



5013CH06

6

مثلت (TRIANGLES)

6.1 تعارف

کچلی کلاسوں میں آپ مثلثوں اور ان کی بہت سی خصوصیات سے پہلے ہی واقف ہو چکے ہیں۔ نویں کلاس میں آپ نے مثلثوں کی مماثلت کے بارے میں تفصیل سے مطالعہ کیا۔ یاد کیجیے کہ دو اشکال متماثل ہوتی ہیں۔ اگر ان کی شکل (Shape) اور پیمائش (Size) یکساں ہوں۔ اس باب میں ہم ان اشکال کے بارے میں پڑھیں گے جن کی شکل ایک سی ہو لیکن ضروری نہیں کے سائز بھی ایک ہی ہو۔ دو اشکال جن کا ایک ہی شکل ہو (ضروری نہیں کے سائز بھی ایک ہو) مشابہ اشکال کہلاتی ہیں۔ مخصوص طور پر ہم مثلثوں کی مشابہت کے بارے میں پڑھیں گے اور اس علم کا استعمال پہلے سے معلوم فیثاغورث کے مسئلے کو

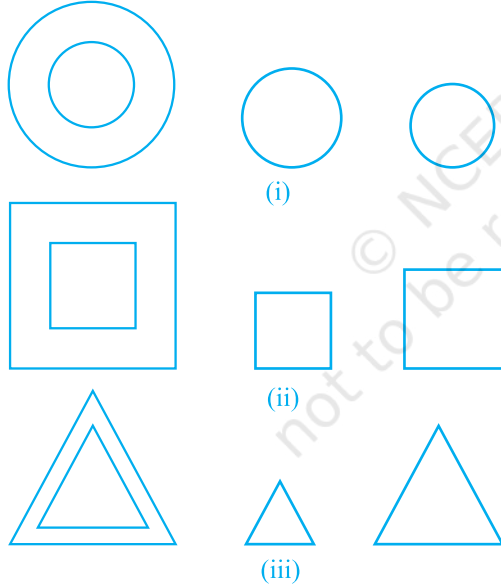


ثابت کرنے میں کریں گے۔

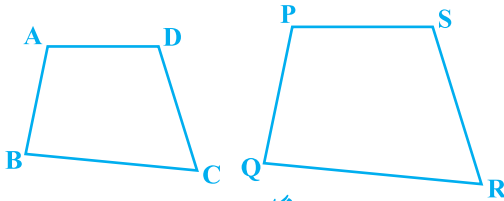
کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ پہاڑوں (جسے ماؤنٹ ایوریسٹ) کی اونچائی بتائی یا ایسی اشیاء کے فاصلے جو کافی دوری پر واقع ہیں (جیسے چاند) کس طرح معلوم کئے جاتے ہیں؟ کیا آپ سوچ سکتے ہیں کہ ان کو کسی ناپنے والے ٹیپ سے سیدھا ناپا جاسکتا ہے؟ درحقیقت ایسی تمام اونچائیاں اور فاصلے پیمائش کے غیر درست طریقے سے معلوم کئے جاتے ہیں، جس کی بنیاد اشکال کی مشابہت کے اصول پر ہے (مشق 6.3 کی مثال 7) سوال نمبر 15 اور اسی کتاب کا باب نمبر 8 اور 9 دیکھیے)

6.2 مشابہ اشکال

نویں جماعت میں آپ نے دیکھا کہ تمام دائرے جن کے نصف قطر برابر ہوں متماثل ہوتے ہیں۔ تمام مربعے جن کے اضلاع کی لمبائیاں مساوی ہوں متماثل ہوتے ہیں اور تمام مساوی ضلعی مثلث جس کے ضلع کے لمبائیاں مساوی ہوں متماثل ہوتے ہیں۔



شکل 6.1



شکل 6.2

اب دو یا دو سے زیادہ دائروں پر غور کیجیے (شکل 6(i) کو دیکھیے) کیا یہ متماثل نہیں ہیں؟ نوٹ کیجئے کہ کچھ متماثل ہیں اور کچھ نہیں لیکن تمام دائروں کی شکل ایک سی ہے ضروری نہیں ہے کہ سائز بھی ایک سے ہوں اس لئے تمام دائرے مشابہ ہوتے ہیں۔ دو (یا دو سے زیادہ) مربعے یا (دو یا دو سے زیادہ) مساوی ضلعی مثلثوں کے بارے میں کیا خیال ہے [شکل 6.1(ii) اور (iii) کو دیکھیے]؟ جیسا ہم نے دائروں کے سلسلہ میں مشاہدہ کیا تھا یہاں بھی تمام مربعے اور تمام مساوی ضلعی مثلث مشابہ ہیں۔

مذکورہ بالا باتوں سے ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ تمام متماثل اشکال مشابہ ہوتی ہیں لیکن مشابہ اشکال ضروری نہیں کہ مشابہ ہوں۔

کیا ایک دائرہ اور مربع مشابہ ہو سکتا ہے؟ کیا ایک مثلث اور مربع مشابہ ہو سکتا ہے؟ ان سوالوں کا جواب ہم صرف اشکال کو دیکھ کر دے سکتے ہیں (اشکال 6.1 دیکھئے) یقینی طور پر یہ اشکال مشابہ نہیں ہے (کیوں؟)



شکل 6.3

دو چار ضلعی ABCD اور PQRS کے بارے میں آپ کہہ سکتے ہیں؟ (شکل 6.2 دیکھئے) کیا یہ مشابہ ہیں۔ یہ اشکال بظاہر تو مشابہ نظر آتی ہیں لیکن ضروری نہیں ہے کہ یہ مشابہ ہوں۔ اس لئے ہمارے پاس اشکال کی مشابہت کی کوئی تعریف ہونی چاہیے تاکہ اس تعریف اور کچھ اصولوں کی بنیاد پر ہم یہ طے کر سکیں کہ دودی ہوئی اشکال مشابہ ہیں یا نہیں۔ ان کے لئے شکل 6.3 میں دئے گئے فوٹو گراف کو غور سے دیکھیے۔

آپ اس کو دیکھ کر فوراً کہہ سکتے ہیں کہ یہ ایک یادگار (تاج محل) کے فوٹو گراف ہیں۔ لیکن ان کے سائز مختلف ہیں، کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ یہ تینوں فوٹو گراف مشابہ ہیں؟ ہاں یہ ہیں۔

