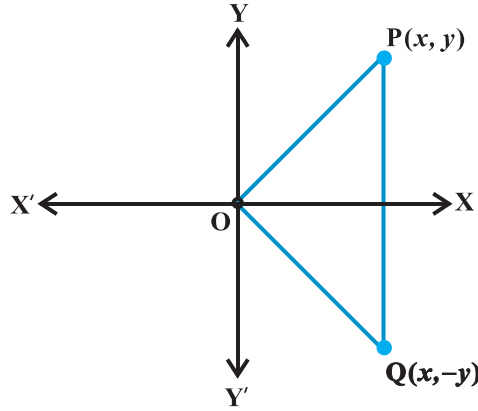
حالانکہ، آرگنڈ مستوی میں پیچیدہ عدد $x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}$ کا مقیاس (modulus) نقطہ $P(x, y)$ اور $O(0, 0)$ کے درمیان فاصلہ ہے۔ شکل 5.2 دیکھئے، x -axis پر نقطہ پیچیدہ اعداد $a + i0$ کے مطابق ہیں اور y -axis پر نقطہ پیچیدہ اعداد شکل $0 + ib$ کے مطابق ہیں۔ آرگنڈ مستوی میں x -axis اور y -axis کو بالترتیب حقیقی محور (Real axis) اور خیالی محور (Imaginary axis) کہا جاتا ہے۔



شکل 5.2

پیچیدہ عدد $z = x + iy$ اور اس کے Conjugate $z = x - iy$ کو آرگنڈ مستوی میں بالترتیب نقطے $P(x, y)$ اور $P(x, -y)$ سے دکھایا جاتا ہے۔

جیومیٹرکل انداز میں نقطہ (x, y) نقطہ $(x, -y)$ کا شیشہ میں دکھائی دینے والا عکس ہے جو ایک حقیقی محور پر ہے۔ (شکل 5.3 دیکھئے)

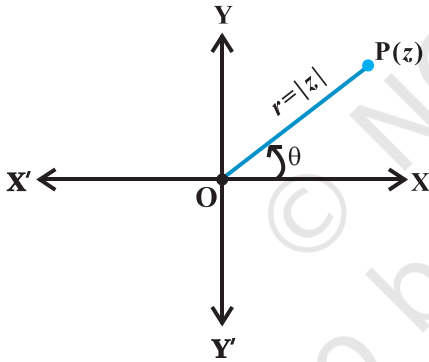


شکل 5.3

5.5.1 ایک پیچیدہ عدد کا قطبی اظہار (Polar representation of a complex number)

مان لیجئے ایک نقطہ P غیر صفر پیچیدہ عدد $z = x + iy$ کو ظاہر کرتا ہے۔ مان لیجئے سمتی قطعہ خط OP کی لمبائی r ہے اور یہ x-axis کی مثبت سمت کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے۔ شکل 5.4

ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ نقطہ P یکتا طور پر حقیقی اعداد کے مرتب جوڑے (r, θ) سے حاصل کیا گیا ہے جسے ہم نقطہ P کے قطبی مختص (Polar co-ordinates) کہتے ہیں۔



شکل 5.4

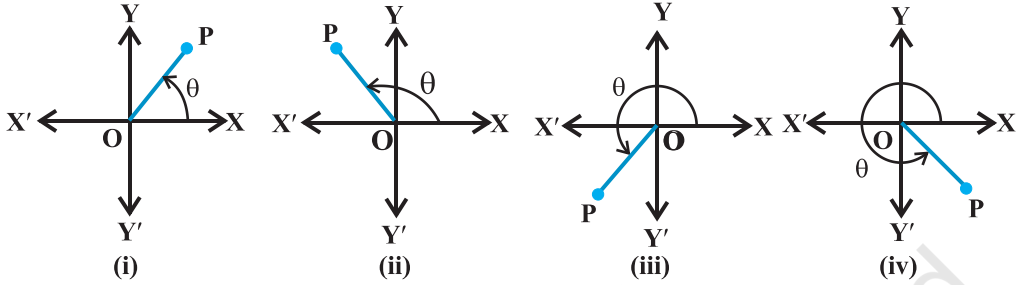
ہمارے پاس ہے $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$ اور اسلئے

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ بعد والا پیچیدہ عدد کی قطبی شکل کہلاتا

