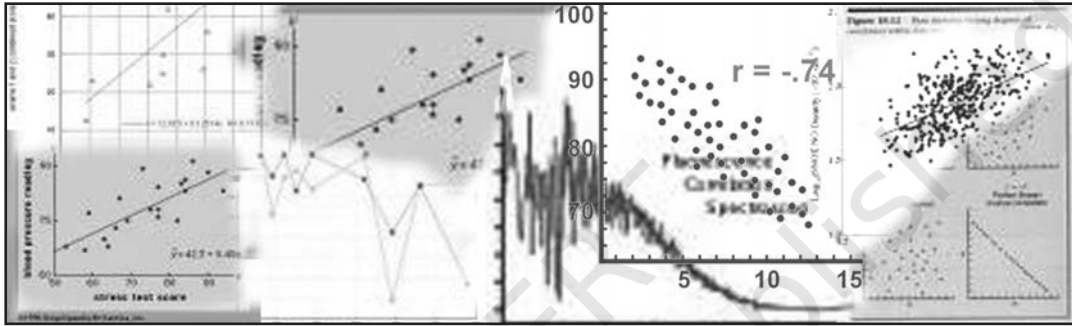




جب گرمی کے موسم میں گرمی بڑھتی ہے، پہاڑی مقامات پر زیادہ سے زیادہ سیاحوں کی بھیڑ بڑھنے لگتی ہے۔ آئس کریم کی فروخت میں زبردست اضافہ ہوتا ہے۔ اس درجہ حرارت کا تعلق سیاحوں کی تعداد اور آئس کریم کی فروخت سے ہے۔ اسی طرح ٹماٹر کی فراہمی آپ کی مقامی منڈی میں بڑھ جاتی ہے، اس کی قیمتیں گھٹ جاتی ہیں۔ جب مقامی فصل بازار میں پہنچنی شروع ہو جاتی ہے ٹماٹر کی قیمت انتہائی اونچی قیمت 40 روپے کلو سے گھٹ کر 4 روپے یا اس سے بھی کم ہو جاتی ہیں۔ اسی طرح فراہمی کا تعلق قیمت سے ہے۔ ہم رشتگی کا تجزیہ اس طرح رشتوں کا نظامی طور پر جائزہ لینے کا ایک وسیلہ ہے۔ اس میں درج ذیل طرح کے سوالات برتے جاتے ہیں:

- اس باب کا مطالعہ کرنے کے بعد اتنی استعداد ہو جانی چاہیے کہ آپ:
- ہم رشتگی (Correlation) اصطلاح کے معنی سمجھ سکیں؛
 - دو متغیرات کے درمیان رشتوں کی نوعیت سمجھ سکیں؛
 - ہم رشتگی کی مختلف پیمائشوں کا شمار کر سکیں؛
 - رشتوں کے درجے اور سمت کا تجزیہ کر سکیں۔

1. تعارف

پچھلے ابواب میں آپ نے سیکھا کہ ڈیٹا کے ابتداء میں خلاصہ پیمائشوں کی تخلیق کیسے کرنی ہوتی ہے اور یکساں متغیرات کے درمیان تبدیلیاں کیسے واقع ہوتی ہیں۔ اب آپ مطالعہ کریں گے کہ دو متغیرات کے درمیان باہم تعلق کا جائزہ کیسے لیا جاتا ہے۔

2. رشتوں کی اقسام

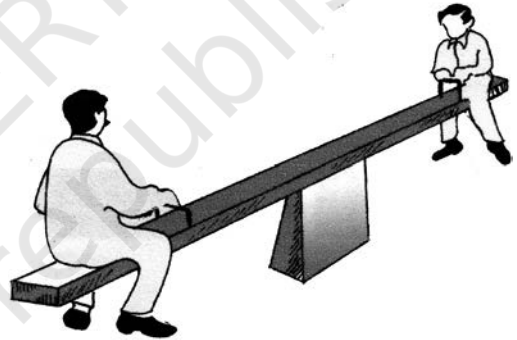
آئیے ہم مختلف قسم کے رشتوں پر ایک نظر ڈالیں۔ مانگ کی گئی مقدار اور شے قیمت میں حرکات کے درمیان رشتہ مانگ یا طلب کے نظریے کا ایک لازمی جزو ہے، جس کے بارے میں آپ کلاس XII میں پڑھیں گے۔ کم بارش کا تعلق کم زراعتی پیداوار سے ہے۔ رشتوں کی یہ مثالیں اس اثر کی توضیح پیش کر سکتی ہیں۔ دیگر محض اور اتفاقی ہو سکتی ہیں۔ موسمی کوچ کرنے والے پرندوں کا مخصوص محفوظ علاقوں (Sanctuary) میں آنا اور آپ کے علاقے میں شرح پیدائش کے درمیان رشتہ سبب و اثر کی توضیح نہیں پیش کر سکتا۔ یہ رشتے محض اتفاق ہیں۔ آپ کے جوتے کی ناپ اور آپ کی جیب میں موجود رقم کے درمیان رشتہ اسی طرح کی ایک اور مثال ہے۔ حتیٰ کہ اگر رشتہ موجود بھی ہے تو اس کی وضاحت کرنا مشکل ہے۔

ایک دوسری مثال میں دو متغیروں پر ایک تیسرے متغیر کا اثر دو متغیرات کے درمیان رشتے کا گمان کر سکتا ہے۔ آئس کریم کی زبردست فروخت کا تعلق ڈوبنے کے سبب ہونے والی اموات کی اونچی تعداد نہیں ہو سکتا ہے۔ اس کے شکار آئس کریم کھانے کے سبب نہیں ڈوبتے ہیں۔ درجہ حرارت میں اضافہ آئس کریم کی اچھی فروخت کی وجہ ہے۔ مزید برآں، لوگوں کی ایک بڑی تعداد گرمی سے بچنے کے لیے تیراکی کرنے سوئمنگ پول جانا شروع کرتی ہے۔ یہ ڈوبنے سے اموات کی تعداد میں اضافے کا سبب ہو سکتی ہے۔ اس طرح آئس کریم کی

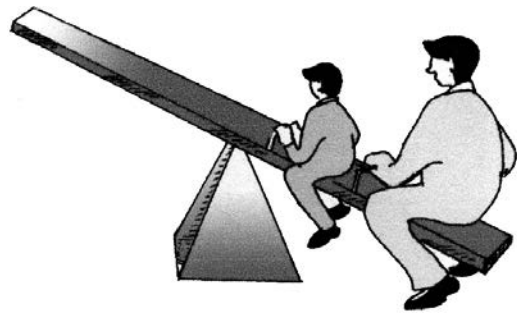
• کیا دو متغیرات کے درمیان کوئی رشتہ ہے؟