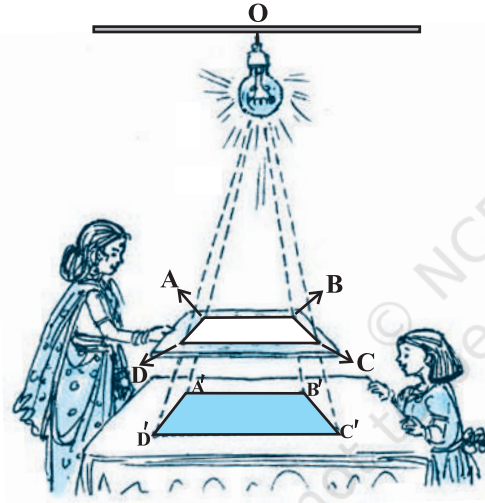
آپ ایک ہی شخص کے 10 سال کی عمر میں لئے گئے ایک فوٹو گراف اور 40 سال کی عمر میں لئے گئے اس ہی سائز کے فوٹو گراف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ کیا یہ دونوں فوٹو گراف مشابہ ہیں؟ یہ دونوں فوٹو گراف ایک ہی سائز کے ہیں لیکن یقیناً ان کی شکل (Shape) ایک سی نہیں ہے۔ اس لئے یہ مشابہ نہیں ہیں۔

ایک فوٹو گراف جب ایک ہی Negative سے مختلف سائز کے فوٹو گراف کے پرنٹ نکالتا ہے تو وہ کیا کرتا ہے؟ آپ نے اسٹیمپ سائز، پاسپورٹ سائز اور پوسٹ کارڈ سائز کے فوٹو گراف کے بارے میں سنا ہے۔ عمومی طور پر وہ ایک چھوٹے سائز کی فلم پر فوٹو گراف لیتا ہے، جیسے 35 ملی میٹر کا سائز، اور پھر اس کو بڑے سائز میں تبدیل کر دیتا ہے یعنی 45 ملی میٹر (یا 55 ملی میٹر)۔ اس طرح سے اگر ہم کسی قطع خط کے ایک چھوٹا فوٹو گراف (شکل)، پر غور کریں اور اس کا نظیری قطع خط بڑے فوٹو گراف میں (شکل) اس قطع خط کا $\frac{45}{35}$ (یا $\frac{55}{35}$) ہوگا۔

اس کا مطلب یہ ہوا کہ چھوٹے فوٹو گراف کا ہر قطع خط 35:45 (یا 35:55) کی نسبت میں بڑھا دیا گیا ہے۔ یہ بھی کہا جاسکتا ہے کہ بڑے فوٹو گراف کا ہر قطع خط 45:35 (یا 55:35) کی نسبت میں کم کر دیا گیا۔ یہ مزید اگر آپ مختلف سائزوں والے دو فوٹو گراف کے نظیری قطعات خط کے جوڑوں کے درمیان جھکاؤ (یا زاویوں) پر غور کریں۔ تو آپ دیکھیں گے کہ یہ جھکاؤ (یا

زاویہ) ہمیشہ برابر ہوں گے۔ یہ دو اشکال خاص طور سے دو کثیر ضلعی کی مشابہت کی ضروری شرط ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ: دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد یکساں ہو، مشابہ ہوتے ہیں اگر (i) ان کے نظیری زاویہ مساوی ہوں اور (ii) ان کے نظیری اضلاع کی نسبت یکساں ہوں (یا متناسب ہوں)۔

نوٹ کیجئے کہ نظیری اضلاع کی یکساں نسبت کا مطلب ہے کثیر ضلعی کا Scale factor (یا ظاہر کرنے والی کسر) آپ نے ضرور سنا ہوگا کہ دنیا کے نقشہ (یا global maps) اور بلڈنگوں کی تعمیر کے لئے Blue Print کو مناسب Scale factor اور مخصوص رواج (Conventions) کو ذہن میں رکھتے ہوئے بنائے جاتے ہیں۔ واضح طور پر اشکال کی مشابہت کو سمجھنے کے لئے ہم مندرجہ ذیل مشغلہ انجام دیتے ہیں۔



شکل 6.4

سرگرمی 1: اپنے کلاس روم کی چھت کے ایک نقطہ O پر ایک جلتا ہوا بلب لگائیں اور اس کے ٹھیک نیچے ایک میز رکھیں۔ ایک کثیر ضلعی، مان لیجئے ایک چار ضلعی ABCD ایک گتے سے کاٹ کر زمین کے متوازی اس بلب اور میز کے درمیان رکھیں۔ تب ABCD کی پرچھائیں میز پر پڑے گی۔ اس پرچھائی کی Outline کو A'B'C'D' مارک کیجئے (شکل 6.4 دیکھیے)۔

نوٹ کیجئے کہ چار ضلعی A'B'C'D'، چار ضلعی ABCD کی بڑھی ہوئی شکل ہے۔ یہ روشنی کی خصوصیت کی وجہ سے

ہے کیونکہ روشنی ہمیشہ ایک خط مستقیم میں چلتی ہے۔ آپ یہ بھی نوٹ کر سکتے ہیں A' کرن OA پر، B' کرن OB پر اور C'، OC پر اور D'، OD پر واقع ہے۔ اس لئے چار ضلعی A'B'C'D' اور ABCD ایک ہی شکل اور مختلف سائز کے ہیں۔ اس لئے چار ضلعی A'B'C'D' چار ضلعی ABCD کے مشابہ ہیں۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ چار ضلعی ABCD چار ضلعی A'B'C'D' کے مشابہ ہیں۔

یہاں آپ یہ بھی نوٹ کر سکتے ہیں کہ راس A' کا نظیر راس ہے راس B'، راس B' کا نظیر راس ہے راس C'، راس C' کا نظیر راس ہے راس D'، راس D' کا نظیر راس ہے راس A'۔ اس کے علاوہ راس A' کا نظیر راس ہے راس B'، راس B' کا نظیر راس ہے راس C'، راس C' کا نظیر راس ہے راس D'، راس D' کا نظیر راس ہے راس A'۔

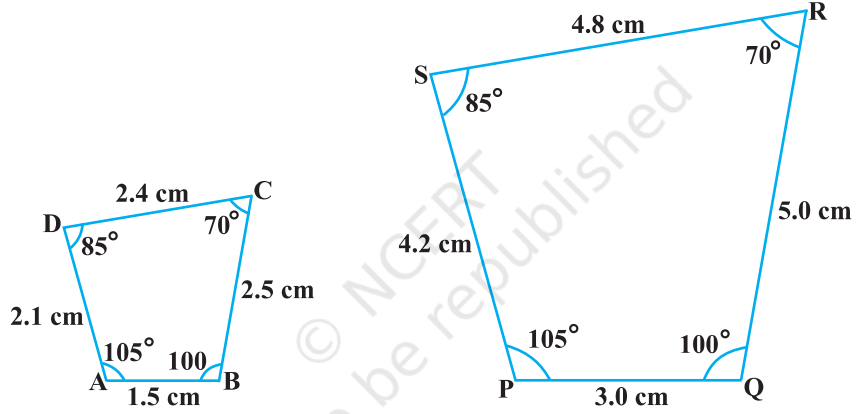
درحقیقت دونوں چار ضلعی کے زاویوں اور اضلاع کی پیمائش سے آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C', \angle D = \angle D' \text{ (i) اور}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} \text{ (ii)}$$

