باب 6

خطی نامساواتیں
(LINEAR INEQUALITIES)

❖ریاضی وہ فن ہے جو بہت سی اشیاء کو بہت سے الگ الگ
طریقوں سے بیان کرتی ہے - MAXWELL❖

6.1 تعارف (Introduction)

پچھلی جماعتوں میں ہم نے ایک متغیراور دو متغیر والی مساواتوں کے بارے میں پڑھ چکے ہیں اور ساتھ ہی کچھ عبارتی مسئلہ بھی مساوات کی شکل میں ترجمہ کر کے حل کئے ہیں اب ایک فطری سوال پیدا ہوتا ہے کہ ''کیا ایک بیانی مسئلہ کو ہمیشہ مساواتی شکل میں لکھا جا سکتا ہے؟ مثال کے طور پر آپ کی کلاس میں تمام طلباء کا قد 160 سم سے کم ہے۔ آپ کے کلاس روم میں زیادہ سے زیادہ 60 میزیں یا کرسیاں یا دونوں آسکتی ہیں۔ یہاں بھی کچھ بیانات میں ایک نشان ملتا ہے '<' (اس سے کم) '>' (اس سے زیادہ) '≤' (اس سے کم یا برابر) اور '≥' (اس سے زیادہ یا برابر) جو نامساواتیں کہلاتی ہیں۔

اس سبق میں ہم ایک متغیر اور دو متغیر والی مساواتیں پڑھیں گے۔ نامساواتوں کی پڑھائی سائنس، ریاضی، شماریات (Statistics) پر امید مسئلہ، معاشیات، علم نفسیات کے میدانوں مسئلوں کو حل کرنے میں اہم رول ادا کرتی ہے۔

6.2 نامساوات (Inequalities)

ہمیں مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کرنا چاہیے

(i) روی 200 روپے لیکر بازار چاول خریدنے جاتا ہے جو کہ ایک کلوگرام میں پیکٹ میں موجود ہیں ایک پیکٹ چاول کی قیمت 30 روپے ہے۔ اگر چاول کے پیکٹ کی تعداد x ہے جو وہ خریدتا ہے تو اس کے ذریعے خرچ کی جانے والی کل رقم Rs 30x ہے کیونکہ اسے چاول صرف پیکیٹوں میں ہی خریدنے ہیں اس لیے وہ پوری رقم 200 روپے خرچ نہیں کر پائے گا (کیوں؟) اس لیے

$$30x < 200 \quad ...(1)$$

صاف طور پر بیان (1) ایک مساوات نہیں ہے کیونکہ اس میں برابری کا نشان موجود نہیں ہے (ii) ریشماں کے پاس 120 روپئے ہیں اور وہ کچھ رجسٹر اور پین خریدنا چاہتی ہے۔ ایک رجسٹر کی قیمت 40 روپئے ہے اور ایک پین کی قیمت 20 روپئے ہے اگر اس صورت حال میں x رجسٹر کی تعداد اور y پینوں کی تعداد کو ظاہر کرتے ہیں جو ریشما خریدتی ہے تو اس نے کل ($40x + 20y$) روپئے خرچ کیے اور ہمارے پاس ہے

$$40x + 20y \le 120 \quad ...(2)$$

کیونکہ اس صورت حال میں کل خرچ کیا گیا روپیہ 120 روپے تک ہوسکتا ہے یہ بات نوٹ کر لیجئے کہ بیان (2) میں دو بیان موجود ہیں۔

$$40x + 20y < 120 \quad ...(3)$$

اور

$$40x + 20y = 120 \quad ...(4)$$

بیان (3) ایک مساوات نہیں ہے i.e ایک نامساوات جبکہ بیان (4) ایک مساوات ہے۔

تعریف 1 دو حقیقی اعداد یا دو الجبری عبارتیں علامات '<'، '>'، '≤' یا '≥' نامساوات سے وابستہ ہیں۔

اوپر دیے ہوئے بیانات (1)، (2) اور (3) نامساواتیں ہیں۔

$7>5; 3<5$ عددی نا مساواتوں کی مثالیں ہیں جبکہ $x < 5$ ؛ $y < 2$ ؛ $x \ge 3$ ، $y \le 3$ حروف بحروف نامساواتوں کی مثالیں ہیں۔

$3<5<7$ (اسطرح پڑھا یا جاتا ہے کہ 5 بڑا ہے 3 اور چھوٹا ہے 7 سے) $3 \le x < 5$ (اس طرح پڑھا یا جاتا ہے کہ x بڑا ہے یا برابر ہے 3 کے اور چھوٹا ہے 5 سے) اور $2 < y \le 4$ دوہری نامساواتوں کی مثالیں ہیں۔

نامساواتوں کی کچھ اور مثالیں یہ ہیں:

$$ax + b < 0 \quad ....(5)$$

$$ax + b > 0 \quad ....(6)$$

$$ax + b \le 0 \quad ....(7)$$

$$ax + b \ge 0 \quad ....(8)$$

$$ax + by < c \qquad (9)....$$

$$ax + by > c \qquad (10)....$$

$$ax + by \le c \qquad (11)....$$

$$ax + by \ge c \qquad (12)....$$

$$ax^2 + bx + c \le 0 \qquad (13)....$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (14)....$$

نامساواتیں (5)،(6) (9)(10) اور (14) واضع نامساواتیں ہیں جبکہ نامساواتیں (7) (8) (11) اور ست (کاہل) نامساواتیں ہیں نامساواتیں (5) سے (8) تک ایک متغیر x ہیں خطی نامساواتیں ہیں جہاں $a \neq 0$، جبکہ نامساواتیں (9) سے (12) تک دو متغیر x اور y میں خطی

نامساواتیں ہیں جہاں $a \neq 0$، $b \neq 0$۔

نامساواتیں (13) اور (14) خطی نہیں ہیں (درحقیقت میں یہ ایک متغیر ہیں دو درجی نامساواتیں ہیں جبکہ $a \neq 0$)

اس سبق میں ہم صرف ایک اور دو متغیر والی خطی نامساواتوں کے بارے میں پڑھیں گے۔

6.3 ایک متغیر والی خطی نامساواتوں کے الجبری حل اور انہیں گراف کے ذریعے دکھانا

(Algebraic Solution of Linear Inequalities in One Variable and their Graphical Representation)

ہم سیکشن 6.2 کی نامساوات (i) پر غور کرتے ہیں۔ مطلب $30x < 200$

یہ نوٹ کر لیجئے کہ یہاں x چاولوں کے پیکٹ کی تعداد کو بتاتا ہے۔

ظاہری طور پر x ایک منفی صحیح عدد یا ٹکڑا نہیں ہوسکتا۔ اس نامساوات کی L.H.S ،$30x$ ہے اور R.H.S ،200 ہے اسلئے ہمارے پاس ہے