• اگر ایک متغیر کی قدر میں تبدیلی ہوتی ہے، تو کیا دوسرے کی قدر میں بھی تبدیلی ہوتی ہے؟



• کیا دونوں متغیرات ایک ہی سمت میں حرکت کرتے ہیں؟



• رشتے میں کتنی مضبوطی ہوتی ہے؟

فروخت اور ڈوبنے کے سبب ہونے والی اموات کے درمیان اعلیٰ ہم رشتگی کے پس پردہ درجہ حرارت ہے۔

ہم رشتگی کیا پیمائش کرتی ہے؟

ہم رشتگی متغیرات کے رشتوں کی سمت اور شدت کا مطالعہ اور پیمائش کرتی ہے۔ ہم رشتگی باہمی فرق کی پیمائش کرتی ہے نہ کہ اسباب کی۔ ہم رشتگی سبب و اثر رشتے کی دلالت کے طور پر توضیح نہیں کرتی۔ دو متغیروں y و x کے درمیان ہم رشتگی باہمی فرق کی پیمائش کرتی ہے نہ کہ اسباب کی۔ ہم رشتگی کے وجود کا عام مفہوم یہ ہے کہ جب ایک متغیر کی قیمت میں ایک سمت میں تبدیلی ہوتی ہے تب دوسرے متغیر کی قیمت میں اُسی سمت میں (یعنی مثبت تبدیلی) یا مخالف سمت میں (منفی تبدیلی) لیکن متعین انداز میں تبدیلی ہوتی ہے۔ سہولت کے لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ یہاں ہم رشتگی اگر ہے تو یہ خطی ہے یعنی دو متغیروں کی نسبتی حرکت کا اظہار خط مستقیم بنا کر کیا جا سکتا ہے۔

ہم رشتگی کی اقسام

ہم رشتگی کو عام طور پر منفی اور مثبت ہم رشتگی میں درجہ بند کیا جاتا ہے۔ ہم رشتگی کو مثبت اس وقت کہا جاتا ہے جب متغیرات ایک ہی سمت میں حرکت کرتے ہیں۔ جب آمدنی بڑھتی ہے تب خرچ میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔ جب آمدنی میں کمی پیدا ہوتی ہے تب خرچ میں بھی کمی آتی ہے۔ آئس کریم کی فروخت اور درجہ حرارت ایک ہی سمت میں جنبش کرتے ہیں۔ ہم رشتگی اسی وقت منفی ہوتی ہے جب وہ مخالف سمت میں حرکت کرتے ہیں۔ جب

سیب کی قیمت گرتی ہے اس کی مانگ میں اضافہ ہوتا ہے۔ جب قیمتیں بڑھتی ہیں تو مانگ میں کمی پیدا ہوتی ہے۔ جب آپ مطالعہ میں زیادہ وقت لگاتے ہیں تب آپ کے ناکام ہونے کا اتفاق کم ہوتا ہے۔ جب آپ مطالعہ میں کم گھنٹے لگاتے ہیں تب آپ کے کم نمبر یا گریڈ حاصل فیمل ہونے کا اتفاق زیادہ ہو جاتا ہے یہ منفی ہم رشتگی کی مثالیں ہیں۔ متغیرات مخالف سمت میں حرکت کرتے ہیں۔

3. ہم رشتگی کی پیمائش کے لیے تکنیکیں

ہم رشتگی کی پیمائش کے لیے تین اہم وسائل کا استعمال کیا جاتا ہے۔

(1) ڈائگرام (Scatter Diagram)

(2) کارل پیئرسن (Karl Pearson) کا ہم رشتگی کا ضریب

(3) اسپیرمین کا ہم رشتگی رینک

(Scatter diagram) بغیر کوئی عددی قدر دکھائے تعلق کی نوعیت کو ظاہر کرتا ہے۔ دو متغیرات کے درمیان خطی تعلق کی عددی پیمائش کا رول پیئرسن کے ہم رشتگی کے ضریب کے ذریعہ پیش کی جاتی ہے۔ کسی رشتے کو خطی تب کہا جاتا ہے جب اسے خط مستقیم کے ذریعہ پیش کیا جائے۔ اسپیرمین کے ہم رشتگی ضریب جو انفرادی مدوں کو ان کی خصوصیتوں کے لحاظ سے تفویض کیے گئے رینکوں (مرتبوں) کے درمیان خطی تعلق کی پیمائش کرتا ہے۔ خصوصیات وہ متغیرات ہیں جن کی پیمائش عددی طور پر نہیں کی جاسکتی مثلاً لوگوں کی ذہانت، جسمانی بناوٹ، ایمانداری وغیرہ۔

گردنقاط منتشر ہوں۔ یہ ہم رشتگی نہ ہونے کی ایک مثال ہے۔
 شکل 7.4 اور شکل 7.5 میں نقاط فزائی بڑھتے یا نشیبی گرتے خط
 کے گرد دور بکھرے نہیں ہیں بلکہ وہ خطوط پر ہی موجود ہیں۔ اسے
 کامل مثبت ہم رشتگی اور کامل منفی ہم رشتگی کے طور پر جانا جاتا

سرگرمی

کلاس X میں اونچائی، وزن اور کوئی دو مضامین میں اپنی کلاس
 میں طلباء کے ذریعہ حاصل کیے گئے مارکس کے ڈیٹا اکٹھا کیجئے۔
 ایک وقت میں دو دو اختیار کرتے ہوئے ان متغیرات کا انتشاری
 ڈائیگرام بنائیے۔ آپ کس طرح کارشتہ دریافت کرتے ہیں؟

ہے۔ انتشاری ڈائیگرام کا مشاہدہ رشتوں کی نوعیت اور شدت
 کے بارے میں ایک اندازہ پیش کرنا ہے۔

کارل پیرسن کا ہم رشتگی ضریب

اسے حاصل ضرب گردشہ ہم رشتگی اور سادہ ہم رشتگی ضریب
 کے طور پر بھی جانا جاتا ہے۔ یہ دو متغیرات X اور Y کے درمیان
 خطی رشتوں کی جامع عددی قدر فراہم کرتا ہے۔ خطی رشتہ درج
 ذیل طور پر ہو سکتا ہے۔