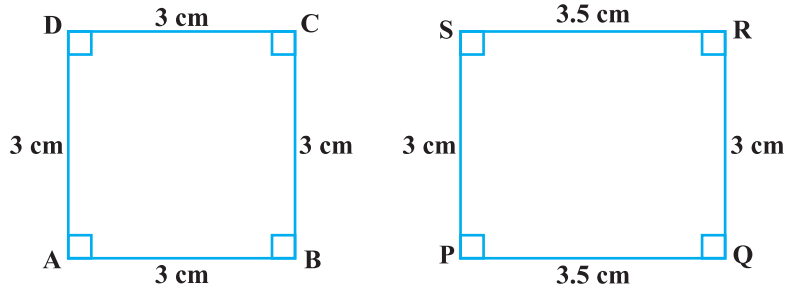
اس سے اس بات کو مزید تقویت ملتی ہے کہ دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد یکساں ہے۔ مشابہ ہوں گے اگر (i) تمام نظیری زاویہ برابر ہو (ii) تمام نظیری اضلاع ایک ہی نسبت میں ہو (یا متناسب ہوں)

مذکورہ بالا بیان کی رو سے آپ آسانی سے یہ کہہ سکتے ہیں کہ چار ضلعی ABCD اور PQRS مشابہ ہیں شکل 6.5 دیکھیے۔



شکل 6.5

ریمارک: آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ اگر ایک کثیر ضلعی دوسری کثیر ضلعی کے مشابہ ہے اور دوسرا کثیر ضلعی تیسرے کثیر ضلعی

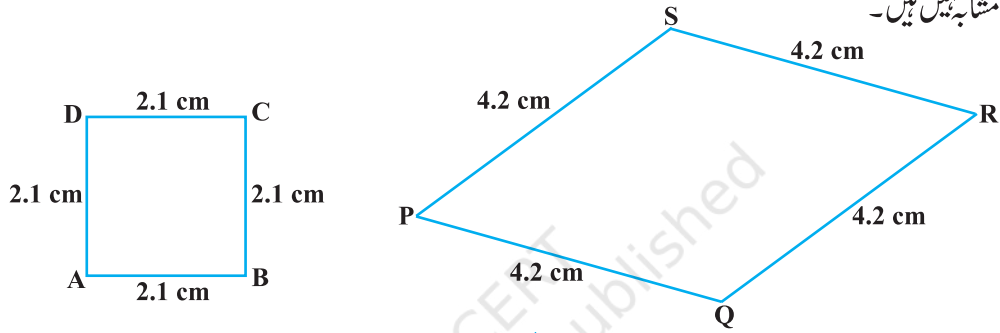


شکل 6.6

کے مشابہ ہے تو پہلا کثیر ضلعی تیسرے کے مشابہ ہوگی۔

آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ دو چار ضلعی کے (مربع اور مستطیل) شکل 6.6 میں نظیری زاویہ برابر ہیں لیکن ان کے نظیری اضلاع ایک ہی نسبت میں نہیں ہیں۔

اس لئے دو چار ضلعی مشابہ نہیں ہیں اسی طرح سے آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ شکل 6.7 کے دو چار ضلعی (مربع اور مستطیل) میں نظیر اضلاع ایک ہی نسبت میں ہیں (لیکن ان کے نظیری زاویہ برابر نہیں ہیں اس لئے یہ دونوں چار ضلعی (کثیر ضلعی) کے مشابہ نہیں ہیں۔



شکل 6.7

اس طرح سے مندرجہ بالا میں مشابہت کی کوئی سی بھی دو شرطیں (i) اور (ii) ان کی مشابہت کے لئے کافی نہیں ہیں۔

مشق 6.1

1- بریکٹ میں دئے گئے صحیح الفاظ سے مندرجہ ذیل خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

(i) تمام دائرے — (متماثل، مشابہ) ہوتے ہیں۔

(ii) تمام مربعات — ہوتے ہیں (متماثل، مشابہ)

(iii) تمام — مثلث مشابہ ہوتے ہیں (مساوی الساقین، مساوی ضلعی)

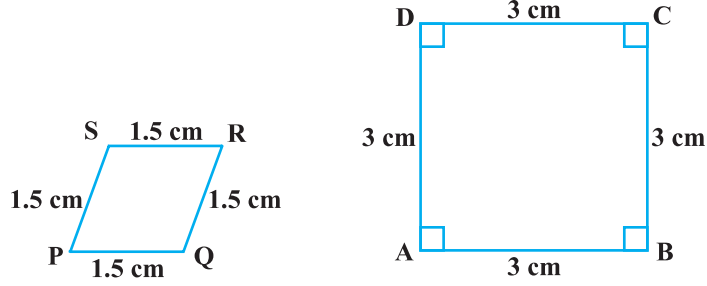
(iv) دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد یکساں ہے۔ مشابہ ہوں گی اگر (a) ان کے نظیری زاویہ — ہوں اور (b) ان

کے نظیری ضلع — ہیں (مساوی، متناسب)

2- دو مختلف مثالیں دیجئے۔

(i) مشابہ اشکال کے جوڑوں کی (ii) غیر مشابہ اشکال کے جوڑوں کی

3۔ بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل چار ضلعی مشابہ ہیں یا نہیں:



شکل 6.8

6.3 مثلثوں کی مشابہت



تھیلز

(546 – 640 قبل مسیح)

آپ دو مثلثوں کی مشابہت کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟
آپ دہرا سکتے ہیں کہ مثلث بھی ایک کثیر ضلعی ہے اس لئے ہم مثلثوں کی مشابہت کے لئے بھی وہی شرطیں بیان کر سکتے ہیں جو ہیں:
دو مثلث مشابہ ہیں اگر

(i) ان کے نظیری زاویہ برابر ہوں

(ii) ان کے نظیر اضلاع کی نسبت برابر ہو (متناسب ہوں)

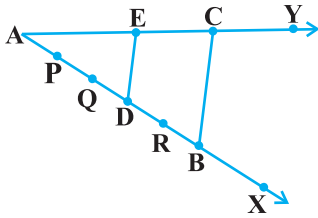
ایک مشہور یونانی ریاضی داں نے دو مساوی زاویہ مثلث سے متعلق ایک اہم حقیقت سے آگاہ کیا ہے دو مساوی زاویہ مثلثوں کے نظیری اضلاع کی نسبت ہمیشہ برابر ہوتی ہے۔ ایسا مانا جاتا ہے کہ اس نے ایک نتیجہ جو متناسب کا بنیادی مسئلہ (جواب تھیلز کا مسئلہ جانا جاتا ہے) کا استعمال کیا جاتا ہے۔