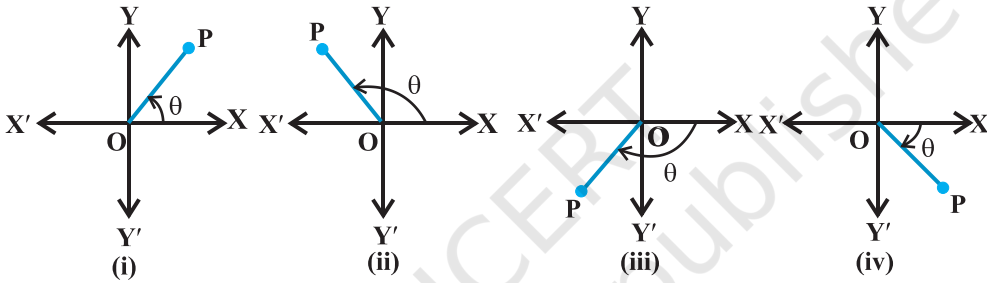
ہے۔ یہاں $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ کا متقیاس (modules) ہے اور θ جسے ہم z کا argument یا دلیل (amplitude) کہتے ہیں، اور اسے $\arg z$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

کسی بھی پیچیدہ عدد $z \neq 0$ کیلئے " θ " کی صرف ایک قیمت ہوتی ہے جہاں $0 \leq \theta < 2\pi$ ہو۔ حالانکہ کوئی بھی دوسرا وقفہ جس کی لمبائی 2π ہو، مثال کے طور پر $-\pi < \theta < \pi$ اس طرح کا ایک وقفہ ہو سکتا ہے۔ ہم θ کی ایسی قیمت لیں گے تاکہ $-\pi < \theta \leq \pi$ ، اسے z کا Principal argument کہا جاتا ہے اور $\arg z$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جب تک

دوسری طرح سے واضح نہ کیا جائے۔ (شکل 5.5 اور 5.6 دیکھئے)



شکل 5.5 $(0 \leq \theta < 2\pi)$



شکل 5.6 $(-\pi < \theta \leq \pi)$

مثال 7 پیچیدہ عدد $z = 1 + j\sqrt{3}$ کا قطبی شکل میں اظہار کیجئے۔

حل مان لیا $\sqrt{3} = r \sin \theta$ ، $1 = r \cos \theta$

مربع کرنے اور جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 4$$

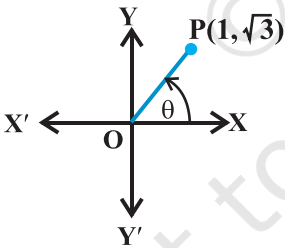
یعنی، $r = \sqrt{4} = 2$ (conventionally, $r > 0$)

اس لیے، $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ، $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ جو $\theta = \frac{\pi}{3}$ دیتا ہے۔

اس لئے، مطلوب قطبی شکل $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right)$ ہے

پیچیدہ عدد $z = 1 + j\sqrt{3}$ شکل 5.7 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 8 پیچیدہ عدد $\frac{-16}{1 + j\sqrt{3}}$ کا قطبی شکل میں بدلئے۔



شکل 5.7

$$\frac{-16}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-16}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad \text{دیا ہوا پیچیدہ عدد}$$

$$= \frac{-16(1-i\sqrt{3})}{1-(i\sqrt{3})^2} = \frac{-16(1-i\sqrt{3})}{1+3} = -4(1-i\sqrt{3}) = -4 + i4\sqrt{3}$$

$$-4 = r \cos \theta, 4\sqrt{3} = r \sin \theta \quad \text{مان لیا}$$

مربع کرنے اور جوڑنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

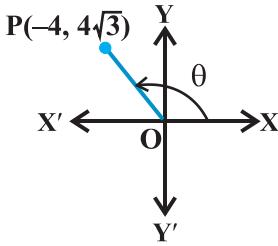
$$16 + 48 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$r^2 = 64, \text{ i.e., } r = 8 \quad \text{جو دیتا ہے}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2}, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{اس لئے}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{اس لئے مطلوبہ قطبی شکل } 8 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \text{ ہے۔}$$



شکل 5.8

مشق 5.2

ہر ایک پیچیدہ اعداد کے مقیاس (modules) اور دلیل (Arguments) معلوم کیجئے (مشق 1 تا 2)

$$1. \quad z = -1 - i\sqrt{3} \quad 2. \quad z = -\sqrt{3} + i$$

تمام پیچیدہ اعداد (مشق 3 تا 4) کو قطبی شکل میں لکھئے۔

$$3. \quad 1 - i \quad 4. \quad -1 + i \quad 5. \quad -1 - i$$

$$6. \quad -3 \quad 7. \quad \sqrt{3} + i \quad 8. \quad i$$

5.6 دو درجی مساوات (Quadratic equations)