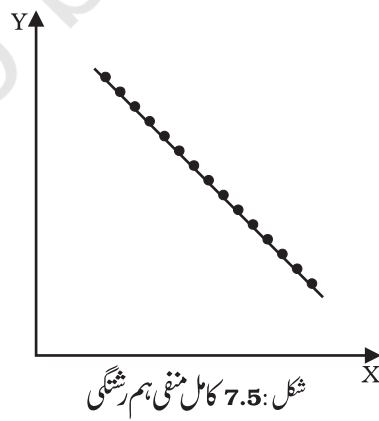
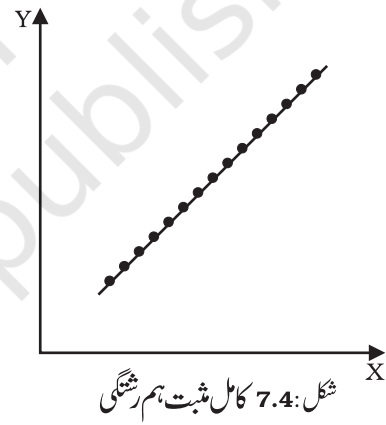
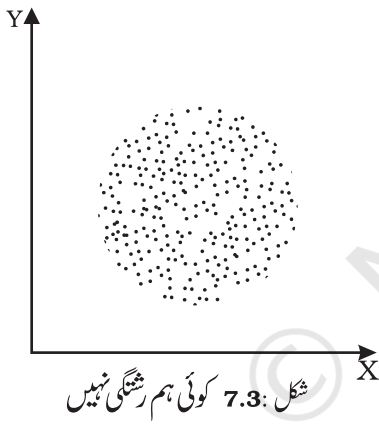
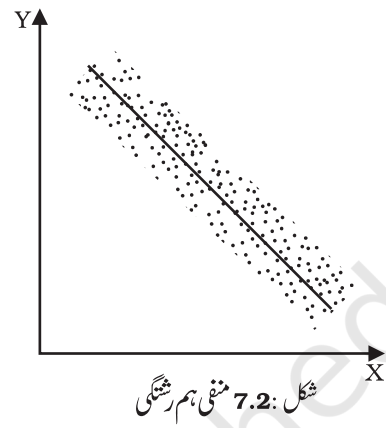
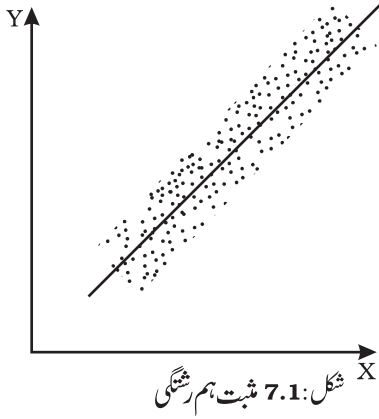
$$Y = a + bX$$

اس طرح کے رشتے کو خط مستقیم کے ذریعہ بیان کیا جاسکتا ہے۔
 مقطوعہ (Intercept) جو خط Y محور پر بنتا اسے a کے ذریعہ
 ظاہر کیا جاتا ہے اور خط کی ڈھال (Slope) کو m کے ذریعہ

انتشاری ڈائیگرام (Scatter Diagram)

انتشاری ڈائیگرام، بغیر کسی عددی قدر کو شمار کیے ہوئے رشتوں کی
 شکل کا بصری طور پر جائزہ لینے کی ایک مفید تکنیک ہے۔ اس
 تکنیک میں دو متغیرات قیمتوں کا تعین گراف کاغذ پر نقاط
 کے طور پر کیا جاتا ہے۔..... ڈائیگرام سے ہم تعلقات کی
 نوعیت کا بہتر تصور لے سکتے ہیں۔ انتشاری ڈائیگرام سے کوئی
 بھی رشتوں کی نوعیت کا کافی اچھا اندازہ حاصل کر سکتا ہے۔
 انتشاری ڈائیگرام میں انتشاری نقطوں کی قربت کا درجہ اور ان
 کی مجموعی سمت ہمیں رشتوں کا جائزہ لینے کا اہل بناتی ہے۔ اگر
 سبھی نقاط ایک خط پر واقع ہیں تب ہم رشتگی کامل ہے اور یہ کہا
 جاسکتا ہے کہ ہم آہنگی (Unity) ہے۔

انتشاری ڈائیگرام شکل 7.1 تا 7.5 محیط ہے جو ہمیں دو
 متغیرات کے درمیان رشتوں کا تصور فراہم کرتی ہے۔ شکل 7.1
 ایک فزائی (اوپری جانب) بڑھتے خط کے گرد انتشار دکھاتی
 ہے جس سے اشارہ ملتا ہے کہ متغیرات کی حرکت ایک ہی سمت
 میں ہے۔ جب X بڑھتا ہے تب Y بھی بڑھے گا۔ یہ ایک مثبت
 ہم رشتگی ہے۔ شکل 7.2 میں نقاط نشیبی ڈھلوں خط کے گرد
 بکھرے ہیں۔ اس وقت متغیرات مخالف سمتوں میں حرکت
 کرتے ہیں جب X بڑھتا ہے تب Y نیچے آتا ہے اور Y بڑھتا
 ہے تب X نیچے آتا ہے۔ یہ ایک منفی ہم رشتگی ہے۔ شکل 7.3
 میں فزائی بڑھتا یا نشیبی ڈھلوں ہوتا ہوا خط نہیں ہے جس کے



X اور Y کی علی الترتیب ان کی وسط قدروں سے انحرافات ہیں۔
X اور Y کے درمیان ہم انحراف ہم رشتگی ضریب کی علامت کا تعین کرتے ہیں۔ معیاری انحرافات ہمیشہ مثبت ہوتے ہیں۔ ہم رشتگی ضریب ہمیشہ صفر ہوتے ہیں۔ پروڈکٹ مومنٹ ہم رشتگی یا ہم رشتگی کی کارل یارسن کی پیمائش درج ذیل طور پر بیان کی جاتی ہے۔

$$r = \frac{\sum xy}{N\sigma_x\sigma_y} \quad \dots(1)$$

$$r = \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2} \sqrt{\sum(Y - \bar{Y})^2}} \quad \dots(2)$$

$$r = \frac{\sum XY - \frac{(\sum X)(\sum Y)}{N}}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}} \sqrt{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}}} \quad \dots(3)$$

$$r = \frac{N\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{N\sum X^2 - (\sum X)^2} \sqrt{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}} \quad \dots(4)$$

ہم رشتگی ضریب کی خصوصیات :

آئیے اب ہم رشتگی ضریب کی خصوصیات کا بیان کریں۔

- r کی کوئی اکائی نہیں ہے۔ یہ ایک خالص عدد ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ پیمائش کی اکائیاں کا حصہ نہیں ہیں۔ اونچائی کے درمیان فٹ میں اور وزن کلوگرام میں ہے۔ مثال کے لیے 0.7۔