متناسب کے بنیادی مسئلہ کو سمجھنے کے لئے ہم اسے ایک عملی کام کریں

عملی کام (سرگرمی) 2: کوئی زاویہ XAY بنائیے اور اس کے ایک بازو

AX پر نقاط (مان لیجئے 5 نقطہ) P, Q, D, R, اور اس طرح سے مارک کریں

کے $AP = PQ = QD = DR = RB$ سے گذرتا ہوا کوئی خط جو بازو



شکل 6.9

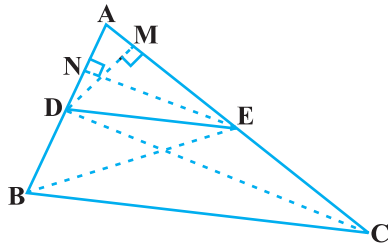
AY کو C پر قطع کرتا ہے کھینچے (شکل 6.9 دیکھیے)

اور D سے گذرتا ہوا بھی ایک کھینچے جو BC کے متوازی ہو اور A اور C کو E پر قطع کرے۔ کیا آپ اپنی بناوٹ سے مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$ ؟ AE اور EC کی پیمائش کیجئے۔ $\frac{AE}{EC}$ کے بارے میں کیا خیال ہے؟ مشاہدہ کیجئے کہ $\frac{AE}{EC}$ بھی $\frac{3}{2}$ کے مساوی ہے۔ اس طرح سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\triangle ABC$ میں $DE \parallel BC$ اور $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ کیا یہ ایک اتفاق ہے؟ نہیں یہ مندرجہ ذیل مسئلے کی وجہ سے ہے (جو متناسب کا بنیادی مسئلہ کہلاتا ہے)۔

مسئلہ 6.1: اگر مثلث کے ایک ضلع کے متوازی کوئی خط کھینچا جائے تو وہ باقی دو اضلاع کو مختلف نقطوں پر قطع کرتا ہے اور وہ دو

اضلاع ایک ہی نسبت میں منقسم ہوتے ہیں۔

ثبوت: ہمیں مثلث ABC دیا ہوا ہے جس میں ایک خط BC کے متوازی ہے جو باقی دو اضلاع AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر قطع کرتا ہے (شکل 6.10 دیکھیے)



شکل 6.10

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

آئیے BE اور CD کو ملائیں اور پھر $DM \perp AC$ اور $EN \perp AB$

کھینچیں۔

$$\text{اب } \triangle ADE \text{ کا رقبہ} = \left(\frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{اونچائی}\right) = \frac{1}{2} \times AD \times EN$$

یاد کیجئے کہ آپ نے نویں کلاس میں پڑھا تھا کہ $\triangle ADE$ کے رقبہ کو ہم $\text{ar}(\triangle ADE)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\text{اس لئے} \quad \text{ar}(\triangle ADE) = \frac{1}{2} AD \times EN$$

$$\text{اسی طرح سے} \quad \text{ar}(\triangle BDE) = \frac{1}{2} DB \times EN$$

$$\text{ar}(\triangle ADE) = \frac{1}{2} AE \times DM \quad \text{اور} \quad \text{ar}(\triangle DEC) = \frac{1}{2} EC \times DM$$

$$\frac{\text{ar}(\triangle ADE)}{\text{ar}(\triangle BDE)} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EN}{\frac{1}{2} DB \times EN} = \frac{AD}{DB} \quad \text{اس لئے (1)}$$

$$\frac{\text{ar}(\triangle ADE)}{\text{ar}(\triangle DEC)} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DM}{\frac{1}{2} EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \quad (2) \quad \text{اور}$$

نوٹ کیجیے کہ $\triangle BDE$ اور $\triangle DEC$ ایک قاعدہ DE اور متوازی خطوط BC اور DE کے درمیان میں ہے۔

$$\text{ar}(\triangle BDE) = \text{ar}(\triangle DEC) \quad (3) \quad \text{اس لئے}$$

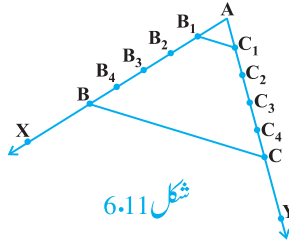
اس لئے (1) اور (2) اور (3) ہمیں ملتا ہے

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

کیا اس مسئلے کا معکوس بھی درست ہے (معکوس کے مفہوم کے لئے ضمیمہ 1 دیکھئے) اس کی جانچ کرنے کے لئے آئیے مندرجہ ذیل مشغلہ کرتے ہیں

سرگرمی 3: اپنی کاپی پر ایک زاویہ $\angle XAY$ بنائیے اور شعاع AX پر نقطے B_1, B_2, B_3, B_4 اور B مارک کیجیے
 $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$

اسی طرح سے شعاع AY پر نقطے C_1, C_2, C_3, C_4 مارک کیجیے جبکہ $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$ تب B_1C_1 اور BC کو ملائیے (شکل 6.11 دیکھیے)۔



$$\text{نوٹ کیجیے کہ} \quad \frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} \quad (\text{ہر ایک } \frac{1}{4} \text{ کے برابر ہے})$$

آپ یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ خطوط B_1C_1 اور BC ایک دوسرے کے متوازی ہیں یعنی

$$B_1C_1 \parallel BC \quad (1)$$

اسی طرح سے B_2C_2, B_3C_3 اور B_4C_4 کو ملانے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} \left(= \frac{2}{3} \right) \text{ اور } B_2C_2 \parallel BC \quad (2)$$

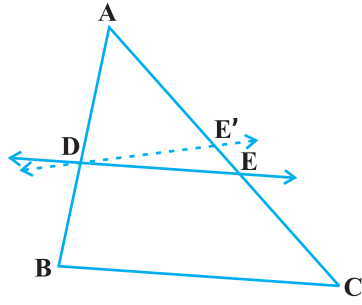
$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} \left(= \frac{3}{2} \right) \text{ اور } B_3C_3 \parallel BC \quad (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} \left(= \frac{4}{1} \right) \text{ اور } B_4C_4 \parallel BC \quad (4)$$

(1)، (2)، (3)، اور (4) یہ مشاہدہ کیا جاسکتا ہے کہ اگر ایک خط مثلث کے دو اضلاع کو ایک نسبت میں منقسم کرتا ہے تب خط تیسرے اضلاع کے متوازی ہوگا۔

اس مشغلے کو ہم کو ایک ایسے زاویہ XAY بنا کر دہرا سکتے ہیں جن کی پیمائش مختلف ہے اور اس کے بازو AX اور AY کے مساوی حصہ بنے ہوں۔ ہر مرتبہ آپ کو ایک ہی نتیجہ ملے گا۔ اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل ہوگا جو مسئلہ 6.1 کا معکوس ہے۔

