1 ضمیمہ 1

لامتناہی سلسلئی
(INFINITE SERIES)

A.1.1 تعارف (Introduction)

جیسا کہ ہم باب نمبر 9 تواترات اور سلسلئی میں بحث ومباحثہ کر چکے ہیں، کہ ایک تواتر ... ,$a_1, a_2, ..., a_n$ جس میں ارکان کی تعداد لامتناہی ہو، لامحدود تواتر کہلاتی ہے اور اس کا مجموعہ، یعنی ... $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ لامحدود تواتر کے ساتھ جڑا ہے۔ اس سلسلئی مختصر شکل میں سگما (Sigma) علامت کا استعمال کر کے دکھایا جاسکتا ہے۔ یعنی

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

اس سبق میں ہم کچھ خاص قسم کی سلسلی کے بارے میں پڑھیں گے جن کی ضرورت مختلف مسٔلوں کے حالات میں ہوتی ہے۔

A.1.2 کسی بھی قوت نما کے لئے دورکنی مسٔلہ Bionomial Theorem for any Index

باب 8 میں ہم نے دورکنی مسٔلہ پر بحث ومباحثہ کیا ہے جس میں قوت نما ایک مثبت صحیح عدد تھا۔ اس سیکشن میں ہم مسٔلہ کی کمی اور زیادہ عام شکل بیان کریں گے جس میں یہ ضروری نہیں ہے کہ قوت نما ایک مکمل عدد (Whole number) ہو۔ یہ ہمیں ایک خاص قسم کی لامتناہی سلسلئی دیتا ہے، جو دورکنی سلسلئی کہلاتی ہے۔

ہم فارمولہ جانتے ہیں

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\ x + ... + {}^nC_n\ x^n$$

یہاں n غیر منفی صحیح عدد ہے۔ دیکھیئے کہ اگر ہم قوت نما n کو کسی منفی صحیح عدد یا کسر (fraction) سے تبدیل کردیں، تب اجتماع ${}^nC_r$ کا کوئی مطلب نہیں نکلتا۔

اب ہم بیان کرتے ہیں، دورکنی مسٔلہ جو ایک لامحدود سلسلئی دیتا ہے اور جس میں قوت نما منفی ہے یا ایک کسر ہے اور ایک

© NCERT not to be republished

مکمل عدد نہیں ہے۔

مسئلہ فارمولہ

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

holds whenever $|x| < 1$.

ریمارک 1 اس شرط کو احتیاط سے نوٹ کر لیجیے کہ $|x| < 1, \text{i.e.}, -1 < x < 1$ ضروری ہے جب کہ m منفی ہے یا کسر ہے۔مثال کے طور پر اگر ہم $x = -2$ اور $m = -2$ لیں، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(1-2)^{-2} = 1 + (-2)(-2) + \frac{(-2)(-3)}{1.2}(-2)^2 + \ldots$$

یا

$$1 = 1 + 4 + 12 + \ldots$$

یہ ممکن نہیں ہے۔

2. یہ نوٹ کر لیجیے کہ $(1+x)^m$ کے پھیلاؤ میں ارکان کی تعداد لامحدود ہے، جہاں m ایک منفی صیح عدد ہے یا ایک کسر ہے۔

غور کیجیے

$$(a+b)^m = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$$

$$= a^m\left[1 + m\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$= a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \ldots$$

یہ پھیلاؤ جائز ہے جب کہ $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ اور اس کے برابر جب کہ $|b| < |a|$

$(a+b)^m$ کے پھیلاؤ میں عام رکن ہے

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)a^{m-r}b^r}{1.2.3\ldots r}$$

ہم ذیل میں دورکنی مسئلہ کے کچھ خاص Case دے رہے ہیں، جب ہم لیتے ہیں $|x| < 1$ ، یہ طلبا کے لیے مشق کے طور پر چھوڑے گئے ہیں۔

© NCERT not to be republished

.1 $(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+...$

.2 $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+x^3+...$

.3 $(1-x)^{-2} = 1-2x+3x^2-4x^3+...$

.4 $(1-x)^{-2} = 1+2x+3x^2+4x^3+...$

مثال 1 پھیلائیے $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$، جب کہ $|x|<1$

حل ہمارے پاس

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1}\left(\frac{-x}{2}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1.2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+...$$

$$= 1+\frac{x}{4}+\frac{3x^2}{32}+...$$

A.1.3 لامحدود جیومیٹریہ سلسلئی Infinite Geometric Series

باب 9 سے سیکشن 9.3، ایک تواتر $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ **G.P** کہلاتی ہے، اگر $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ $k = 1, 2, 3, ..., n-1$ کے لیے۔ خاص طور پر اگر ہم $a_1 = a$ لیں، تب نتیجتاً تواتر $a, ar, ar^2, ...ar^{n-1}$ **G.P** کو معیاری شکل کے طور دیکھا جاتا ہے۔ جہاں a پہلا رکن اور r **G.P** کی مشترک نسبت ہو۔