- r کی منفی قدر معکوس رشتہ ظاہر کرتی ہے ایک متغیرہ میں تبدیلی

بیان کیا جاتا ہے۔ یہ قدر X میں بہت معمولی تبدیلی کے لیے Y میں تبدیلی فراہم کرتا ہے۔ جب کہ دوسری طرف اگر رشتہ خط مستقیم کے ذریعہ نہیں پیش کیا جاسکتا جیسا کہ درج ذیل میں ہے

$$Y = X^2$$

تب ضریب کی قدر صفر ہوگی۔ یہ صاف طور پر ظاہر کرتا ہے کہ صفر ہم رشتگی کا مطلب یہ نہیں کہ دو متغیرات کے درمیان کسی قسم کے رشتے کی غیر موجودگی ہے۔

فرض کیجیے $X_1, X_2, \dots, X_N$ کی قدریں ہیں اور $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ کی مطابق قدریں ہیں۔ بعد کی پیشکشوں میں زیر نوشتہ (Subscripts) اکائی ظاہر کرتے ہوئے تسہیل کی خاطر چھوڑ دیے جاتے ہیں X اور Y کی حسابی وسط کو درج ذیل طور پر متعین کیا جاتا ہے۔

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}; \quad \bar{Y} = \frac{\sum Y}{N}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum(X - \bar{X})^2}{N} = \frac{\sum X^2}{N} - \bar{X}^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum(Y - \bar{Y})^2}{N} = \frac{\sum Y^2}{N} - \bar{Y}^2 \quad \text{اور}$$

X اور Y کے معیاری انحرافات (Covariance) کو درج ذیل طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{N} = \frac{\sum xy}{N}$$

$$X = X - \bar{X} \quad \text{اور} \quad Y = Y - \bar{Y}$$

• کی اونچی قدر مضبوط خطی رشتہ ظاہر کرتی ہے۔ اس کی قدر کو اس وقت اونچا کہا جاتا ہے جب یہ 1 یا -1 سے قریب ہو۔

• کی نچلی قدر کمزور خطی رشتے کی نشاندہی کرتی ہے۔ اس کی قدر کو کم تر اس وقت کہا جاتا ہے جب یہ صفر کے قریب ہو۔

• ہم رشتگی کے ضریب کی قدر منفی اور جمع کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ $-1 \leq r \leq 1$ اگر کسی مشق میں r کی قدر اس رشتے سے باہر ہے تب یہ حساب میں خطا کا اظہار کرتی ہے۔

• کی قدر مبداء کی تبدیلی اور پیمانے کے تبدیلی کا اثر نہیں ہوتا۔ دو متغیرات X اور Y بیان کیے گئے ہیں۔ آپ ہم دو نئے متغیرات کی تعریف کریں۔

$$U = \frac{X-A}{B}; \quad V = \frac{Y-C}{D}$$

جہاں A اور C علی الترتیب X اور Y مفروضہ وسط ہیں۔ B اور D مشترک جزو ضربی ہیں تب

$$r_{xy} = r_{uv}$$

اس خاصیت کا استعمال ہم رشتگی ضریب کا شمار نہایت سہل طریقے میں کرنے کے لیے کیا جاتا ہے جیسا کہ مرحلہ انحراف طریقے میں ہوتا۔ شماریاتی طریقے فہم عامہ کا بدل نہیں ہیں۔ یہ ایک دوری مثال ہے جو ہم رشتگی کو شمار کرنے سے قبل ڈیٹا کو اچھی طرح سمجھنے کی ضرورت پر روشنی ڈالتی ہے۔ کچھ گاؤں میں وبائی مرض پھوٹ پڑا اور حکومت نے متاثرہ گاؤں میں ڈاکٹروں کی



مخالف سمت میں دیگر متغیرہ میں تبدیلی کے ساتھ وابستہ ہوتی ہے۔ جب کسی شے کی قیمت میں اضافہ ہوتا ہے تب اس کی مانگ میں کمی ہو جاتی ہے۔ جب سود کی شرح بڑھتی ہے تب فنڈوں (رقم مہیا کرنا) کی مانگ میں بھی کمی آ جاتی ہے۔ ایسا اس لیے ہوتا ہے کہ اب فنڈ گراں بن چکے ہیں۔

• اگر r مثبت ہے تب دو متغیرات ایک ہی سمت میں حرکت کرتے ہیں جب کافی کی قیمت، (چائے کا ایک بدل) بڑھتی ہے تب چائے کی مانگ میں بھی اضافہ ہو جاتا ہے۔ آپاشی کی سہولتوں میں بہتری کا تعلق زیادہ، پیداوار سے ہے۔ جب درجہ حرارت بڑھتا ہے تب آئس کریم کی فروخت میں زبردست اضافہ ہوتا ہے۔

• اگر $r=0$ تب دو متغیرات میں ہم رشتگی نہیں ہوئی۔ ان کے درمیان کوئی خطی رشتہ نہیں ہوتا۔ تاہم دیگر قسم کے رشتے واقع ہو سکتے ہیں۔

• اگر $r=1$ یا $r=-1$ تب ہم رشتگی کامل ہوتی ہے۔ ان کے درمیان رشتہ بالکل صحیح ہوتا ہے۔

جدول 7.1 سے ہم حاصل کرتے ہیں؛

$$\Sigma xy = 42,$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{112}{7}},$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - \bar{Y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{38}{7}}$$

ان قدروں کو فارمولا 1 میں رکھنے پر

$$r = \frac{42}{\sqrt{\frac{112}{7}} \cdot \sqrt{\frac{38}{7}}} = 0.644$$

یہی قدر فارمولا (2) سے بھی حاصل ہو سکتی ہے۔

$$r = \frac{\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\Sigma(X - \bar{X})^2} \sqrt{\Sigma(Y - \bar{Y})^2}} \quad (2)$$

$$r = \frac{42}{\sqrt{112} \sqrt{38}} = 0.644$$

اسی طرح کسانوں کے تعلیم کے سالوں اور فی ایکڑ سالانہ

پیداوار میں مثبت ہم رشتگی ہے۔ اس کی قدر بھی بڑی ہے۔ اس

سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ سالوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد جو تعلیم

میں لگائی جاتی ہے اس سے اتنا ہی زیادہ فی ایکڑ پیداوار ہوگی۔

اس سے کسانوں کی تعلیم کی اہمیت نمایاں ہوتی ہے۔

فارمولا (3) کا استعمال کرنے کے لیے۔

$$r = \frac{\Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}}{\sqrt{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}} \sqrt{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}}} \quad (3)$$