مسئلہ 6.2: اگر ایک خط مثلث کسی دو اضلاع کو یکساں نسبت میں تقسیم کرتا ہے، تب یہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔



شکل 6.12

اس مسئلے کو ہم اس طرح سے ثابت کر سکتے ہیں، ایک DE اس طرح لیجئے کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ اور یہ فرض کرتے ہوئے کہ BC، DE کے متوازی نہیں ہے۔ (شکل 6.12 دیکھئے)

اگر BC، DE کے متوازی نہیں ہے، تو BC، DE کے متوازی کیجئے۔

$$\text{اس لئے} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (\text{کیوں؟})$$

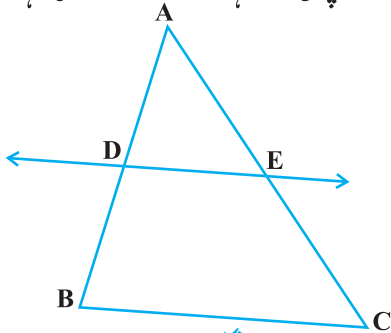
$$\text{اس لئے} \quad \frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C} \quad (\text{کیوں؟})$$

مذکورہ بالا مساوات میں دونوں طرف 1 جمع کرنے پر آپ دیکھ سکتے ہیں اور E اور E' منطبق ہیں (کیوں؟)

مذکورہ بالا مسئلوں کی مزید وضاحت کے لئے آئیے کچھ مثالوں کو لیتے ہیں۔

مثال 1: اگر ایک خط مثلث ABC کے اضلاع AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر قطع کرتا ہے۔ اور BC کے متوازی ہے تو

$$\text{ثابت کیجئے کہ} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (\text{شکل 6.13 دیکھیے})$$

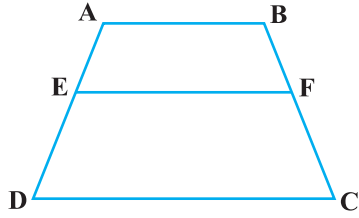


شکل 6.13

حل: $DE \parallel BC$ دیا ہوا ہے

$$\text{اس لئے} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (\text{مسئلہ 6.1})$$

$$\text{یا} \quad \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$



شکل 6.14

$$\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1 \quad \text{یا}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{یا}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \text{اس لئے}$$

مثال 2: ABCD ایک منحرف ہے جس میں $AB \parallel DC$ ، E اور F دو

غیر متوازی اضلاع بالترتیب AD اور BC پر نقطے ہیں جب کہ $EF \parallel AB$ (شکل 6.14 دیکھیے)

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \quad \text{دکھائیے کہ}$$

حل: آئیے AC کو ملائیں جو EF کو قطع کرے (شکل 6.15 دیکھیے)

$AB \parallel DC$ اور $EF \parallel AB$ (دیا ہوا ہے)

اس لئے $EF \parallel DC$ (خطوط جو ایک ہی خط کے متوازی ہوں آپس میں بھی متوازی ہوں گے۔

اب $\triangle ADC$ میں

$EG \parallel DC$ (کیونکہ $EF \parallel DC$)

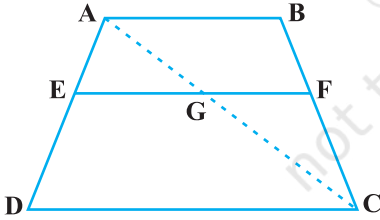
$$(1) \quad \text{اس لئے (مسئلہ 6.1)} \quad \frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$$

اسی طرح سے $\triangle CAB$

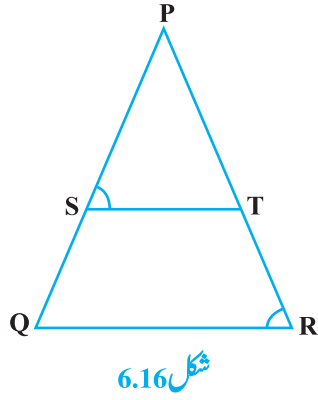
$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{CG}{AG} &= \frac{CF}{BF} \\ \frac{AG}{GC} &= \frac{BF}{FC} \end{aligned} \quad \text{یعنی}$$

اس لئے (1) اور (2) سے

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$



شکل 6.15



مثال 3: شکل 6.16 میں $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ اور $\angle PST = \angle PRQ$

ثابت کیجئے کہ PQR ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

حل: یہ دیا ہوا ہے کہ $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

اس لئے $ST \parallel QR$ (مسئلہ 6.2)

اس لئے $\angle PST = \angle PQR$ (نظیری زاویہ) (1)

مزید یہ دیا ہوا ہے کہ

$$\angle PST = \angle PRQ$$

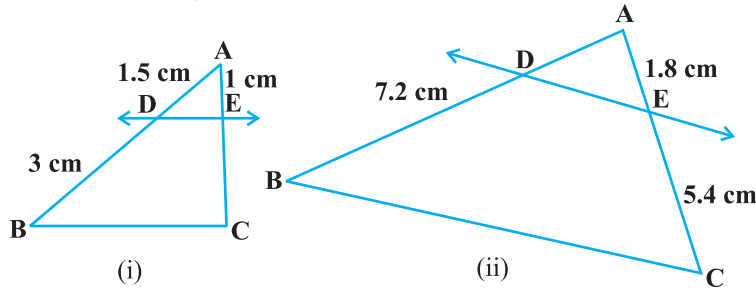
اس لئے $\angle PRQ = \angle PQR$ (1 اور 2 سے)

اس لئے $PQ = PR$ (مساوی زاویوں کے سامنے کے ضلع)

یعنی PQR ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

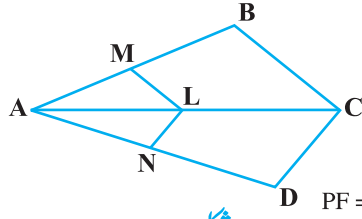
مشق 6.2

1- شکل 6.17 (i) اور (ii) میں $DE \parallel BC$ (i) میں EC اور (ii) میں AD معلوم کیجئے۔



شکل 6.17

2- E اور F بالترتیب مثلث PQR کے اضلاع PQ اور PR پر دو نقطے ہیں۔ مندرجہ ذیل ہر ایک حالت کے لئے بیان کیجئے



شکل 6.18

FR = 2.4 cm اور PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm (i)

RF = 9 cm اور PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm (ii)

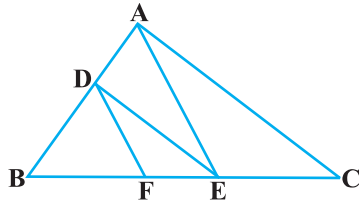
PF = 0.36 cm اور PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm (iii)