$x = 0$ کیلئے، **L.H.S** $= 30(0) = 0 < 200$ (**R.H.S**) جو کہ صحیح ہے

$x = 1$ کیلئے، **L.H.S** $= 30(1) = 30 < 200$ (**RHS**) جو کہ صحیح ہے

$x = 2$ کیلئے، **L.H.S** $= 30(2) = 60 < 200$ جو کہ صحیح ہے

جوکہ صحیح ہے, $x=3, \mathbf{L.H.S}=30(3)=90<200$ کیلئے

جوکہ صحیح ہے, $x=4, \mathbf{L.H.S}=30(4)=120<200$ کیلئے

جوکہ صحیح ہے, $x=5, \mathbf{L.H.S}=30(5)=150<200$ کیلئے

جوکہ صحیح ہے $x=6, \mathbf{L.H.S}=30(6)=180<200$ کیلئے ہے۔

جوکہ غلط ہے $x=7, \mathbf{L.H.S}=30(7)=210<200$ کیلئے

اوپری صورت حال میں ہمیں x کی وہ قیمتیں میں ہی جو نا مساوات کو ایک صحیح بیان دیتی ہیں اور وہ 6,5,4,3,2,1,0 ہیں۔ x کی یہ قیمتیں جو اوپری نا مساوات کو صحیح بیان بناتی ہیں نا مساوات کے حل کہلاتی ہیں اور سیٹ {0,1,2,3,4,5,6} اسکا حل سیٹ کہلاتا ہے۔

اس لیے ایک نا مساوات کا کوئی بھی حل ایک متغیر میں متغیر کی قیمت ہے جو اسے صحیح بیان بنا دیتا ہے۔

ہم نے اوپر نا مساوات سے حل بار بار کرنا اور غلطی نکالنے (trial and error method) والے طریقے سے نکالے ہیں جو زیادہ اثر انداز نہیں ہے۔ ظاہر ہے اس طریقہ میں بہت زیادہ وقت لگتا ہے اور کئی بار ناممکن ہے ہمارے پاس نا مساواتوں کو حل کرنے کیلئے کچھ اچھے یا نظامی طریقہ ہونے چاہئے۔ اس سے پہلے ہمیں عدی نا مساواتوں کے بارے میں بہتر جانکاری ہونی چاہئے اور انہیں اصول کی شکل میں ماننا چاہئے جب ہم نا مساواتوں کو حل کریں گے۔

ہمیں وہ خطی مساواتوں کو حل کرتے وقت یاد رکھنے ہوں گے، آپ مندرجہ ذیل اصول اپنائیں گے:

اصول 1 ایک مساوات کے دونوں طرف برابر اعداد کو جمع کیا (یا گھٹایا) جا سکتا ہے۔

اصول 2 ایک مساوات کے دونوں طرف ایک غیر صفر عدد سے ضرب یا (تقسیم) کیا جا سکتا ہے۔

نا مساواتوں کو حل کرنے میں بھی ہم یہی اصول اپناتے ہیں صرف اس میں اصول 2 میں یہ فرق ہوتا ہے کہ نا مساوات کا نشان پلٹ جاتا ہے (یعنی > ،< ہو جاتا ہے ≤ کا نشان ≥ (ہو جاتا ہے وغیرہ) جب کبھی بھی ہم نا مساوات کے دونوں طرف کسی منفی عدد سے ضرب یا (تقسیم) کرتے ہیں اس اصول سے یہ صاف ظاہر ہے کہ

$3>2$ جبکہ $-3<-2$

سے $-8<-7$ جبکہ $(-8)(-2)>(-7)(-2)$ اسکا مطلب $16<14$

اسلئے، ہم نامساوات کے حل کرنے کیلئے مندرجہ ذیل اصول بیان کرتے ہیں۔

اصول 3 ایک نامساوات کے دونوں طرف برابر نمبر جمع یا (گھٹائے) جاسکتے ہیں جس سے نامساوات کے نشان ہر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔

اصول 4 نامساوات کو دونوں طرف کسی بھی یکساں مثبت عدد سے ضرب یا (تقسیم) کیا جاسکتا ہے۔لیکن جب دونوں طرف کسی بھی منفی عدد سے ضرب یا تقسیم کیا جاتا ہے تو نامساوات کا نشان بدل جاتا ہے۔

اب ہمیں کچھ مثالیں پر غور کرنا چاہئے۔

مثال 1 $3x < 200$ کو حل کیجئے جبکہ

(i) x ایک طبعی عدد ہے (ii) x ایک صحیح عدد ہے

حل ہم دیا ہوا ہے $30x < 200$

یا $\frac{30x}{30} < \frac{200}{30}$ (اصول 2) یعنی $x < \frac{20}{3}$

(i) جب x ایک طبعی عدد ہے اس کیس میں x کی مندرجہ ذیل قسمیں بیان کو صحیح قرار دیتی ہیں۔

1,2,3,4,5,6

نامساوات کا حل سیٹ $\{1,2,3,4,5,6\}$ ہے

(ii) جب x ایک صحیح عدد ہے، اس کیس میں دی ہوئی نامساوات کے حل $\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ہیں

نامساوات کا حل سیٹ ہے۔ $\{\ldots -2, -1, 0, 1, 2\ldots, 6\}$

مثال 2 $5x - 3 < 3x + 1$ کو حل کیجئے، جبکہ

(i) x ایک صحیح عدد ہے (ii) x ایک حقیقی عدد ہے۔

حل ہمارے پاس ہے $5x - 3 < 3x + 1$

یا $5x - 3 + 3 < 3x + 1 + 3$ (اصول 1)

یا $5x < 3x + 4$

یا $5x - 3x < 3x + 4 - 3x$ (اصول1)

یا $2x < 4$

یا $x < 2$ (اصول2)

(i) جب x ایک صحیح عدد ہے تو دی ہوئی نامساوات کے حل ہیں۔

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1$$

(ii) جب x ایک حقیقی عدد ہے، تو دی ہوئی نامساوات کی حل $x < 2$ سے دیے گئے ہیں اس کا مطلب ہے وہ تمام حقیقی اعداد جو 2 سے کم ہیں۔ اس لیے نامساوات کا حل سیٹ ہے $x \in (-\infty, 2)$ ۔

ہم نے نامساواتوں کے حل طبعی اعداد کے سیٹ، صحیح اعداد کے سیٹ اور حقیقی اعداد کے سیٹ میں غور کیے ہیں۔ اب جب تک کے بیان نہ دیا جائے ہم اس سبق میں نامساواتوں کو حقیقی اعداد کے سیٹ میں ہی حل کریں گے یعنی ہمارا علاقہ حقیقی اعداد ہوگا جب تک بتایا نہ جائے۔

مثال 3 $4x + 3 < 6x + 7$ کو حل کیجیے

حل ہمارے پاس ہے $4x + 3 < 6x + 7$

یا $4x - 6x < 6x + 4 - 6x$

یا $-2x < 4$ یا $x > -2$

یعنی اس کا مطلب ہے وہ تمام حقیقی اعداد جو 2– سے بڑے ہیں دی ہوئی نامساوات کے حل ہیں اس لیے اس کا حل سیٹ $(-2, \infty)$ ہے۔

مثال 4 $\dfrac{5-2x}{3} \le \dfrac{x}{6} - 5$ کو حل کیجیے

حل ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{5-2x}{3} \le \frac{x}{6} - 5$$

یا $2(5-2x) \le x - 30$

یا $$10-4x \le x-30$$

یا $-5x \le -40$ یعنی $x \le 8$

یعنی وہ تمام حقیقی اعداد x جو بڑے ہیں یا برابر ہیں 8 کے دی ہوئی نامساوات کے حل ہیں یعنی $x \in [8, \infty)$ ۔

مثال 5 $7x+3<5x+9$ کو حل کیجیے، حلوں کے گراف کو عددی خط پر دکھایئے۔

حل ہمارے پاس ہے $7x+3<5x+9$ یا $2x<6$ یا $x<3$

حلوں کا گرافی اظہار شکل 6.1 میں دیا گیا ہے۔

شکل 6.1

مثال 6 $\dfrac{3x-4}{2} \ge \dfrac{x+1}{4}-1$ کو حل کیجیے. حلوں کا گراف عددی خط پر دکھایئے۔