پہلے ہم محدود سلسلئی $a+ar+ar^2+...+ar^{n-1}$ کا مجموعہ نکالنے کے فارمولے پر بحث ومباحثہ کر چکے ہیں۔ جو کہ اس طرح دیا گیا ہے

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

اس سیکشن (حصہ) میں ہم لامحدود جیومیٹریہ سلسلی $a+ar+ar^2+...+ar^{n-1}+...$ کا مجموعہ نکالنے کا فارمولہ بیان کریں گے۔

ہم **G.P**، $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, ...$ پر غور کرتے ہیں۔

یہاں $a=1$ ، $r=\frac{2}{3}$ ہے، ہمارے پاس ہے

© NCERT not to be republished

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

ہم $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ کے کردار کے بارے میں مطالعہ کرتے ہیں جیسے n بڑا اور بڑا ہوتا جاتا ہے۔

n	1	5	10	20
$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0.6667	0.1316872428	0.01734152992	0.00030072866

ہم نے دیکھا کہ جیسے n بڑا اور بڑا ہوتا جاتا ہے، $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ صفر کے قریب اور قریب ہوتا جاتا ہے۔ ریاضی کے طریقہ سے ہم کہتے ہیں کہ جیسے ہی n بہت بڑا ہو جاتا ہے، $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ بہت زیادہ چھوٹا ہو جاتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں $\left[\frac{2}{3}\right]^\infty \to 0$ ، $n \to \infty$ اس وجہ ہم نے نکالا کہ بہت سے لامحدود ارکان کا مجموعہ S=3 ہے۔

اس طرح، لامحدود جیومیٹریہ سلسلئی کے لیے $a, ar, ar^2, \ldots$ ، اگر r کی عددی قدر مشترک نسبت '1' سے کم ہے تب

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

اس کیس میں $r^n \to 0 \; as \; n \to \infty \text{ since } |r| < 1 \text{ and then } \frac{ar^n}{1-r} \to 0$

اس لیے $S_n \to \frac{a}{1-r} \text{ as } n \to \infty$

علامتی طور پر، لامحدود جیومیٹریہ سلسلئی کا لاانتہائی کا جوڑ 'S' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طرح ہمارے پاس $S = \frac{a}{1-r}$

مثال کے طور پر

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{(i)}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{(ii)}$$

مثال 2 G.P کا مجموعہ لاانتہائی تک معلوم کیجیے:

$$\frac{-5}{4}, \frac{5}{16}, \frac{-5}{64}, \ldots.$$

حل یہاں $a = \frac{-5}{4}$ اور $r = -\frac{1}{4}$ ہے۔ ساتھ ہی $|r| < 1$

اس لیے لاانتہائی تک مجموعہ $\frac{\frac{-5}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{-5}{4}}{\frac{5}{4}} = -1$

A.1.4 قوت نما سلسلئی Exponential Series

لیون ہارڈ یولر (1707-1783) (Leonhard Euler) بہت بڑے سوئز ریاضی داں نے عدد 'e' کا تعارف اپنی کیل کولس کی کتاب میں 1748 میں کرایا۔ عدد 'e' Calculus میں اسی طرح کارآمد ہے جس طرح π دائرہ کے مطالعہ میں۔

ذیل اعداد کی لامحدود سلسلئی پر غور کیجیے

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots \qquad \text{(i)....}$$

(1) میں دی گئی سلسلئی کا مجموعہ 'e' سے دکھایا گیا ہے۔

ہمیں عدد e کی قیمت دریافت کرنی چاہیے۔

چونکہ (1) سلسلئی کا ہر رکن مثبت ہے، یہ صاف ہے کہ اس کا مجموعہ بھی مثبت ہے۔

دو مجموعوں پر غور کیجیے

$$\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots\frac{1}{n!}+\ldots \qquad \text{(2)....}$$

اور

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots \qquad \text{(3)....}$$

اس کو دیکھیے

$\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ اور $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$، جو دیتا ہے $\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$

$\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$ اور $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$، جو دیتا ہے $\frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}$

© NCERT not to be republished

$$\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} \text{ اور } \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \text{، جو دیتا ہے } \frac{1}{5!} < \frac{1}{2^4}$$

اس لیے مماثلت (analogy) سے ہم کہہ سکتے ہیں

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ when } n > 2$$

ہم (2) میں دیکھتے ہیں کہ پہلے رکن کے علاوہ ہر رکن اپنے ساتھ ساتھ (3) کے رکن سے چھوٹا ہے۔

اس لیے

$$(4)....\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{n!}\right) < \left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right)$$

(4) کے دونوں طرف $\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)$ کو جوڑنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{n!}+...\right)$$

$$(5).... \quad < \left\{\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right)\right\}$$

$$= \left\{1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right)\right\}$$

$$= 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+2 \quad = 3$$

(5) کی بائیں طرف سلسلئی (1) کا اظہار کرتی ہے، اس لیے $e < 3$ اور ساتھ ہی $e > 2$ اور اس طرح $2 < e < 3$