3- شکل 6.18 میں اگر $LN \parallel CD$ اور $LM \parallel CB$ ثابت کیجیے کہ

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$$

4- 6.19 میں $DF \parallel AE$ اور $DE \parallel AC$ ثابت کیجیے کہ

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$$

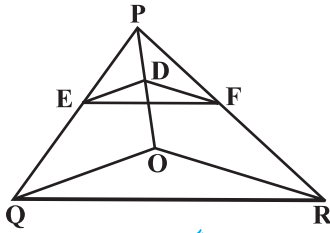


شکل 6.19

5- شکل 6.20 میں $DE \parallel OQ$ اور $DF \parallel OR$ دکھائیے کہ $EF \parallel QR$

6- شکل 6.21 میں A, B اور C بالترتیب OP, OQ اور OR پر نقطے ہیں

جب کہ $AB \parallel PQ$ اور $AC \parallel PR$ دکھائیے کہ $BC \parallel QR$



شکل 6.20

7- مسئلہ 6.1 کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ مثلث کے ایک ضلع

کے وسطی نقطہ سے گزرنے والا خط دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ

تیسرے ضلع کی تنصیف کرے گا۔ (یاد کیجیے کہ آپ اس کو نوئیں

جماعت میں ثابت کر چکے ہیں)

8- مسئلہ 6.2 کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ مثلث کے دو

اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط تیسرے اضلاع کے متوازی

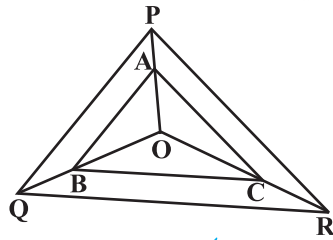
ہوتا ہے (یاد کیجیے کہ آپ اس کو نوئیں جماعت میں ثابت کر چکے ہیں)

9- ABCD ایک منحرف ہے جس میں $AB \parallel DC$ اور اس کے دوازی

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

دوسرے نقطہ O پر قطع کرتے ہیں دکھائیے کہ

10- ایک چار ضلعی ABCD کے دوازی دوسرے نقطہ O پر قطع کرتے ہیں جب کہ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ دکھائیے کہ چار ضلعی



شکل 6.21

ABCD ایک مخرف ہے۔

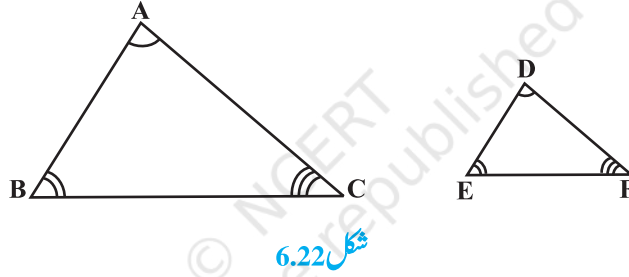
6.4 مثلثوں کی مشابہت کی شرطیں

پچھلے سیکشن میں ہم نے بیان کیا کہ دو مثلث مشابہ ہوتے ہیں اگر (i) ان کے نظیری زاویہ برابر ہوں (ii) ان کے نظیری اضلاع کی نسبت برابر (متناسب ہوں) ہو۔

یعنی ΔABC اور ΔDEF میں اگر

$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F \quad (i)$$

$$\text{تب دو مثلث مشابہ ہوں گے (شکل 6.22 دیکھیے)} \quad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \quad (ii)$$



شکل 6.22

یہاں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ A کا نظیری B، D کا نظیری E اور C کا نظیری F ہے۔ علامتی طور پر ہم ان دو مثلثوں کی مشابہت کو ' $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ' لکھتے ہیں اور پڑھتے ہیں کہ مثلث ABC مثلث DEF کے مشابہ ہے۔ علامت '~' کے مشابہ ہیں، کو ظاہر کرتی ہے، یاد کیجیے آپ نے نویں کلاس میں علامت '~' کو متماثل ہے، کے لیے استعمال کیا تھا۔

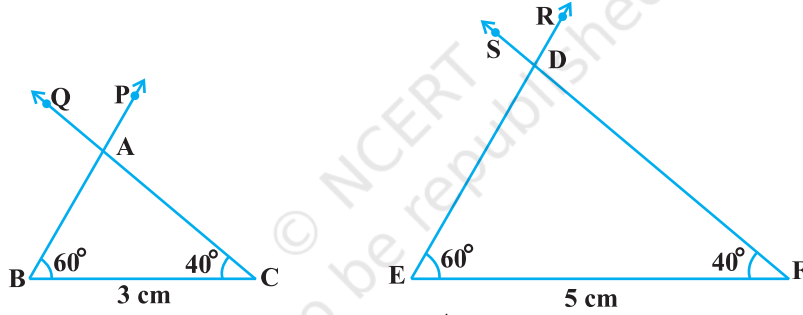
اس کو ضرور یاد رکھنا چاہیے کہ جیسے کے دو مثلثوں کی متماثلت میں کیا گیا، مثلثوں کی مشابہت کو بھی علامتی طور پر ظاہر کیا جائے۔ ان کے راسوں کی صحیح مطابقت کو استعمال کرے۔ مثال کے طور پر شکل 6.22 کے مثلثوں ABC اور DEF کے لئے ہم $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ یا $\Delta ABC \sim \Delta FED$ نہیں لکھ سکتے ہیں۔ لیکن ہم $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ لکھ سکتے ہیں۔

اب قدرتی طور پر یہ سوال پیدا ہوتا ہے: دو مثلثوں ABC اور DEF کی مشابہت کی جانچ کرنے کے لیے، کیا ہم ہمیشہ ان کے نظیری زاویوں کی برابری ($\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$) اور ان کے نظیری اضلاع کی نسبت کی برابری پر غور کرتے ہیں؟ آئیے جانچ کرتے ہیں۔ یاد کیجیے کہ آپ نے نویں کلاس میں دو مثلثوں کی

کی مماثلت سے متعلق کچھ شرطیں حاصل کی تھیں، جن میں صرف تین نظیر حصوں کے جوڑے ملوث کیجئے۔ یہاں بھی آئیے ہم ایک کوشش کریں دو مثلثوں کی مشابہت کی شرطیں حاصل کرنے کی جس میں دو مثلثوں کے نظیری حصوں کے چھ جوڑوں کے بجائے کم نظیری حصوں کے جوڑوں کا استعمال کر کے مثلثوں کو مشابہ ثابت کر دیں۔ اس کے لیے ہم مندرجہ ذیل سرگرمی (عملی کام) کرتے ہیں۔

سرگرمی 4: دو مختلف لمبائیوں، مان لیجئے 3 سینٹی میٹر اور 5 سینٹی میٹر، والے قطعات خط بالترتیب BC اور EF کھینچیں۔ تب نقطہ B اور C پر بالترتیب زاویہ PBC اور QCB بنائیے جن کی پیمائش مان لیجئے 60° اور 40° ہو۔ مزید نقطہ E اور F پر بالترتیب زاویہ REF اور SEF، 60° اور 40° کے بنائیں۔ (شکل 6.23 دیکھیے)