حل ہمارے پاس ہے

$$\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x+1}{4}-1$$

یا $$\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x-3}{4}$$

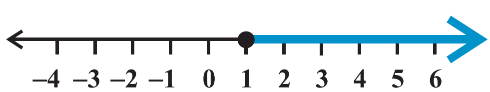
یا $$2(3x-4) \ge (x-3)$$

یا $$6x-8 \ge x-3$$

یا $$5x \ge 5$$

یا $$x \ge 1$$

حلوں کا گرافی اظہار شکل 6.2 میں دیا گیا ہے۔



شکل 6.2

مثال 7 ایک گیارویں کلاس کے طالب علم نے پہلے اور دوسرے ٹرمینل امتحان میں بالترتیب 62 اور 48 نمبر حاصل کیے۔ سالانہ امتحان میں وہ کم سے کم کتنے نمبر حاصل کرے تاکہ اوسطاً اس کے 60 نمبر ہوں۔

حل مان لیا سالانہ امتحان میں طالب علم x نمبر حاصل کرتا ہے، تب

$$\frac{62+48+x}{3} \geq 60$$

یا $$110 + x \geq 180$$

یا $$x \geq 70$$

اس لئے، طالب علم کو کم سے کم 70 نمبر حاصل کرنے ہوں گے تاکہ اوسطاً نمبر 60 ہوں۔

مثال 8 لگاتار طاق طبعی اعداد کے وہ تمام جوڑے معلوم کیجیے جو 10 سے زیادہ ہیں تاکہ ان کا جوڑ 40 سے کم ہو۔

حل مان لیجیے x دو لگاتار طاق طبعی اعداد میں چھوٹا ہے تاکہ دوسرا $x+2$ ہو، تب ہمارے پاس ہوگا۔

$$x > 10 \qquad \ldots(1)$$

اور $$x + (x+2) < 40 \qquad \ldots(2)$$

(2) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$2x + 2 < 40$$

یعنی $$x < 19 \qquad \ldots(3)$$

(1) اور (3) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$10 < x < 19$$

کیونکہ x ایک طاق عدد ہے اس لئے x کی قیمتیں 11، 13، 15 اور 17 ہوسکتی ہیں۔ اس لئے درکار ممکن جوڑے (11,13)، (13,15)، (15,17) اور (19,17) ہوں گے۔

مشق 6.1

1. $24x < 100$ کو حل کیجیے جب کہ

(i) xایک طبعی عدد ہے (ii) x ایک صحیح عدد ہے

.2 $-12x > 30$ کو حل کیجیے۔ جبکہ

(i) x ایک طبعی عدد ہے (ii) x ایک صحیح عدد ہے۔

.3 $5x - 3 < 7$ کو حل کیجیے، جبکہ

(i) x ایک صحیح عدد ہے (ii) x ایک حقیقی عدد ہے

.4 $3x + 8 > 2$ کو حل کیجیے جبکہ

(i) x ایک صحیح عدد ہے (ii) x ایک حقیقی عدد ہے

حقیقی اعداد x کیلئے ذیل کے نامساوات 5 تا 16 حل کیجیے

.5 $4x + 3 < 6x + 7$ .6 $3x - 7 > 5x - 1$

.7 $3(x - 1) \leq 2(x - 3)$ .8 $3(2 - x) \geq 2(1 - x)$

.9 $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 11$ .10 $\frac{x}{3} > \frac{x}{2} + 1$

.11 $\frac{3(x-2)}{5} \leq \frac{5(2-x)}{3}$ .12 $\frac{1}{2}\left[\frac{3x}{5} + 4\right] \geq \frac{1}{3}(x - 6)$

.13 $2(2x + 3) - 10 < 6(x - 2)$ .14 $37 - (3x + 5) \geq 9x - 8(x - 3)$

.15 $\frac{x}{4} < \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$ .16 $\frac{(2x-1)}{3} \geq \frac{(3x-2)}{4} - \frac{(2-x)}{5}$

17 سے 20 تک کی نامساواتوں کو حل کیجئے اور ان میں سے ہر ایک کے حل کے گراف عددی خط پر دکھایئے۔

.17 $3x - 2 < 2x + 1$ .18 $5x - 3 \geq 3x - 5$

.19 $3(1 - x) < 2(x + 4)$ .20 $\frac{x}{2} < \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$

.21 پہلے دو وحدانیہ unit ٹیسٹوں میں روی نے 70 اور 75 نمبر حاصل کئے۔ تیسرے ٹیسٹ میں وہ کم سے کم کتنے نمبر حاصل کرے تا کہ اس کا اوسط 60 نمبر ہو۔

22. کسی کورس میں A گریڈ (درجہ) حاصل کرنے کیلئے اوسطاً 90 یا اس سے زیادہ نمبر 5 امتحانوں ہر ایک 100 نمبر کا ہے میں درکار ہیں۔ اگر سنیتا کے چار امتحانوں میں 94,92,87 اور 95 نمبر ہیں، تو سنیتا پانچویں امتحان میں کم سے کم کتنے نمبر حاصل کرے تا کہ اسے کورس میں A گریڈ حاصل ہو جائے۔

23. لگا تار طاق مثبت صحیح اعداد کے وہ تمام جوڑے معلوم کیجئے جو دونوں 10 سے کم ہیں اور ان کا جوڑ 11 سے زیادہ ہے۔

24. لگا تار جفت مثبت صحیح اعداد کے وہ تمام جوڑے معلوم کیجئے جو دونوں 5 سے بڑے ہوں اور ان کا جوڑ 23 سے کم ہو۔

25. ایک مثلث کا سب سے بڑا ضلع سب سے چھوٹے ضلع کا تین گنا ہے۔ اور سب سے بڑا ضلع تیسرے ضلع سے 2 سم زیادہ ہے۔ اگر مثلث کا احاطہ کم سے کم 61 سم ہے۔ سب سے چھوٹے ضلع کی کم سے کم لمبائی معلوم کیجئے۔

26. ایک آدمی ایک بورڈ جسکی لمبائی 91 سم ہے سے تین ٹکڑے (لمبائیاں) کاٹنا چاہتا ہے۔ دوسری لمبائی سب سے چھوٹی لمبائی سے 3 سم زیادہ اور تیسری لمبائی سب سے چھوٹی لمبائی سے دوگنی، سب سے چھوٹے بورڈ کی ممکن لمبائیاں کیا ہوں گی اگر تیسرا ٹکڑا دوسرے ٹکڑے سے کم سے کم 5 سم لمبا ہو؟

[اشارہ: اگر سب سے چھوٹے بورڈ کی لمبائی x ہو تب دوسرے اور تیسرے ٹکڑے کی لمبائیاں بالترتیب $(x+3)$ اور $2x$ ہوں گی۔ اس لیئے $x+(x+3)+2x \le 91$ اور $2x \ge (x+3)+5$]۔

6.4 دو متغیروں میں خطی نامساواتوں کا گرافی حل

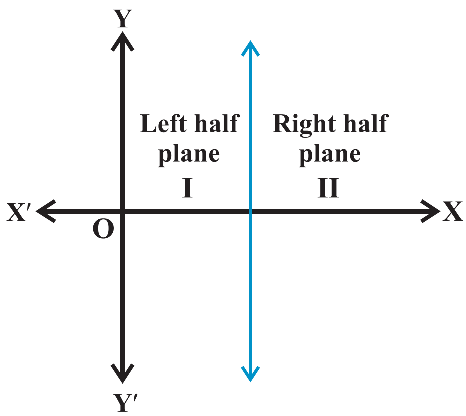
(Graphical Solution of Linear Inequalities in Two Variables)