ہم پہلے ہی دو درجی مساوات سے واقف ہیں اور انہیں حقیقی اعداد میں حل کر چکے ہیں جہاں میٹر (discriminant) غیر صفر ہو یعنی، ≥ 0

ہم مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کو لیتے ہیں:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ جہاں } a, b, c \text{ حقیقی ضریب ہیں اور } a \neq 0$$

ساتھ ہی ہم مانتے ہیں کہ $b^2 - 4ac < 0$

اب ہم جانتے ہیں کہ پیچیدہ اعداد کے سیٹ میں منفی حقیقی اعداد کا جذر کیسے معلوم کرتے ہیں۔ اس لئے اوپر دی ہوئی مساوات کا حل پیچیدہ اعداد کے سیٹ میں بھی موجود ہے اور اس طرح دیا گیا ہے۔

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} i}{2a}$$

نوٹ اس وقت کچھ لوگ اس بات کو جاننے میں دلچسپی رکھتے ہوں گے کہ ایک مساوات کے کتنے جز ہوں گے؟

اس سلسلے میں ذیل میں دیا گیا الجبرے پر مبنی بنیادی مسئلہ (Fundamental theorem of Algebra) اس طرح ہے (بغیر ثبوت کے)۔

”کثیر رکنی مساوات کا کم از کم ایک جذر ہوتا ہے“

اس مسئلہ کے نتائج سے ایک بہت ہی اہم نتیجہ پر پہنچے ہیں۔

” n درجہ والی کثیر رکنی مساوات کے n جذر ہوتے ہیں“

مثال 9 $x^2 + 2 = 0$ کو حل کیجئے

حل

$$x^2 + 2 = 0 \text{ ہمارے پاس ہے}$$

$$x^2 = -2 \text{ i.e., } x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i \text{ یا}$$

مثال 10 $x^2 + x + 1 = 0$ کو حل کیجئے

حل

$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$$

یہاں،

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

اس لئے،

مثال 11 $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$ کو حل کیجئے۔

حل

مساوات کا ممیز (discriminant) یہ ہے

$$1^2 - 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 1 - 20 = -19$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2\sqrt{5}} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2\sqrt{5}} \text{ اس لئے حل ہیں}$$

مشق 5.3

ذیل میں دی گئی تمام مساواتیں حل کیجئے:

$$x^2 + 3x + 9 = 0 \quad .3$$

$$2x^2 + x + 1 = 0 \quad .2$$

$$x^2 + 3 = 0 \quad .1$$

$$x^2 - x + 2 = 0 \quad .6$$

$$x^2 + 3x + 5 = 0 \quad .5$$

$$-x^2 + x - 2 = 0 \quad .4$$

$$\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2} + 3\sqrt{3} = 0 \quad .8$$

$$\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0 \quad .7$$

$$x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0 \quad .10$$

$$x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad .9$$

متفرق مثالیں

مثال 12 $\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ کا زوجی (Conjugate) معلوم کیجئے

حل ہمارے پاس ہے $\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$

$$= \frac{6+9i-4i+6}{2-i+4i+2} = \frac{12+5i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$= \frac{48-36i+20i+15}{16+9} = \frac{63-16i}{25} = \frac{63}{25} - \frac{16}{25}i$$

اس لیے $\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ کا زوجی $\frac{63}{25} - \frac{16}{25}i$ ہے۔

مثال 13 مندرجہ ذیل پیچیدہ اعداد کا مقیاس اور دلیل معلوم کیجئے:

$$\frac{1}{1+i} \quad (ii)$$

$$\frac{1+i}{1-i} \quad (i)$$

حل (i) ہمارے پاس ہے $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1-1+2i}{1+1} = i = 0+i$

اب، ہم رکھتے ہیں $1 = r \sin \theta$ ، $0 = r \cos \theta$

مربع کرنے اور جمع کرنے پر $r^2 = 1$ i.e., $r = 1$

تاکہ $\sin \theta = 1$ ، $\cos \theta = 0$

اس لئے $\theta = \frac{\pi}{2}$

اس لئے، $\frac{1+i}{1-i}$ کا مقیاس '1' ہے اور دلیل $\frac{\pi}{2}$ ہے۔

(ii) ہمارے پاس ہے

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

مان لیجئے $-\frac{1}{2} = r \sin \theta$ ، $\frac{1}{2} = r \cos \theta$

اوپر (i) کی طرح عمل کر کے ہمیں حاصل ہوتا ہے $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

اس لئے $\theta = \frac{-\pi}{4}$

اس لئے $\frac{1}{1+i}$ کا مقیاس $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ہے اور دلیل $\frac{-\pi}{4}$ ہے۔