درج ذیل عبارتوں کی قدر یعنی $\Sigma XY, \Sigma X^2, \Sigma Y^2$

ایک ٹیم بھیجی۔ گاؤں میں اموات کی تعداد اور بھیجے گئے ڈاکٹروں

کی تعداد کے درمیان ہم رشتگی مثبت دی جاتی ہے۔ عام طور پر

ڈاکٹروں کے ذریعہ فراہم کی گئی صحت کی دیکھ بھال سے متعلق

سہولتوں سے اموات کی تعداد میں کمی کی توقع کی جاتی ہے جس

سے منفی ہم رشتگی ظاہر ہوتی ہے۔ ایسا دیگر اسباب کی بنا پر واقع

ہوتا ہے۔ ڈیٹا مخصوص عرصے سے متعلق ہوتا ہے۔ مطلع کی گئی

بہت سی اموات یک وقتی معاملہ ہو سکتی ہے جہاں ڈاکٹر کچھ نہیں کر

سکتے۔ مزید برآں ڈاکٹروں کی موجودگی کا فائدہ کچھ وقت کے بعد

دکھائی دے سکتا ہے۔ یہ بھی ممکن ہے کہ مطلع کی گئی اموات کا تعلق

وبائی مرض کے سبب نہ ہو۔ سنائی، ملک میں اچانک تباہی مچاتی

ہے اور مرنے والوں کی تعداد کافی بڑھ جاتی ہے۔

آپ ہم r کا حساب کسان کی تربیت کے سالوں اور فی

ایکڑ سالانہ پیداوار کے درمیان رشتے کا جائزہ لینے کے ذریعہ

سمجھائیں گے۔

مثال 1

تعداد	کسانوں کی تربیت کے سالوں کی 1,000 روپے میں فی ایکڑ سالانہ پیداوار
0	4
2	4
4	6
6	10
8	10
10	8
12	7

فارمولا نمبر 1 میں $\Sigma xy, \sigma_x, \sigma_y$ کی قدر کی ضرورت ہے۔

کا شمار کرنا ہوتا ہے۔ قیمت سے وابستہ ہوگی اتنی کم نہیں جتنی کہ اس وقت جب 0.9 ہے۔ کس حد تک قیمت گرتی ہے یہ کی مطلق قدر پر مبنی ہے۔ اگر یہ صفر ہوتی تب قیمت میں کوئی گراؤ نہیں ہوتی۔ بھلے ہی بازار میں فراہمی کافی زیادہ ہو۔ اس بات کا بھی امکان ہے کہ فراہمی میں اضافہ اچھے ٹرانسپورٹ کی وجہ سے دوسرے بازاروں سے مال منتقل ہو جائے۔

ہم رشتگی کی قدر حاصل کرنے کے لیے اب فارمولا (3) کا اطلاق کریں۔ آئیے ہم r کی مختلف قدروں کی توضیح کریں۔ انگریزی اور شماریات میں حاصل کیے گئے نمبروں کے درمیان ہم رشتگی مزید بالفرضی، 0.1 ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ اگرچہ دو مضامین میں حاصل کیے گئے مارکس مثبت طور پر ہم رشتہ ہیں لیکن

جدول 7.1

کسان کی تعلیم و تربیت کے سالوں اور سالانہ پیداوار کے درمیان r کا شمار

کسانوں کی ترتیب کے سال	$X - \bar{X}$	$(X - \bar{X})^2$	سالانہ پیداوار فی ایکڑ	$(Y - \bar{Y})$	$(Y - \bar{Y})^2$	$(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$
0	-6	36	4	-3	9	18
2	-4	16	4	-3	9	12
4	-2	4	6	-1	1	2
6	0	0	10	3	9	0
8	2	4	10	3	9	6
10	4	16	8	1	1	4
12	6	36	7	0	0	0
$\Sigma X = 42$ $\Sigma(X - \bar{X})^2 = 112$ $\Sigma Y = 49$ $\Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 38$ $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 42$						

سرگرمی

- درج ذیل جدول پر نظر دالیں موجودہ قیمت اور بطور GDP فی صد مجموعی گھریلو بچت پر قوی آمدنی کے سالانہ نمو کے درمیان کا شمار کیجیے۔

ہم رشتگی ضریب کا شمار کرنے کے لیے مرحلہ وار انحراف طریقہ۔ جب متغیرات کی قدریں بڑی ہوں تب شمار کا بوجھ کی ایک

رشتوں کا استحکام کمزور ہے۔ انگریزی میں زیادہ مارکس والے طلباء ممکن ہے شماریات میں نسبتاً کم مارکس حاصل کر رہے ہوں۔ اگر کی قدر بالفرضی 0.9 ہوتی تب انگریزی میں زیادہ مارکس پانے والے طلباء۔ ہمیشہ شماریات میں زیادہ مارکس حاصل کریں گے۔ منفی ہم رشتگی کی ایک مثال مقامی منڈی میں سبزیوں کی آمد اور سبزیوں کی قیمت کے درمیان رشتہ ہے۔ اگر 0.9 ہے تب مقامی منڈی میں سبزی کی فراہمی سبزیوں کی کم قیمت سے وابستہ ہوگی۔ اگر یہ 0.1 ہوتی تب سبزیوں کی زیادہ فراہمی کم

خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے نمایاں طور پر کم کیا جاسکتا ہے۔

وہ یہ ہے کہ صدا اور پیمانے میں تبدیلی سے آزاد ہے۔ اسے مرحلہ وار انحراف کے طور پر بھی جانا جاتا ہے۔ اس متغیرات X اور Y کی تحویل شامل ہے جیسا کہ نیچے دکھایا گیا ہے:

جدول 7.2

سال	قومی آمدنی کا سالانہ اضافہ	GDP کے فی صد کے طور مجموعی گھریلو بچت
1992-93	14	24
1993-94	17	23
1994-95	18	26
1995-96	17	27
1996-97	16	25
1997-98	12	25
1998-99	16	23
1999-00	11	25
2000-01	8	24
2001-02	10	23

ماخذ : معاشی سروے (2004-05) صفحہ 8,9

$$U = \frac{X - A}{h}; V = \frac{Y - B}{k}$$

جہاں A اور B مفروضہ وسط ہیں، H اور K مشترک جزو

ضروری ہیں۔

$$r_{UV} = r_{XY}$$

اسے قیمت اشاریہ اور رقم فراہمی کے درمیان ہم رشتگی کا

تجزیہ کرنے کی مشق کے ساتھ سمجھا جاسکتا ہے۔

مثال 2

قیمت اشاریہ (X)

رقم فراہمی (Y)

فرض کیجیے $A=100; h=10; B=1700; k=100$

تحویل شدہ متغیرات کا جدول درج ذیل ہے:

اشاریہ قیمت اور رقم فراہمی کے درمیان کا شمار مرحلہ وار انحراف طریقے کا شمار

جدول 7.3

U	V	U ²	V ²	UV
$\left(\frac{X-100}{10}\right)$	$\left(\frac{Y-1700}{100}\right)$			
2	1	4	1	2
5	3	25	9	15
9	8	81	64	72
12	10	144	100	120
13	13	169	169	169

$$\Sigma U = 41; \Sigma V = 35; \Sigma U^2 = 423;$$

$$\Sigma V^2 = 343; \Sigma UV = 378$$

فارمولے میں ان قدروں کا بدل رکھنے پر (3)

وزن کے درمیان ہم رشتگی کا شمار کرنے کی ضرورت پڑتی ہے ہمارے پاس نہ تو لمبائی ناپنے کا الم ہے نہ وزن کرنے کی مشین دستیاب ہے۔ طلباء کو بغیر پیمائش اور وزن کرنے والے پیمانوں کے طبقاتی اور وزن کی اصطلاح میں آسانی سے رینک دی جاسکتی ہے۔

ایسے بھی حالات ہوتے ہیں جب آپ کو کوالٹی کی مقدار کا تعین کرنے کی ضرورت ہوتی ہے جیسے انصاف، ایمانداری وغیرہ کی مقدار کا تعین۔ رینٹنگ یا درجہ بند خوبیوں (کوالٹی) کے درجے کے مقدار کے تعین کا بہتر متبادل ہو سکتا ہے۔ مزید برآں کبھی کبھی انتہائی قدروں کے ساتھ دو متغیرات کے درمیان ہم رشتگی ضریب بغیر انتہائی قدروں کے ضریب سے بالکل مختلف ہو سکتا ہے۔ ایسی صورتحال میں رینک ہم رشتگی ایک سادی ہم رشتگی کا بہتر متبادل فراہم کرتی ہے۔

رینک ہم رشتگی ضریب اور سادہ ہم رشتگی ضریب کی یکساں توضیح ہوتی ہے۔ اس کا فارمولا سادے ہم رشتگی ضریب سے اخذ کیا گیا ہے جہاں انفرادی قدروں کو رینکوں یا درجوں کے ذریعہ منتقل کیا گیا ہے۔ ان درجوں کا استعمال ہم رشتگی کے شمار کے لیے کیا جاتا ہے۔ یہ ضریب، خطی تعلق کی پیمائش ان اکائیوں کو تفویض کیے گئے رینکوں کے درمیان فراہم کرتے ہیں، نہ کہ ان کی قدروں کے درمیان۔ یہ رینکوں کے درمیان حاصل کردہ ہم رشتگی ہے۔ اس کا فارمولا ہے۔

$$r_a = 1 - \frac{6 \sum D^2}{n^3 - n} \dots (4)$$

$$r = \frac{\sum UV - \frac{(\sum U)(\sum V)}{N}}{\sqrt{\sum U^2 - \frac{(\sum U)^2}{N}} \sqrt{\sum V^2 - \frac{(\sum V)^2}{N}}} \dots (3)$$

$$= \frac{378 - \frac{41 \times 35}{5}}{\sqrt{423 - \frac{(41)^2}{5}} \sqrt{343 - \frac{(35)^2}{5}}}$$

$$= 0.98$$

قیمت اشاریہ اور پیسے کی فراہمی کے درمیان مضبوط مثبت ہم رشتگی زری پالیسی کی اہم بنیاد ہے۔ جب پیسے کی فراہمی بڑھتی ہے قیمت اشاریہ بھی بڑھتا ہے۔

سرگرمی

- ہندوستان کی آبادی اور قومی آمدنی کی بعض مثالیں بھیجے۔ مرحلہ اور انحراف کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے ان کے درمیان ہم رشتگی کا شمار کیجیے اور تسہیل کیجیے۔

اسپیئر مین کی ہم رشتگی رینک

اسپیئر مین کی رینک ہم رشتگی کو برٹش ماہر نفسیات سی۔ای۔ اسپیئر مین نے فروغ دیا تھا۔ اس کا استعمال اس وقت کیا جاتا ہے جب متغیرات کی پیمائش با معنی طور پر نہیں کی جاسکتی جیسا کہ قیمت، وزن وغیرہ کے معاملے میں ہے، رینٹنگ زیادہ با معنی ہو سکتی ہے جب متغیرات کی پیمائش مشتبہ ہوں۔ ایسی صورتحال پر غور کریں جہاں ہمیں کسی دور دراز کے گاؤں میں طلباء کی لمبائی اور

دے سکتے تھے۔ پہلا فرق سلسلے وار قدروں کا فرق ہے۔ جب انتہائی قدریں موجود ہوں تب رینک ہم رشتگی کو ضریب میں ترجیح دی جاتی ہے۔ بالعموم r سے کم یا مساوی ہوتا ہے۔ رینک ہم رشتگی کے شمار کو تین صورتحال کے تحت سمجھایا جائے گا۔

1. دیے گئے رینک۔
2. رینک نہیں دیے گئے ہیں۔ انہیں ڈیٹا سے حل کیا جانا ہوتا ہے۔
3. رینک دہرائے جاتے ہیں۔

مسئلہ 1: رینک دیئے گئے ہیں

مثال 3

مقابلہ حسن میں تین ججوں کے ذریعہ پانچ افراد کا جائزہ لیا جاتا ہے۔ ہمیں دریافت کرنا ہے کہ ججوں سے کون سے جوڑے کی خوبصورتی کے مشترک مشاہدے میں قریب ترین رسائی ہے۔

مقابلے میں حصہ لینے والے

جج	1	2	3	4	5
A	1	2	3	4	5
B	2	4	1	5	3
C	1	3	5	2	4

ججوں کے 3 جوڑے ایسے ہیں جو رینک ہم رشتگی کا تین بار شمار ضروری بنارہے ہیں۔ فارمولا (4) کا استعمال کیا جائے گا۔

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum D^2}{n^3 - n} \dots (4)$$

A اور B کے درمیان ہم رشتگی کا شمار درج ذیل طور پر کیا جاتا ہے۔

جہاں n مشاہدات کی تعداد ہے اور رینک تفویض کیے گئے ان دیگر متغیرہ سے رینک تفویض کیے گئے کسی متغیرہ کا انحراف ہے۔ جب درجات (Ranks) فارمولا دہراتے ہیں۔ تب

$$r_s = 1 - \frac{6 \left[\sum D^2 + \frac{(m_1^3 - m_1)}{12} + \frac{(m_2^3 - m_2)}{12} + \dots \right]}{n(n^2 - 1)}$$