پچھلے سیکشن میں ہم یہ دیکھ چکے ہیں کہ ایک متغیر والی نامساوات کا گراف ایک دکھائی دینے والا اظہار ہے اور نامساوات کے حل کو ظاہر کرنے کا آسان طریقہ ہے۔ اب ہم دو متغیروں والی نامساوات کے گراف پر بحث و مباحثہ کریں گے۔

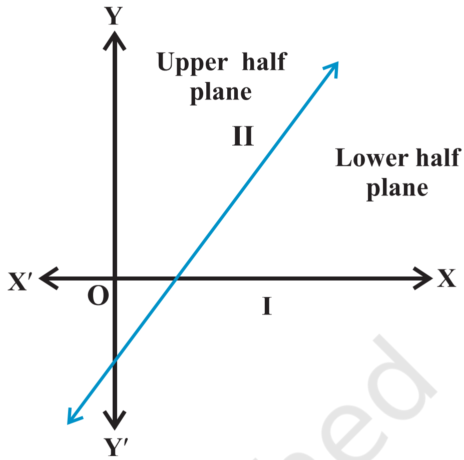
ہم یہ جانتے ہیں کہ ایک خط کارتیزی مستوی کو دو حصوں میں بانٹا ہے۔ ہر ایک حصہ آدھی مستوی کہلاتا ہے۔ ایک راسی (vertical) خط مستوی کو بائیں اور دائیں آدھی مستوی میں باٹیں گے اور غیر راسی خط مستوی کو نچلے اور اوپری آدھی مستوی میں بانٹیں گے (شکل 6.3 اور 6.4)

کارتیزی مستوی میں ایک نقطہ یا تو خط پر ہوگا یا پھر دونوں آدھی مستوی I یا II پر ہوگا۔ اب ہم مستوی میں نقاط اور نامساواتوں $ax+by<c$ یا $ax+by>c$ کے بیچ اگر کوئی رشتہ ہے تو اس کی جانچ کریں گے۔

اب ہم اس خط کو لیتے ہیں۔



شکل 6.3



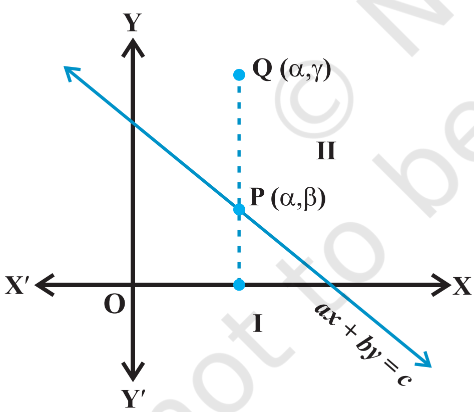
شکل 6.4

$$ax+by=c,\ a\neq 0,\ b\neq 0 \qquad \ldots(1)$$

یہاں تین ممکنات ہیں

(i) $ax+by=c$ (ii) $ax+by>c$ (iii) $ax+by<c$

کیس (i) میں صاف طور پر تمام نقطے (x,y) جو (i) کو مطمئن کرتے ہیں اس خط پر ہیں جو یہ اظہار (دکھاتے) ہیں اور اس کے برعکس کیس (ii) پر غور کیجیے، ہم پہلے مانتے ہیں کہ $b>0$ ایک نقطہ $P(\alpha,\beta)$ خط $ax+by=c$، $b>0$ پر لیجیے۔ تا کہ $a\alpha+b=c$ ایک اختیاری (arbitrary) نقطہ $Q(\alpha,\gamma)$ آدھی مستوی ii میں لیجیے (شکل 6.5)



شکل 6.5

اب شکل 6.5 سے ہم یہ ترجمانی کرتے ہیں۔

$\gamma>\beta$ (کیوں؟)

یا $b\gamma>b\beta$

یا $a\alpha+b\gamma>a\alpha+b\beta$ (کیوں؟)

یا $a\alpha + b\gamma > c$ یعنی اس کا مطلب ہے $Q(\alpha, \gamma)$ نامساوات $ax+by>c$ کو مطمئن کرتا ہے۔

اس طرح اگر کوئی بھی نقطہ آدھی مستوی II میں موجود ہے $ax+by>c$ کو مطمئن کرتا ہے، اور اس کے برعکس کوئی بھی نقطہ جو نامساوات $ax+by>c$ کو مطمئن کرتا ہے آدھی مستوی II میں واقع ہے۔

اگر $b<0$ ہے تو اس حالت میں یکساں طور پر ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ کوئی نقطہ جو $ax+by<c$ کو مطمئن کرتا ہے آدھی مستوی I میں واقع ہے اور اس کے برعکس۔

اس طرح ہم اس نتیجے پر پہنچے ہیں کہ وہ تمام نقاط جو $ax+by>c$ کو مطمئن کرتے ہیں آدھی مستوی I یا II میں واقع ہیں اور $b>0$ یا $b<0$ پر مبنی ہے اور اس برعکس۔

اس طرح نامساوات $ax+by>0$ کا گراف ایک آدھی مستوی ہوگا (جسے ہم حل کی حد کہیں گے) اور اس کا اظہار ہم مطلوبہ آدھی مستوی میں شیئر کر کے کریں گے۔

نوٹ 1 وہ خطہ (علاقہ) جن میں نامساوات کے تمام حل موجود ہوں خطہ حل کہلاتا ہے۔

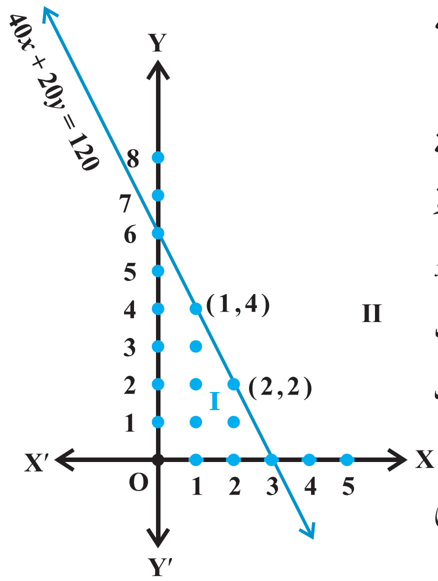
2. نامساوات کے اظہار کے ذریعہ آدھی مستوی کی شناخت کے لیے یہ کافی ہے کہ کوئی بھی نقطہ (a, b) لیجئے (جو خط پر نہیں ہو) اور یہ جانچ کیجئے کہ کیا یہ نامساوات کو مطمئن کرتا ہے یا نہیں۔ اگر یہ مطمئن کرتا ہے تب نامساوات آدھی مستوی کا اظہار کرتی ہے اور اس خطہ کو شیئر کر دیجئے جس میں نقطہ واقع ہے ورنہ نامساوات اس آدھی مستوی کا اظہار کرے گی جس میں نقطہ موجود نہیں ہے۔ آسانی کے لیے نقطہ (o,o) کو ترجیح دی گئی ہے۔

3. اگر کوئی نامساوات $ax + by \geq c$ یا $ax + by \leq c$ کی طرح کی ہے، تب خط $ax+by=c$ پر موجود نقاط خطہ حل میں بھی شامل ہیں۔ اس لیے خطہ حل میں ایک گہری لائین (خط) کھینچئے۔