مثال 14 اگر $x + iy = \frac{a+ib}{a-ib}$ ہے تو ثابت کیجئے کہ $x^2 + y^2 = 1$ ہے۔

حل ہمارے پاس ہے

$$x + iy = \frac{(a+ib)(a+ib)}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a^2 - b^2 + 2abi}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2qb}{a^2 + b^2} i$$

$$x - iy = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{2ab}{a^2 + b^2} i$$

اس لئے،

$$= \frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} = 1 \quad x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

مثال 15 حقیقی θ معلوم کیجئے تاکہ

$$\frac{3 + 2i \sin \theta}{1 - 2i \sin \theta} \text{ خالص حقیقی ہو۔}$$

حل ہمارے پاس ہے،

$$\frac{3 + 2i \sin \theta}{1 - 2i \sin \theta} = \frac{(3 + 2i \sin \theta)(1 + 2i \sin \theta)}{(1 - 2i \sin \theta)(1 + 2i \sin \theta)}$$

$$= \frac{3 + 6i \sin \theta + 2i \sin \theta - 4 \sin^2 \theta}{1 + 4 \sin^2 \theta} = \frac{3 - 4 \sin^2 \theta}{1 + 4 \sin^2 \theta} + \frac{8i \sin \theta}{1 + 4 \sin^2 \theta}$$

کیونکہ ہمیں پیچیدہ اعداد حقیقی دیئے گئے ہیں، اس لئے

$$\frac{8 \sin \theta}{1 + 4 \sin^2 \theta} = 0, \text{ i.e., } \sin \theta = 0$$

اس طرح $\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

مثال 16 پیچیدہ عدد $z = \frac{i-1}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}$ کو قطبی شکل میں لکھئے۔

$$z = \frac{i-1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \text{ ہمارے پاس ہے}$$

$$= \frac{2(i-1)}{1 + \sqrt{3}i} \times \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{2(i + \sqrt{3} - 1\sqrt{3}i)}{1 + 3} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}i$$

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{2} = r \cos \theta, \quad \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = r \sin \theta \quad \text{اب رکھیے}$$

مربع کرنے اور جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right)^2 = \frac{2((\sqrt{3})^2 + 1)}{4} = \frac{2 \times 4}{4} = 2$$

اس لئے $r = \sqrt{2}$ جس سے حاصل ہوتا ہے $\cos 0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ، $\sin 0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

اس لئے، $0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$ (کیوں؟)

اس لئے $\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$ قطبی شکل ہے۔

متفرق مشق

1. نکالئے $\left[i^{18} + \left(\frac{1}{i} \right)^{25} \right]^3$

2. کہیں دو پیچیدہ اعداد z_1 اور z_2 کیلئے ثابت کیجئے

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2$$

3. $\left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i} \right) \left(\frac{3-4i}{5+i} \right)$ کو معیاری شکل میں مختصر کیجئے۔

4. اگر $x - iy = \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}$ ہو تو ثابت کیجئے کہ $x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$

5. مندرجہ ذیل کو قطبی شکل میں لکھئے

(i) $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ (ii) $\frac{1+3i}{1-2i}$

6 تا 9 تمام مساوات کو حل کیجئے۔

6. $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$ 7. $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

8. $27x^2 - 10x + 1 = 0$ 9. $21x^2 - 28x + 10 = 0$

10. اگر $z_2 = 1+i$ ، $z_1 = 2-i$ ہو تو $\left| \frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 + z_2 + i} \right|$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

11. اگر $a+ib = \frac{(x+i)^2}{2x^2+1}$ تو ثابت کیجئے کہ $a^2 + b^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}$

12. مان لیجئے $z_1 = 2 - i$ ، $z_2 = -2 + i$ معلوم کیجئے

$$\text{Re}\left(\frac{z_1 z_2}{z_1}\right) \quad (i) \quad \text{Im}\left(\frac{1}{z_1 \bar{z}_1}\right) \quad (ii)$$

13. پیچیدہ عدد $\frac{1+2i}{1-3i}$ کے مقیاس اور دلیل معلوم کیجئے۔

14. اگر $(x-iy)(3+5i) = -6-24i$ ، کا زوجی ہے تو حقیقی اعداد x اور y معلوم کیجئے

15. $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$ کا مقیاس معلوم کیجئے

16. اگر $(x+iy)^3 = u+iv$ تو ثابت کیجئے کہ $\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 4(x^2 - y^2)$

17. اگر α اور β دو مختلف دو پیچیدہ اعداد ہوں جبکہ $|\beta| = 1$ تب $\left|\frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha\beta}\right|$ معلوم کیجئے۔