جہاں $m_1, m_2, \dots$ رینکوں کے دہراؤ کی تعداد ہے اور $\frac{m_1^3 - m_1}{12}$ ان کے موافق تصحیح اجزائے ضربی ہیں۔ اس تصحیح کی ضرورت دونوں متغیرات کی ہر دہرائی گئی قدر کے لیے ہوتی ہے۔ اگر متین قدریں دہرائی جاتی ہیں تب تو قدر کے لیے تصحیح ہوگی۔ ہر بار m_1 وقت کی تعداد ظاہر کرنا ہے جو قدر دہرائی ہے۔

سادہ ہم رشتگی ضریب کی تمام خصوصیات یہاں قابل اطلاق ہیں۔ ہیرسن کے ہم رشتگی ضریب کی طرح یہ 1 اور -1 کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ تاہم، بالعموم یہ اتنا درست نہیں ہوتا جتنا کہ عام طریقہ۔ یہ اس حقیقت کی وجہ سے ہے کہ ڈیٹا سے متعلق ساری معلومات سے استفادہ نہیں کیا جاتا۔ سیریز میں درجہ کی قدروں کا پہلے فرق مقدار کی ترتیب میں منظم کیے جاتے ہیں، جو تقریباً کبھی مستقل نہیں ہو۔ عام طور پر صف کے درمیان میں چھوٹے فرق کے ساتھ ڈیٹا مرکزی قدروں کے گرد جمع ہوتے ہیں۔ اگر پہلے فرق ہوتے تب r اور r_k مماثل نتائج

مسئلہ 2: رینک نہیں دیئے گئے ہیں

مثال 4

ہمیں مارکس کے فی صد دیے گئے ہیں جو کہ معاشیات اور شماریات میں 5 طلباء کے ذریعہ حاصل کیے گئے مارکس سے متعلق ہے۔ اس کے بعد رینٹنگ پر کام کیا جانا ہے اور رینک ہم رشتگی کا شمار کرنا ہے۔

طالب علم	شماریات میں حاصل مارکس (X)	معاشیات میں حاصل مارکس (Y)
A	85	60
B	60	48
C	55	49
D	65	50
E	75	55

طالب علم	شماریات میں رینٹنگ (R _x)	معاشیات میں رینٹنگ (R _y)
A	1	1
B	4	5
C	5	4
D	3	3
E	2	2

جب ایک بار رینٹنگ پوری ہو جاتی ہے تب فارمولا (4) کا استعمال رینک ہم رشتگی کے لیے کیا جاتا ہے۔

مسئلہ 3: جب رینکوں کو دہرایا جاتا ہے

مثال 5

X اور Y کی قدریں ذیل میں دہرائی گئی ہیں۔

42	35	19	15	40	35	45	25	X
48	36	42	40	35	30	60	55	Y

D ²	D	B	A
1	-1	2	1
4	-2	4	2
4	2	1	3
1	-1	5	4
4	2	3	5
14			کل

ان قدروں کو جدول (4) میں رکھنے پر

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum D^2}{n^3 - n} \dots (4)$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 14}{5^3 - 5} = 1 - \frac{84}{120} = 1 - 0.7 = 0.3$$

A اور C کے درمیان رینک ہم رشتگی کا شمار درج ذیل طور

پر کیا جاتا ہے۔

D ²	D	C	A
0	0	1	1
1	-1	3	2
4	-2	5	3
4	2	2	4
1	1	4	5
10			کل

فارمولا (4) میں ان قدروں کو بدلنے سے ہم رشتگی 0.5

ہے۔ اسی طرح جج B اور C کی رینٹنگ کے درمیان رینک ہم رشتگی 0.9 ہے۔ اس طرح ججوں A اور C کے مشاہدے کافی قریب قریب ہیں۔ جج B اور جج C کافی مختلف پسند ہیں۔

شماریات برائے معاشیات

لہذا دونوں کو اوسط رینک یعنی $\frac{4+5}{2}th = 4.5th$ رینک دیا جاتا ہے۔

اسی طرح ضروری تصحیح ہے۔

$$\frac{m^3 - m}{12} = \frac{2_3 - 2}{12} = \frac{1}{2}$$

اس مساوات کا استعمال کرتے ہوئے۔

$$r_s = 1 - \frac{6 \left[\sum D^2 + \frac{(m^3 - m)}{12} \right]}{n^3 - n} \dots (5)$$

ان اظہار کی قدروں کو بدلنے سے

$$r_s = 1 - 6 \frac{(65.5 + 0.5)}{8^2 - 8} = 1 - \frac{396}{504}$$

$$r_s = 1 - 0.786 = 0.214$$

سرگرمی

- کلاس IX اور X کے امتحانوں میں اپنے 10 ساتھیوں کے ذریعہ حاصل کیے مارکس پر ڈیٹا اکٹھا کیجئے۔ ان کے درمیان ہم رشتگی ضریب شمار کیجئے۔ اگر آپ کے ڈیٹا میں کسی طرح کا دہراؤ نہیں ہے تب ایسا ڈیٹا سیٹ لیجئے جس میں دہرائے گئے رینک ہوں ان کے ذریعہ شق دہرا ہے۔ وہ کون سی صورت حال ہے جس میں رینک ہم رشتگی ضریب کو سادہ ہم رشتگی ضریب پر فوقیت دی جاتی ہے۔ اگر ڈیٹا کی پیمائش جامع طور پر کی گئی ہے کیا تب بھی آپ سادہ ہم رشتگی سے مقابلے رینک ہم رشتگی ضریب کو ترجیح دیں گے؟ آپ ان کا انتخاب کرنے میں کب بے تعلق ہو سکتے ہیں؟ کلاس میں اس سلسلے میں بحث کیجئے۔

رینک ہم رشتگی کو حل کرنے کے سلسلے میں، قدروں کی رینکوں کو حل کیا جاتا ہے۔ دہرائی گئی مدوں کو مشترکہ رینک دیے جاتے ہیں۔ مشترکہ رینک ان رینکوں کی وسط ہے جو ان مدوں کے بارے میں فرض کی جاتی ہوں جن میں ایک دوسرے سے معمولی سا فرق ہو۔ جو رینک پہلے سے ہی مفروضہ ہے اس سے اگلی رینک اگلی مد کو تفویض ہوگی۔ جب رینکوں کو دہرایا جاتا ہے تب اسپیر میں ہم رشتگی ضریب کا فارمولا درج ذیل ہوگا۔

$$r_s = 1 - \frac{6 \left[\sum D^2 + \frac{(m_1^3 - m_1)}{12} + \frac{(m_2^3 - m_2)}{12} + \dots \right]}{n(n^2 - 1)}$$