4. اگر کوئی نامساوات $ax+by>c$ یا $ax+by<c$ شکل کی ہے، تب خط $ax+by$ پر موجود نقاط خطہ حل میں شامل نہیں ہیں۔ اس لیے خطہ حل میں ٹوٹی ہوئی لائین یا بندی لائین (خط) کھینچئے

سیکشن (حصہ) 6.2 میں ہمیں ذیل خطی نامساواتیں حاصل ہوئیں ہیں جو x اور y دو متغیریں ہیں:

$$40x + 20y \leq 120 \quad \text{(I)....}$$



شکل 6.6

جب ہم ریشما کے ذریعے خریدے گئے رجسٹرس اور پینوں کے لفظی مسئلہ کا ترجمہ کرتے ہیں۔

اب ہم یہ دھیان میں رکھتے ہوئے کہ x اور y صرف مکمل اعداد ہوسکتے ہیں اس نامساوات کو حل کرتے ہیں، کیونکہ کسی بھی اشیاء کی تعداد نہ تو کسر میں ہوسکتی ہے اور نہ ہی منفی اعداد میں۔ اس حالت میں ہم x اور y کے جوڑوں کی قیمتیں نکالتے ہیں جو بیان (1) کو درست بنادیتا ہے۔ حقیقت میں اسطرح کے جوڑوں کا سیٹ نامساوات (1) کا حل ہوگا۔

اس سے شروع کرنے کیلئے مان لیجئے $x = 0$ تب (i) کی L.H.S ہے

$$40x+20y=40(0)+20y=20y$$

اس لیے ہمارے پاس ہے

$20y \leq 120$ یا $y \leq 6$ (2)

$x=0$ کے مطابق y کی قیمتیں صرف 6,5,4,3,2,1,0 ہوسکتی ہیں

اس حالت میں (i) کے حل

(0,6)(0,5),(0,4),(0,3),(0,2),(0,1),(0,0) ہیں۔

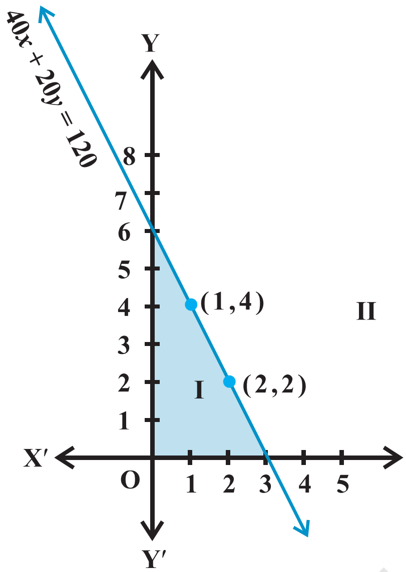
مشابہت کے طور پر اگر x=1,2,3 ہے تو (i) کے دوسرے حل ہیں, (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4) (2,0), (2,1) (2,2)(3,0)

یہ شکل 6.6 میں دیکھایا گیا ہے۔

اب ہمیں x اور y کا حلقہ مکمل اعداد سے حقیقی اعداد تک بڑھانا چاہئے اور یہ دیکھنا چاہئے کہ اس کیس میں (i) کے حل کیا ہوں گے آپ یہ دیکھیں گے کہ حل کرنے کا گرافی طریقہ اس کیس میں بہت مددگار ثابت ہوگا۔ اس کام کیلئے ہمیں (اس کے مطابق) مساوات پر غور کرنا چاہیے اور اس کا گراف کھینچنا چاہئے۔

$40x+20y=120$ ....(3) نا مساوات (i) کا

گراف بنانے کے سلسلے میں ہم آدھی مستوی I میں ایک نقطہ (0,0) (مان لیجئے)۔ لیتے ہیں اور یہ جانچ کرتے ہیں کہ کیا x اور y کی قدریں نا مساوات کو مطمئن کرتی ہیں یا نہیں۔



شکل 6.7

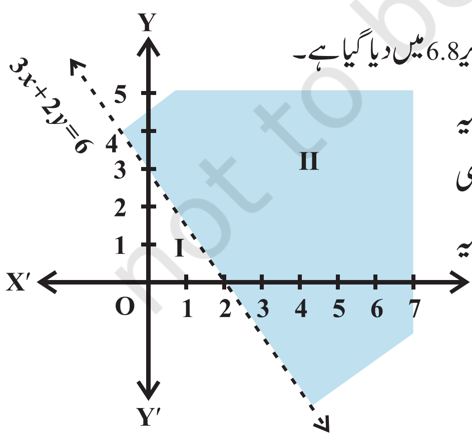
ہم نے یہ دیکھا کہ $x=0, y=0$ نا مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ اس لیے ہم کہتے ہیں کہ آدھی مستوی نا مساوات (مشکل 6.7 میں دیکھایا گیا ہے) کا گراف ہے کیونکہ خط پر موجود نقاط اوپر نا مساوات (i) کو بھی مطمئن کرتے ہیں، خط بھی گراف کا ایک حصّہ ہے۔

اس لیے دی ہوئی نا مساوات کا گراف آدھی مستوی I مع خود خط کے ہے۔ صاف طور پر آدھی مستوی II گراف کا حصّہ نہیں ہے اسلئے، نا مساوات (i) کے حل میں اسکے تمام نقطہ جو گراف میں ہیں شامل ہیں (آدھی مستوی I خط کے ساتھ)

اب ہم دو متغیر والی خطی مساواتوں کو حل کرنے کے طریقے پر کچھ مثالوں کو لے کر غور کریں گے

مثال 9 $3x+2y<6$ کو گراف کے ذریعے حل کیجئے۔

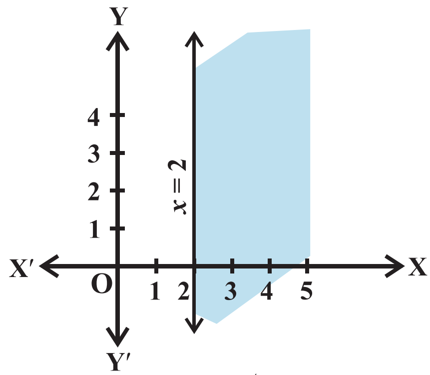
حل $3x+2y=6$ کا گراف ایک نقاط والے خط کی شکل میں تصویر 6.8 میں دیا گیا ہے۔



شکل 6.8

یہ خط xy- مستوی کو دو برابر آدمی سویوں I اور II میں باٹتا ہے،، ہم یہ نقطہ چنتے ہیں (جو خط پر نہں ہے) مان لیجئے (0,0) جو ایک آدھی مستوی میں واقع ہے (شکل 6.8) اور یہ معلوم کرتے ہیں کہ کیا یہ نقطہ دی ہوئی نا مساوات کو مطمئن کرتا ہے، ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ $3(0)+2(0)>6$

یا $0>6$ جو کہ غلط ہے



شکل 6.9

اس لیے آدھی مستوی I دی ہوئی نامساوات کا حل نہیں ہے۔
صاف طور پر خط پر موجود کوئی بھی نقطہ دی ہوئی نامساوات کو سختی سے مطمئن نہیں کرتا۔ دوسرے الفاظ میں سایہ دار آدھی مستوی II نامساوات کا خطہ حل ہے جس میں خط پر موجود نقاط نہیں ہیں۔