18. $|1-i|^x = 2^x$ کا غیر صفر صحیح عددی حل معلوم کیجئے۔

19. اگر $(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih) = A+iB$ ، تو ثابت کیجئے کہ

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)(g^2 + h^2) = A^2 + B^2$$

20. اگر $1 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m$ تو m کی کم ترین صحیح عددی قدر معلوم کیجئے۔

خلاصہ (Summary)

◆ $a+ib$ کی شکل کا عدد، جہاں a اور b حقیقی اعداد ہیں، پیچیدہ عدد کہلاتا ہے۔ اس پیچیدہ عدد کا a حقیقی حصہ کہلاتا ہے اور

b خیالی

◆ مان لیجئے $z_1 = a+ib$ اور $z_2 = c+id$ تب

$$z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d) \quad (i)$$

$$z_1 z_2 = (ac-bd) + i(ad+bc) \quad (ii)$$

◆ کسی غیر صفر پیچیدہ عدد $z = a+ib$ ($a \neq 0, b \neq 0$) کے لیے ایک پیچیدہ عدد $\frac{a}{a^2+b^2} + i \frac{-b}{a^2+b^2}$ ملتا

ہے۔ جسے $\frac{1}{z}$ یا z^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ z کا ضربی معکوس کہلاتا ہے۔ تاکہ

$$(a+ib) \left[\frac{a^2}{a^2+b^2} + i \frac{-b}{a^2+b^2} \right] = 1 + i.0 = 1$$

♦ کسی بھی صحیح عدد k کے لیے $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$

♦ پیچیدہ عدد $z = a + ib$ کا زوجی جو $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے $\bar{z} = a - ib$ ہوتا ہے۔

♦ پیچیدہ عدد $z = x + iy$ کی قطبی شکل $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ہے۔ جہاں $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (z کا مقياس) اور

$\sin\theta = \frac{y}{r}, \cos\theta = \frac{x}{r}$ (z, θ کی دلیل ہے)۔ θ کی قیمت تاکہ $-\pi < \theta \leq \pi$ کی principal دلیل کہلاتی ہے۔

♦ n درجہ والی کثیر کنی مساوات کے n جذر ہوتے ہیں۔

♦ دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ جہاں $a, b, c \in R$ کے حل $x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}$ ہیں

$$a \neq 0, \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$$

تاریخ کے اوراق سے

یہ حقیقت کہ حقیقی اعداد کے نظام میں ایک منفی عدد کا جذر المربع نہیں ہوتا یونان کی دین ہے، لیکن اس کا سہرا ہندوستانی ریاضی داں مہاویرا (850 عیسوی) کے سر بندھتا ہے جس نے سب سے پہلے اس شکل کو صاف طور پر بیان کیا۔ وہ اپنی تصنیف Ganitsasara میں بیان کرتا ہے کہ چیزوں کی قدرت میں ایک منفی (مقدار) ایک مربع (مقدار) نہیں ہوتی، یعنی اس کا کوئی جذر المربع نہیں ہوتا۔ ایک دوسرا ریاضی داں بھاسکرا اپنی تصنیف Bigaganita جو 1150 عیسوی میں لکھی گئی ہیں، لکھتا ہے کہ منفی مقدار کا کوئی جذر المربع نہیں ہوتا کیونکہ یہ ایک مربع نہیں ہے۔ کارڈن (Cardan) نے (1545) میں درج ذیل مسئلہ کے حل پر غور کیا۔

$$xy = 40, x + y = 10$$

اس نے حل کیا $x = 5 + \sqrt{-15}$ اور $y = 5 - \sqrt{-15}$ درج بالا مثال کے حل کے طور پر جس کو اس نے یہ کہہ کر رد کر دیا ہے یہ اعداد بیکار ہیں۔ البرٹ گراڈ (Albert Girard) (1625 عیسوی) نے منفی اعداد کے جذر المربع کو قبول کر لیا اور کہا کہ اس سے ہم مساوات کے اتنے ہی جذر معلوم کر سکتے ہیں جتنا اس کا درجہ ہوتا ہے۔ یولر (Euler) پہلا شخص تھا جس نے علامت $\sqrt{-1} = i$ سے متعارف کرایا اور ڈبلیو۔ آر۔ ہمیلٹن (W.R. Hamilton) نے 1830 عیسوی) پیچیدہ عدد $a + ib$ کو حقیقی عدد کے ایک مرتب جوڑ (a,b) سے متعلق کیا۔ اس طرح اس نے ایک خالص ریاضی کی تعریف دی اور تصوراتی اعداد کے استعمال کو ختم کیا۔



© NCERT
not to be republished