جہاں $m_1, m_2, \dots$ رینکوں کے دہراؤ کے اعداد ہیں

اور $\frac{m_1^3 - m_1}{12}$ ان کے موافق تصحیح اجزائے ضربی ہیں۔

X	Y	XR'	XR''	رینٹنگ میں انحراف	D ²
		رینک	رینک		D = R' - R''
25	55	6	2	4	16
45	80	1	1	0	0
35	30	4.5	8	3.5	12.25
40	35	3	7	-4	16
15	40	8	5	3	9
19	42	7	4	3	9
35	36	4.5	6	-1.5	2.25
42	48	2	3	-1	1
کل					$\sum D^2 = 65.5$

X کی قدر چوتھے اور پانچویں رینک دونوں پر 35 ہے۔

اس طرح X اور Y کے درمیان مثبت رینک ہم رشتگی ہے۔
 x اور y دونوں ایک ہی سمت میں حرکت کرتے ہیں۔ تاہم رشتہ اتنی مضبوطی کے ساتھ بیان نہیں کیا جاسکتا۔

4. اختتام

ہم نے دو متغیرات کے درمیان رشتوں خاص طور پر خطی رشتے کا مطالعہ کرنے کے لیے بعض تکنیکوں پر بحث کی ہے۔ انتشاری کی سمت اور شدت کے بارے میں ایک اندازہ فراہم ہوتا ہے۔

خلاصہ

- ہم رشتگی دو متغیرات کے درمیان رشتے کا مطالعہ کرتی ہے۔
- بکھراؤ ڈائیگرام دو متغیرات کے درمیان رشتوں کی نوعیت کی بصری پیش کش عطا کرتی ہے۔
- کارل پیرسن کے ہم رشتگی کا ضریب عددی طور پر صرف دو متغیرات کے درمیان خطی رشتے کی پیمائش کرتا ہے۔ r اور -1 کے درمیان واقع ہوتا ہے۔
- جب متغیرات کی پیمائش دقیق طور پر نہیں کی جاسکتی تب اسپیرمین کی رینک ہم رشتگی کو عددی طور پر خطی رشتے کی پیمائش کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔
- دہرائی گئی رینکوں کی تصحیحی اجزائے ضرب کی ضرورت ہوتی ہے۔
- ہم رشتہ کا مطلب سبب و اثر (Causation) نہیں ہے۔ اس کا مطلب صرف ہم انحراف (Covariation) سے ہے۔

مشقیں

1. ہم رشتگی ضریب کی اکائی اونچائی اور کلوگرام میں وزن کے درمیان ہے۔

(i) کلوگرام/فٹ

(ii) فی صد

(iii) غیر موجود

2. سادہ ہم رشتگی ضریب کی رینج ہے۔

(i) O تالامتناہی

(ii) نفی ایک تاجم ایک

(iii) نفی لامتناہی تالامتناہی

3. اگر مثبت ہے تب X اور Y کے درمیان رشتہ کس قسم کا ہے جب

(i) Y بڑھتا ہے X بھی بڑھتا ہے

(ii) Y گھٹتا ہے X بھی گھٹتا ہے

(iii) Y بڑھتا ہے X میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی

4. اگر $O =$ تب X اور Y ہیں

(i) خطی طور پر متعلق

(ii) خطی طور پر متعلق نہیں

(iii) آزاد یا غیر تابع

5. درج ذیل تین پیمائشوں میں کون سی رشتوں کی کسی قسم کی پیمائش کر سکتی ہیں۔

(i) کارل پیرسن کا ہم رشتگی ضریب

(ii) سپیرسن کارینک ہم رشتگی

(iii) انتشاری ڈائنگرام

6. اگر جامع طور پر (دقیق) پیمائش کیا گیا ڈیٹا دستیاب ہے تب سادہ ہم رشتگی ضریب ہے۔

(i) رینک ہم رشتگی ضریب سے زیادہ صحیح

(ii) رینک ہم رشتگی ضریب سے کم صحیح

(iii) اتنا ہی صحیح جتنا کہ رینک ہم رشتگی ضریب

7. تلازمہ (Association) کی پیمائش کے طور پر کوہم انحراف (Covariance) کے لیے کیوں ترجیح دی جاتی ہے؟

8. کیا ڈیٹا کی قسم پرنی 1- اور 1 کی رینج کے باہر واقع ہو سکتا ہے۔

9. کیا ہم رشتگی، سبب و اثر (Causation) کی دلالت کرتا ہے؟

10. کیا رینک ہم رشتگی سادہ ہم رشتگی ضریب کی نسبت زیادہ جامع و دقیق ہے؟
11. کیا صفر ہم رشتگی کا مطلب غیر تابع یا آزاد ہونا ہے۔
12. کیا سادہ ہم رشتگی ضریب کسی بھی قسم کے رشتے کی پیمائش کر سکتا ہے؟
13. ایک ہفتے کے لیے ہر روز اپنے مقامی بازار سے پانچ سبزیوں کی قیمت اکٹھا کیجیے۔ ان ہم رشتگی ضریبوں کا شمار کیجیے۔ نتیجے کی توضیح کیجیے۔

14. اپنے ساتھیوں کے قد کی پیمائش کیجیے۔ ان کے پانچ ساتھیوں کے قد معلوم کیجیے۔ ان دو متغیرات کے ہم رشتگی ضریب کا شمار کیجیے۔ نتیجے کی توضیح کیجیے۔

15. بعض متغیرات کو درج فہرست کیجیے جہاں درست پیمائش شکل ہو۔

16. 1, -1, 0 اور r کے طور پر کی قدروں کی توضیح کیجیے۔

17. رینک ہم رشتگی ضریب، پیرسنی ہم رشتگی ضریب سے مختلف کیوں ہوتا ہے۔

18. انچوں میں والدوں کی لمبائی X اور ان کے بیٹوں کی لمبائی کے درمیان ہم رشتگی مرتب شمار کیجیے۔

X	65	66	57	67	68	69	70	72
Y	67	56	65	68	72	72	69	71

(جواب: $r = 0.63$)

19. X اور Y کے درمیان ہم رشتگی ضریب شمار کیجیے۔ اور ان کے رشتوں پر تبصرہ کیجیے۔

X	-3	-2	-1	1	2	3
Y	9	4	1	1	4	9

(جواب: $r = 0$)

20. X اور Y کے درمیان ہم رشتگی ضریب شمار کیجیے اور ان کے رشتوں پر تبصرہ کیجیے۔

X	1	3	4	5	7	8
Y	2	6	8	10	14	16

(جواب: $r = 1$)

سرگرمی

- یہاں بیان کیے گئے سبھی فارمولوں کا استعمال ہندوستان کی قومی آمدنی اور برآمد کے درمیان r کا شمار کرنے کے لیے لیجیے کم سے کم دس مشاہدات کیجیے۔