مان لیجئے شعائیں BP اور CQ ایک دوسرے کو A پر اور ER اور FS ایک دوسرے کو D پر قطع کریں دو مثلثوں

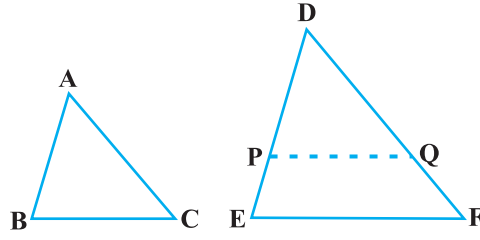


شکل 6.23

ABC اور DEF میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\angle A = \angle D$ اور $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ بھی ان دونوں مثلثوں کے نظیری زاویے برابر ہیں۔ آپ ان کے نظیری اضلاع کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ نوٹ کیجئے کہ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$ اور $\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE}$ کے بارے میں آپ کا خیال ہے CA، DE، AB اور FD کی پیمائش کرنے پر آپ پائیں گے کہ $\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE}$ اور $\frac{CA}{FD} = 0.6$ کے برابر ہیں (یا نزدیکی طور پر 0.6 کے قریب ہیں۔ اگر پیمائش میں کچھ غلطی ہوگئی ہو تو) اس طرح سے $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ آپ اس عمل کو ایسے دوسرے بہت سے مثلثوں کے جوڑے بنا کر دہرا سکتے ہیں جن کے نظیری زاویے مساوی ہوں ہر مرتبہ آپ پائیں گے کہ ان کے نظیری اضلاع کی نسبت برابر ہے (یا متناسب ہیں) اس مشغلہ سے ہمیں دو مثلثوں کی مشابہت کی مندرجہ ذیل شرط حاصل ہوتی ہے۔

مسئلہ 6.3: اگر دو مثلثوں میں نظیری زاویہ برابر ہوں۔ تب ان کے نظیری اضلاع کی نسبت

برابر ہوتی ہے (یا متناسب) اور اس لئے دونوں مثلث مشابہ ہوں گے -
اس مشابہت کی شرط کو ہم دو مثلثوں کی مشابہت AAA (زاویہ-زاویہ-زاویہ) شرط کہتے ہیں اس مسئلے کو ہم دو مثلثوں ABC اور DEF کو لے کر کر سکتے ہیں جب کہ، $\angle B = \angle E$ $\angle A = \angle D$ اور $\angle C = \angle F$ (شکل 6.24 دیکھیے)



شکل 6.24

اگر $DP = AB$ اور $DQ = AC$ کاٹے اور PQ ملائے

اس لئے

$$\Delta ABC \cong \Delta DPQ \quad (\text{کیوں؟})$$

اس سے حاصل ہوتا ہے $PQ \parallel EF$ اور $\angle B = \angle P = \angle E$ (کیسے؟)

$$\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF} \quad \text{اس لئے}$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad \text{یعنی}$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \quad \text{اسی طرح سے، اور اسی لئے}$$

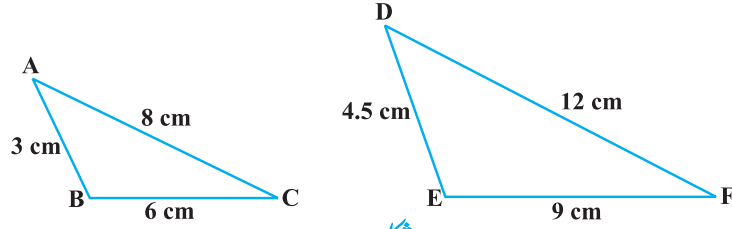
رائے زنی (ریمارک): اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے برابر ہوں تب مثلث کے زاویوں کی مجموعی خصوصیت سے ان کا تیسرا زاویہ بھی مساوی ہوگا۔ اس لئے AAA مشابہت کی شرط کو ہم اس طرح بیان کر سکتے ہیں۔
اگر ایک مثلث کے دو زاویے بالترتیب دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے برابر ہوں تو دو مثلث مشابہ ہوتے ہیں۔

اس شرط کو ہم AA دو مثلث کی مشابہت کی شرط کہتے ہیں۔

اوپر آپ دیکھ چکے ہیں اگر کسی مثلث کے تین زاویے بالترتیب دوسرے مثلث کے تین زاویوں کے برابر ہیں تو ان کے نظیری اضلاع متناسب ہوں گے (یا ان کی نسبت برابر ہوگی) اس بیان کے معکوس کے بارے میں کیا خیال ہے؟ کیا اس کا معکوس درست ہے؟ دوسرے لفظوں میں اگر ایک مثلث کے اضلاع بالترتیب دوسرے مثلث کے اضلاع کے متناسب ہیں، تو کیا یہ صحیح ہے کہ ان کے نظیری زاویے بھی برابر ہوں؟ آئیے اس کو ایک مشغلے کے ذریعے جانچیں۔

سرگرمی 5: دو مثلث ABC اور DEF اس طرح بنائیں کہ 3 سینٹی میٹر $AB = 3$ ، 6 سینٹی میٹر $BC = 6$ اور 8 سینٹی میٹر $CA = 8$ ، 4.5 سینٹی میٹر $DE = 4.5$ ، 9 سینٹی میٹر $EF = 9$ اور 12 سینٹی میٹر $FD = 12$ (شکل 6.25 دیکھیے)

اس لئے آپ کے پاس ہے $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (ہر ایک $\frac{2}{3}$ کے برابر ہیں)



شکل 6.25

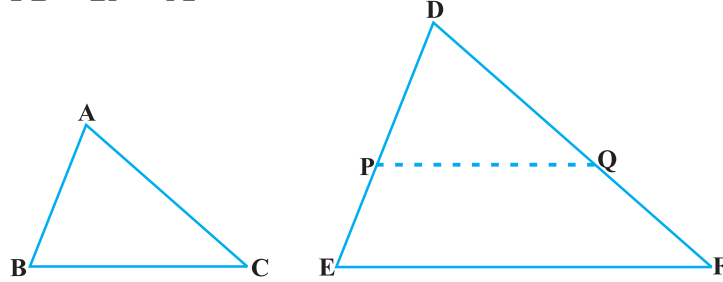
اب $\angle A = \angle D$ ، $\angle B = \angle E$ اور $\angle C = \angle F$ کی پیمائش کیجئے آپ مشاہدہ کریں گے کہ $\angle A = \angle D$ ، $\angle B = \angle E$ اور $\angle C = \angle F$ یعنی دونوں مشغلوں کے نظیری زاویے برابر ہیں۔