ریمارک قوت نما سلسلئی کی شمولیت میں اس طرح لکھا (دکھایا) جاسکتا ہے۔

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

مثال 3 e^{2x+3} کے پھیلاؤ میں x^2 کا ضریب معلوم کیجیے جیسے کہ سلسلئی x کی قوت میں ہے۔

حل قوت نما سلسلئی

© NCERT not to be republished

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

x کی جگہ $(2x+3)$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$e^{2x+3} = 1 + \frac{(2x+3)}{1!} + \frac{(2x+3)^2}{2!} + \ldots$$

اس طرح، عام رکن ہے $\dfrac{(2x+3)^n}{n!} = \dfrac{(3+2x)^n}{n!}$

یہ دورکنی مسئلہ سے اس طرح پھیلایا جاسکتا ہے۔

$$\frac{1}{n!}\left[3^n + {}^nC_1 3^{n-1}(2x) + {}^nC_2 3^{n-2}(2x)^2 + \ldots + (2x)^n\right]$$

یہاں x^2 کا ضریب $\dfrac{{}^nC_2 3^{n-2} 2^2}{n!}$ ہے۔اس لیے، مکمل سلسلئی میں x^2 کا ضریب ہے

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{{}^nC_2 3^{n-2} 2^2}{n!}$$

$$2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)3^{n-2}}{n!}$$

$2\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{3^{n\ 2}}{(n-2)!}$ [$n! = n(n-1)(n-2)!$ کا استعمال کرنے پر]

$$= 2\left[1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$= 2e^3$$

اس طرح e^{3x+3} کے پھیلاؤ میں x^2 کا ضریب $2e^3$ ہے۔

متبادل $e^{3x+3} = e^3 \,.\, e^{2x}$

$$= e^3\left[1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \ldots\right]$$

اس طرح e^{3x+3} کے پھیلاؤ میں x^2 کا ضریب ہے $2e^3 = e^3 . \dfrac{2^2}{2!}$

© NCERT not to be republished

مثال 4 e^2 کی قدر ایک اعشاریہ تک معلوم کیجیے۔

حل قوت نما سلسلئی کا فارمولا استعمال کر کے جس میں x شامل ہے۔ ہمارے پاس ہے۔

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$x = 2$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \ldots$$

$$= 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{4}{45} + \ldots$$

$\geq$ پہلے سات ارکان کا مجموعہ ≥ 7.355

دوسری طرف ہمارے پاس ہے

$$e^2 < \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}\right) + \frac{2^5}{5!}\left(1 + \frac{2}{6} + \frac{2^2}{6^2} + \frac{2^3}{6^3} + \ldots\right)$$

$$= 7 + \frac{4}{15} + \left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots\right)$$

$$= 7 + \frac{4}{15} + \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right)$$

$$= 7 + \frac{2}{5} = 7.4$$

اس طرح e^2 7.355 اور 7.4 کے درمین آتا ہے۔ اس لیے e^2 کی قدر ایک اعشاریہ تک 7.4 ہے۔

A.1.5 لوگارتمی سلسلئی Logarithmic Series

ایک دوسری بہت خاص سلسلئی لوگارتمی سلسلئی ہے جو کہ ساتھ ہی لامحدود سلسلئی کی شکل میں ہے۔ ہم بغیر ثابت کیے ہوئے ذیل نتائج کو بیان کررہے ہیں اور اس کے اطلاق کو ایک مثال کے ذریعہ دکھارہے ہیں۔

© NCERT not to be republished

مسئلہ اگر $|x| < 1$، تب

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ....$$

مندرجہ بالا میں سیدھے ہاتھ کی طرف سلسلئی کو لوگارتمی سلسلئی کہا جاتا ہے۔

نوٹ $\log_2(1+x)$ کا پھیلاؤ $x = 1$ کے لیے جائز ہے۔ $\log_2(1+x)$ کے پھیلاؤ میں $x = 1$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$

مثال 5 اگر α، β مساوات $x^2 - px + q = 0$ کے جزر ہے، تو ثابت کیجیے کہ

$$\log_e(1+px+qx^2) = (\alpha+\beta)x - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3+\beta^3}{2}x^3 - ...$$

حل داہنے ہاتھ کی طرف

$$= \left[\alpha x - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^3 x^3}{2} - ...\right] + \left[\beta x - \frac{\beta^2 x^2}{2} + \frac{\beta^3 x^3}{3} - ...\right]$$

$$= \log_e(1+\alpha x) + \log(1+\beta x)$$

$$= \log_e(1+(\alpha+\beta)x + \alpha\beta x^2)$$

بائیں ہاتھ کی طرف $= \log_e(1+px+qx^2)$

یہاں ہم نے $\alpha+\beta = p$ اور $\alpha\beta = q$ حقیقتوں کا استعمال کیا ہے۔ ہم یہ دی ہوئی دورکنی مساوات کے جذروں سے جانتے ہیں۔ ساتھ ہی ہم نے یہ بھی مانا ہے کہ $|\alpha x| < 1$ اور $|\beta x| < 1$ ۔

© NCERT not to be republished