مثال 10 $3x-6\ge 0$ کو گراف کے ذریعہ پیمائش والی مستوی میں حل کیجیے۔

حل $3x-6=0$ کا گراف شکل 6.9 میں دیا گیا ہے۔

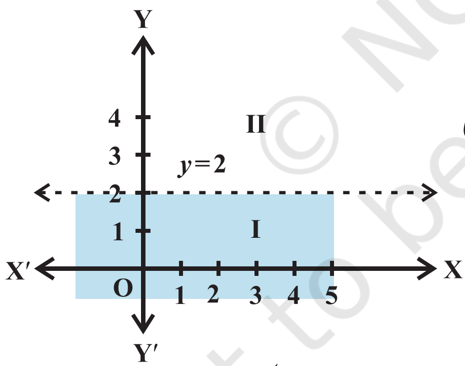
مان لیا (0,0) ہم ایک نقطہ چنتے ہیں اور دی ہوئی نامساوات میں اسکا مقام بدل کر رکھتے ہیں ہم دیکھتے ہیں کہ

$2-(0)-3\ge 0$ یا $-3\ge 0$ جو کہ غلط ہے۔

اس لئے حل کا خطہ $x=2$ کی سیدھے ہاتھ کی طرف سایہ دار خطہ ہے

مثال 11 $y<$ کو گراف کے ذریعہ حل کیجیے۔

حل $y=2$ کا گراف شکل 6.10 میں دیا گیا ہے۔



شکل 6.10

ہمیں ایک نقطہ (0,0) نیچی آدھی مستوی I میں چننا چاہئے اور $y=0$ دی ہوئی نامساوات میں رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ $1*0<2$ یا $0<2$ جو کہ درست ہے۔

اس لیے خطہ حل خط $y=2$ کے نیچے سایہ دار خطہ ہے اس لیے، خط کے نیچے ہر نقطہ (خط کے تمام نقطوں کو چھوڑ کر) دی ہوئی نامساوات کا حل نکالتے ہیں۔

مشق 6.2

ذیل میں دی ہوئی مساواتوں کو گراف کے ذریعہ دو پیمائش والی مستوی میں حل کیجیے

.1 $x+y<5$ .2 $2x+y\ge 6$ .3 $3x+4y\le 12$

.4 $y+8\geq 2x$ **.5** $x-y\leq 2$ **.6** $2x-3y>6$

.7 $-3x+2y\geq -6$ **.8** $3y-5x<309$ **.9** $y<-2$

.10 $x>-3$

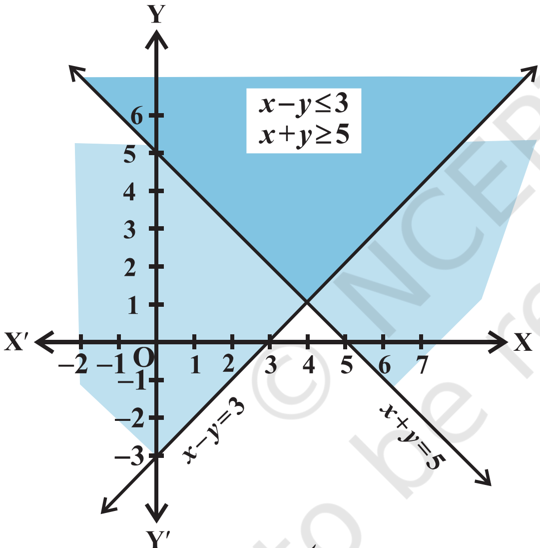
6.5 دو متغیروں میں خطی نامساواتوں کے نظام کا حل
(Solution of System of Linear Inequalities in Two Variables)

پچھلے سیکشن میں تم نے پڑھا ہوگا کہ کسطرح خطی نامساوات کو ایک یا دو متغیر میں گراف کے ذریعے حل کیا جاتا ہے۔ اب ہم کچھ مثالوں کے ذریعے یہ دکھائیں گے کہ کس طرح دو متغیر والی خطی نامساواتوں کے نظام گراف کے ذریعے حل کیا جاتا ہے۔

مثال 12 ذیل خطی نامساواتوں کے نظام کو گراف کے ذریعے حل کیجئے۔

$x+y\geq 5$ (1)

$x-y\leq 3$ (2)



شکل **6.11**

حل خطی مساوات $x+y=5$ کا گراف شکل 6.11 میں کھینچا گیا ہے۔

ہم نوٹ کرتے ہیں کہ نامساوات (1) کا حل سایہ دار خطہ سے خطہ $x+y=5$ کے اوپر دیکھایا گیا ہے جس میں خط پر موجود نقاط بھی شامل ہیں۔

محاور (axis) کے اسی سیٹ پر ہم مساوات $x-y=3$ کا گراف کھینچتے ہیں جیسا کہ شکل 6.11 میں دیکھایا گیا ہے۔ پھر ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ نامساوات (2) سایہ دار خطہ $x-y=3$ کے اوپر اظہار کرتی ہے جس میں خط پر موجود نقاط بھی شامل ہیں۔ صاف طور پر دوہرا سایہ خطہ اوپر دیتے ہوئے دونوں سایئے والے خطوں میں شامل ہے یہ دی ہوئی نامساواتوں کے نظام کا مطلوبہ حل ہے۔

مثال 13 ذیل میں دی ہوئی نامساواتوں کو گراف کے ذریعہ حل کیجئے۔

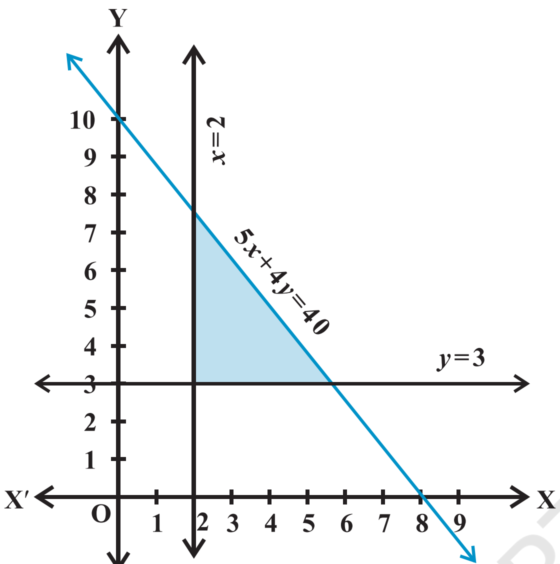
(1)... $5x+4y\le 40$

(2)... $x\ge 2$

(3)... $y\ge 3$

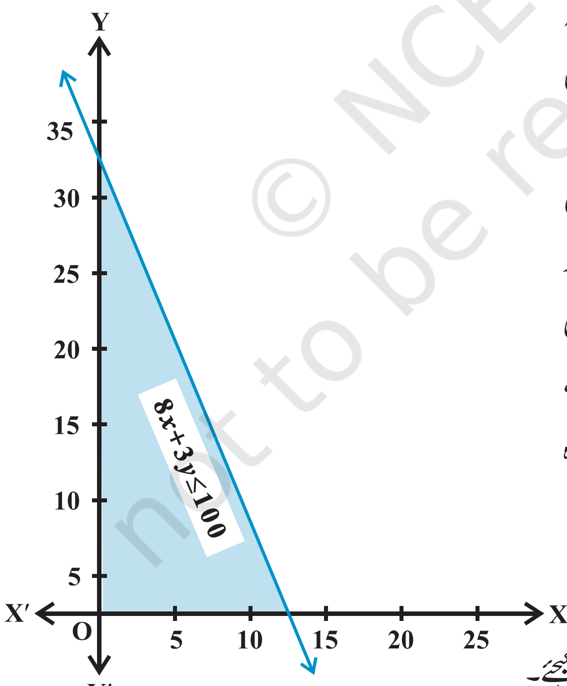
حل ہم پہلے خطوں $5x+4y=40$، $x=2$ اور $y=3$ کے گراف کھینچتے ہیں۔

پھر ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ نامساوات (1) خط $5x+4y=40$ کے نیچے سایہ دار خطہ کا اظہار کرتی ہے اور نامساوات (2) خط $y=2$ کے دائیں طرف سایہ دار خطے کا اظہار کرتی ہے لیکن نامساوات (3) خط $y=3$ کے اوپر سایہ دار خطہ کا اظہار کرتی ہے۔ اس لئے سایہ دار خطہ (شکل 6.12) جس میں خطوں کے اوپر تمام نقطہ شامل ہیں۔ دی ہوئی نامساواتوں کے حل ہیں۔



شکل 6.12

بہت سے تجرباتی حالات میں جن میں نامساواتوں کے نظام شامل ہیں متغیر x اور y عام طور پر مقداروں کا اظہار کرتے ہیں جن کی منفی قدریں نہیں ہوتی مثال کے طور پر حاصل شدہ اکائیوں کی تعداد، خریدی گئی اشیاء کی تعداد، کتنے گھنٹے کام کیا گیا وغیرہ صاف طور پر اسطرح کے کیسوں میں $x\ge 0, y\ge 0$ اور خطہ حل صرف پہلے ربع میں ہے۔



شکل 6.13

مثال 14 ذیل میں دیئے گئے نامساواتوں کی نظام کو حل کیجیے۔

(1)... $8x+3y\le 100$

$x \geq 0$ ...(2)

$y \geq 0$ ...(3)

حل ہم خط $8x+3y=100$ کا گراف کھینچتے ہیں۔

نامساوات $8x+3y \leq 100$ لائن کے نیچے سایہ دار خطہ کا اظہار کرتی ہے، جس میں لائن $8x+3y=100$ پر موجود نقطے بھی شامل ہیں (شکل 6.13)

کیونکہ $x \geq 0$، $y \geq 0$ ہر نقطہ، سایہ دار خطہ اور پہلے ربع میں، جس میں خط اور محاور پر موجود نقطہ شامل ہیں، دی ہوئی نامساواتوں کے حل کو ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 15 ذیل میں دیئے گئے نامساواتوں کے نظام کو گراف کے ذریعہ حل کیجیے

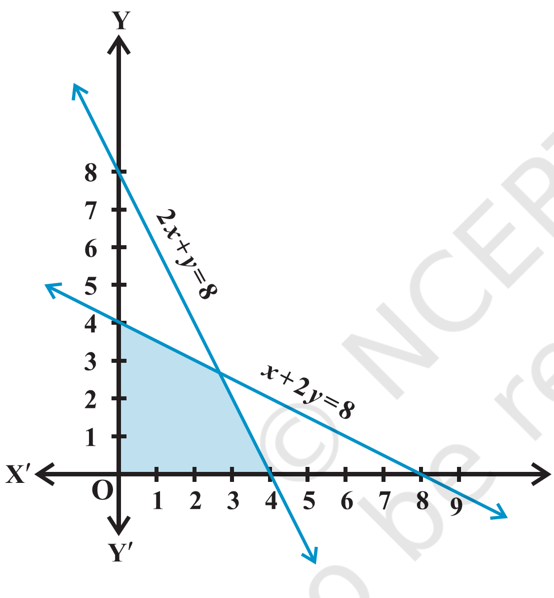
$x+2y \leq 8$ ...(1)

$2x+y \leq 8 \geq$ ...(2)

$x \geq 0$ ...(3)

$y \geq 0$ ...(4)

حل ہم خطوط $x+2y=8$ اور $2x+y=8$ کے گراف کھینچتے ہیں نامساوات (1) اور (2) دو خطوط کے نیچے کا خطہ اظہار کرتی ہیں جن میں خطوں پر موجود نقطہ بھی شامل ہیں۔



شکل 6.14

کیونکہ $x \geq 0$، $y \geq 0$ سایہ دار خطہ میں موجود ہر نقطہ جو پہلے ربع میں ہے دی ہوئی نامساواتوں کے نظام کے حل کو ظاہر کرتا ہے۔ (شکل 6.14)

مشق 6.3

ذیل میں دی گئی نامساواتوں کے نظام کو گراف کے ذریعے حل کیجیے۔

1. $x \geq 3, y \geq 2$

2. $3x+2y \leq 12, x \geq 1, y \geq 2$

3. $2x+y\ge 6, 3x+4y\le 12$
4. $x+y>4, 2x-y>0$
5. $2x-y>1, x-2y<-1$
6. $x+y\le 6, x+y\ge 4$
7. $2x+y\ge 8, x+2y\ge 10$
8. $x+y\le 9, y>x, x\ge 0$
9. $5x+4y\le 20, x\ge 1, y\ge 2$
10. $3x+4y\le 60, x+3y\le 30, x\ge 0, y\ge 0$
11. $2x+y\ge 4, x+y\le 3, 2x-3y\le 6$
12. $x-2y\le 3,\ 3x+4y\ge 12,\ x\ge 0,\ y\ge 1$
13. $4x+3y\le 60,\ y\ge 2x,\ x\ge 3,\ x,y\ge 0$
14. $3x+2y\le 150, x+4y\le 80, x\le 15, y\ge 0$
15. $x+2y\le 10,\ x+y\ge 1,\ x-y\le 0,\ x\ge 0,\ y\ge 0$

متفرق مثالیں

مثال 16 $-8\le 5x-3<7$ کو حل کیجیے۔

حل اس کیس میں ہمارے پاس دونا مساواتیں ہیں۔ $-8\le 5x-3$ اور $5x-3<7$ ہیں جو ہم ساتھ ساتھ حل کریں گے ہمارے پاس ہے۔

$$-8\le 5x-3<7$$

یا $$-5\le 5x<10$$

یا $$-1\le x<2$$

مثال 17 $-5\le \dfrac{5-3x}{2}\le 8$ کو حل کرو۔

حل ہمارے پاس ہے $-5\le \dfrac{5-3x}{2}\le 8$

یا $-10\le 5-3x\le 16$ یا $-15\le -3x\le 16$

یا $5 \geq x \geq \dfrac{-11}{3}$

جواس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے $\dfrac{-11}{3} \leq x \leq 5$

مثال 18 نامساواتوں کے نظام کو حل کیجئے:

$$3x - 7 < 5 + x \qquad (1)...$$

$$11 - 5x \leq 1 \qquad (2)...$$

اور حل کو عددی خط پر ظاہر کیجئے۔

حل نامساوات (1) سے، ہمارے پاس ہے

$$3x - 7 < 5 + x$$

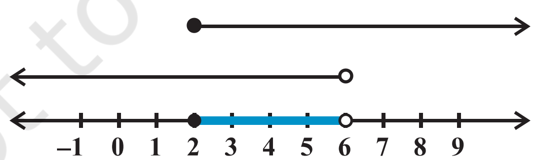
یا $x < 6 \qquad (3)...$

ساتھ ہی نامساوات (2) سے، ہمارے پاس ہے

$$11 - 5x \leq 1$$

یا $-5x \leq -10$ یعنی $x \geq 2 \qquad (4)...$

اگر ہم نامساواتوں (3) اور (4) گراف عددی خط پر کھینچیں ہم دیکھتے ہیں کہ x کی قیمتیں جو دونوں میں موجود ہیں۔ انہیں موٹے خط سے شکل 6.16 میں دیکھا گیا ہے۔



شکل **6.15**

اس لیے حل کا نظام حقیقی اعداد x ہیں جو 2 اور 6 کے درمیان ہے جس میں 2 بھی شامل ہے۔ اسکا مطلب $2 \leq x < 6$ ۔

مثال 19 ایک تجربہ میں نمک کے تیزاب کے حل کو 30^0 اور 35^0 سلیس کے درمیان رکھنا ہے۔ درجہ حرارت کا خطہ فارن

ہائیٹ درجہ میں کیا ہوگا اگر بدلنے کا ضابطہ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ کے ذریعے دیا گیا ہے۔ جہاں C اور F درجہ حرارت سلیس اور درجہ فارن ہائیٹ کو ظاہر کرتے ہیں۔

حل یہ دیا ہوا ہے کہ $30 < C < 35$

$C = \frac{5}{9}(F-32)$ رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$30 < \frac{5}{9}(F-32) < 35$$

یا $$\frac{9}{5}\times(30) < (F-32) < \frac{9}{5}\times(35)$$

یا $$54 < (F-32) < 63$$

یا $$86 < F < 95$$

اس لیے درجہ حرارت کا درکار خطہ $86^0 F$ اور $95^0 F$ کے درمیان ہے۔

مثال 20 ایک صنعت کار کے پاس تیزاب کے 12% حل کی مقدار 600 لیٹر ہیں۔ اس میں 30% تیزاب کا حل کتنا ملایا جائے تاکہ نتیجتاً آمیزہ میں تیزاب کی مقدار 15% سے زیادہ اور 30% سے کم ہو؟

حل مان 30% تیزاب کا مطلوبہ حل x لیٹر ہے جو ملانا ہے۔ تب

کل آمیزہ $= (x+600)$ لیٹر

اس لیے $$30\%x + 12\% \text{ of } (600) > 15\% \text{ of } (x+600)$$

اور $$30\%x + 12\% \text{ of } (600) < 18\% \text{ of } (x+600)$$

یا $$\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) > \frac{5}{100}(x+600)$$

اور $$\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) < \frac{18}{100}(x+600)$$

یا $$30x + 7200 > 15x + 9000$$

اور $$30x + 7200 > 18x + 10800$$

یا $12x < 3600$ اور $15x > 1800$

یا $x < 300$ اور $x < 120$

یعنی $120 < x < 300$

اس لیے تیزاب کا 30% حل 120 لیٹر سے زیادہ اور 300 لیٹر سے کم ہونا چاہئے۔

متفرق مشق

نامساواتیں مشق 1 سے 6 حل کیجئے.

.1 $2 \le 3x - 4 \le 5$

.2 $6 \le -3(2x-4) < 12$

.3 $-3 \le 4 - \dfrac{7x}{2} \le 18$

.4 $-15 < \dfrac{3(x-2)}{5} \le 0$

.5 $-12 < 4 - \dfrac{3x}{-5} \le 2$

.6 $7 \le \dfrac{(3x+11)}{2} \le 11$

نامساواتیں مشق 7 تا 11 حل کیجئے اور حل گراف کے ذریعے عددی خط پر ظاہر کیجئے۔

.7 $5x + 1 > -24, \ 5x - 1 < 24$

.8 $3(x+2) > 2 - x, \quad 2(x-1) < x + 5,$

.9 $6 - x > 11 - 2x, \quad 3x - 7 > (x - 6),$

.10 $5(2x-7) - 3(2x+3) \le 0, \quad 2x + 19 \le 6x + 47$

.11 ایک حل 68^0F اور 77^0F کے درمیان رکھنا ہے۔اس کا خطہ درجہ حرارت میں درجہ سلیس (c) میں کیا ہوگا اگر سلیس/فارن ہائٹ (F) کی تبدیلی کا ضابطہ $F = \dfrac{9}{5}C + 32$ سے دیا گیا ہے

.12 ایک 8% بورک ایسڈ کا حل 2% بورک ایسڈ کا حل ڈال کر پتلا کرنا ہے۔نتیجتاً آمیزہ 4% سے زیادہ اور 6% سے کم بورک ایسڈ ہونا چاہئے اگر

ہمارے پاس 640 لیٹر 8% حل ہو تو بتایئے 2% حل کا کتنے لیٹر ملانا پڑے گا۔

.13 1125 لیٹر 45% حل کے تیزاب میں کتنے لیٹر پانی ملانا پڑے گا تا کہ نتیجتاً آمیزہ میں 25% سے زیادہ اور 30% سے کم تیزاب موجود ہو؟

14. ایک انسان کی IQ اس ضابطے سے دی گئی ہے

$$IQ=\frac{MA}{CA}\times 100$$

جہاں MA دماغی (ذہنی) عمر ہے اور CA تواریخ کے مطابق (اصل) عمر ہے۔ اگر $80 \le IQ \le 140$۔ 12 سال کے بچوں کے گروپ کیلئے تو ان کی دماغی عمر کا خطہ (سمت) معلوم کیجئے۔

خلاصہ (Summary)

- دو حقیقی اعداد یا دو الجبری عبارتیں جو $<$، $>$، $\le$ یا $\ge$ علامتوں سے جڑی ہوں ایک نامساوات بناتی ہیں۔
- نامساوات کے دونوں طرف یکساں (برابر) اعداد کو جوڑا (یا گھٹایا) جاسکتا ہے۔
- نامساوات کو دونوں طرف سے ضرب (یا تقسیم) یکساں برابر کے مثبت عدد سے کیا جاسکتا ہے لیکن جب دو طرف کو ضرب (یا تقسیم) کسی منفی عدد سے کی جائے گی تو نامساوات کا نشان پلٹ جائے گا۔
- x کی قدر جو نامساوات کو ایک درست بیان بنادے، نامساوات کے حل کہلاتے ہیں۔
- $x<a$ (یا $x>a$) کو ایک عددی خط پر دیکھانے کیلئے عدد a پر دائرہ کھینچئے اور عدد a کے بائیں (یا دائیں) طرف خط کو گہرا (dark) کردیجئے۔
- $x \le a$ (یا $x \ge a$) کو ایک عددی خط پر دیکھانے کے لیے عدد a پر دائرہ کھینچئے اور عدد کے بائیں (یا دائیں) طرف خط کو گہرا (dark) دیجئے۔
- اگر ایک نامساوات میں علامت $\le$ یا $\ge$ موجود ہے تب خط پر موجود نقاط بھی نامساوات کے حل میں شامل ہیں اور نامساوات کا گراف بائیں (نیچے) یا دائیں (اوپر) برابری کے گراف پر آتا ہے جسے گہرے خط سے دکھایا جاتا ہے جو اس حصّہ میں اختیاری نقط کو مطمئن کرتا ہے۔
- اگر ایک نامساوات میں علامت $<$ یا $>$ ہے تب خط پر موجود نقاط حل میں شامل نہیں ہونگے اور نامساوات کا گراف دائیں (نیچے) یا دائیں (اوپر) ہوگا اور مساوات کے گراف مطابق dotted line ہے دکھایا جائے گا جو ایک اختیاری نقطہ (arbitary point) کو اس حصہ میں مطمئن کرتا ہے۔
- نامساواتوں کے نظام کا حل کا علاقہ (خطہ) وہ خطہ ہے جو تمام دی گئی مساواتوں کو مطمئن کرتا ہے بیک وقت نظام میں۔