اس مشغلے کو آپ دوسرے اسی طرح کے مثلثوں کو بنا کر (جن کے اضلاع کی نسبت برابر ہو) دہرا سکتے ہیں۔ ہر مرتبہ آپ پائیں گے کہ ان کے نظیری زاویے برابر ہوں گے۔ یہ مثلثوں کی مشابہت کی مندرجہ ذیل شرط کی وجہ سے ہے۔

مسئلہ 6.4: اگر دو مثلثوں میں، ایک مثلث کے اضلاع دوسرے مثلث کے اضلاع کے متناسب ہوں (یا ان کی نسبت برابر ہو) تب ان کے نظیری زاویے برابر ہوں گے اور اس طرح سے دونوں مثلث مشابہ ہوتے ہیں۔

دو مثلثوں کی مشابہت کی اس شرط کو ہم SSS (ضلع-ضلع-ضلع) شرط کہتے ہیں۔

اس مسئلے کو ہم دو مثلث ABC اور DEF لے کر ثابت کر سکتے ہیں جبکہ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (شکل 6.26 دیکھیے):



شکل 6.26

$DQ = AC$ اور $DP = AB$ کاٹنے اور PQ کو ملائیے۔

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ اور $PQ \parallel EF$ (کیسے؟)

اس لئے $\angle Q = \angle F$ اور $\angle P = \angle E$

اس لئے $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

اس لئے $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (کیوں؟)

اس لئے $BC = PQ$ (کیوں؟)

اس طرح سے $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (کیوں؟)

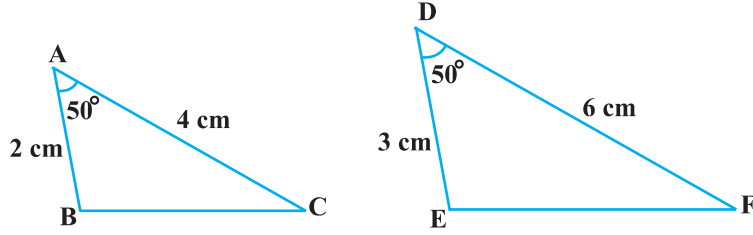
اس لئے $\angle C = \angle F$ اور $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ (کیسے؟)

ریمارک: آپ یاد کیجیے کہ دونوں شرطیں (i) نظیری زاویہ برابر ہیں (ii) نظیری اضلاع کی نسبت برابر ہے دو کثیر ضلعی کے مشابہ ہونے کے لئے کافی نہیں ہیں۔ لیکن مسئلہ 6.3 اور 6.4 کی بنیاد پر اب آپ کہہ سکتے ہیں کہ دو مثلثوں کی مشابہت کے سلسلے میں دونوں شرطوں کی جانچ کرنا ضروری نہیں ہے۔ ایک شرط دوسری شرط کو اپنے آپ پوری ہو جاتی ہے۔

آئیے اب نویں کلاس میں مثلثوں کی متماثلت کی مختلف شرطوں کو دہرائیے۔ آپ یہ مشاہدہ کریں گے کہ مشابہت کی SSS شرط کا موازنہ متماثلت کی SSS شرط سے کیا جاسکتا ہے۔ اس بات سے ہمیں تقویت ملتی ہے کہ ہم دیکھیں مثلثوں کی متماثلت کی SAS شرط کا موازنہ مشابہت کی شرط سے کیا جاسکتا ہے یا نہیں، اس کے لئے ہم مندرجہ ذیل عملی کام کرتے ہیں۔

سرگرمی 6: دو مثلث ABC اور DEF بنائیے جس میں سینٹی میٹر $AB = 2$ ، $\angle A = 50^\circ$ ، $AC = 4$ سینٹی میٹر، $DE = 3$ سینٹی میٹر، $\angle D = 50^\circ$ اور $DF = 6.27$ (شکل 6.27 دیکھیے)

یہاں آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (ہر ایک $\frac{2}{3}$ کے برابر ہے) اور $\angle A = \angle D$ (ضلع AB اور AC کے درمیان)



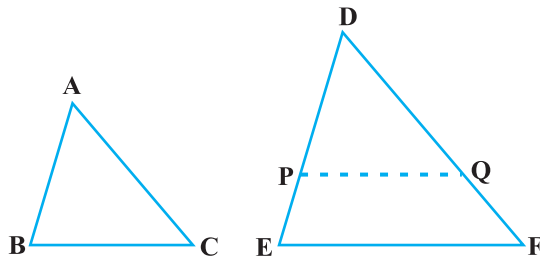
شکل 6.27

بننا زاویہ) برابر ہے $\angle D$ (اضلاع DE اور DF کے درمیان بننے والے زاویے) کے۔ یعنی مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے برابر ہے اور ان زاویوں کے حامل اضلاع کی نسبت برابر ہو (یعنی متناسب) آئیے اب $\angle E, \angle C, \angle B$ اور $\angle F$ کی پیمائش کیجیے۔

آپ پائیں گے کہ $\angle C = \angle F$ اور $\angle B = \angle E$ یعنی $\angle C = \angle F$ اور $\angle B = \angle E$ اس لئے مشابہت کی AAA شرط کے مطابق $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ۔ آپ اس مشغلے مثلثوں کے بہت سے ایسے جوڑے بنا کر کر سکتے ہیں جس میں مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے برابر ہو اور ان زاویوں کے حامل اضلاع کی نسبت برابر ہو (متناسب ہو)۔ ہر مرتبہ آپ پائیں گے کہ مثلث مشابہ ہیں یہ مثلثوں کی مشابہت کی مندرجہ ذیل شرط کی وجہ سے ہے۔

مسئلہ 6.5: اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے برابر ہو اور ان زاویوں کے حامل اضلاع متناسب ہوں، تو دونوں مثلث مشابہ ہوں گے۔
اس شرط کو ہم مثلثوں کی مشابہت کی SAS (ضلع۔ زاویہ۔ ضلع) شرط سے جانتے ہیں۔

جیسا ہم نے پہلے کیا ہے، اس مسئلے کو بھی ہم دو مثلثوں ABC اور DEF لے کر ثابت کر سکتے ہیں جب کہ



شکل 6.28

شکل 6.28 اور $\angle A = \angle D$ اور $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} (<1)$

دیکھئے) $DP = AB$ اور $DQ = AC$ کاٹئے اور PQ ملائیے۔

اب $PQ \parallel EF$ اور $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$ (کیسے؟)

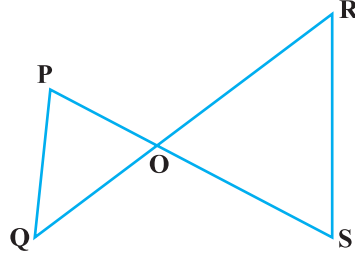
اس لئے $\angle C = \angle Q$ اور $\angle A = \angle D, \angle B = \angle P$

اس لئے $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (کیوں)

اس شرط کے استعمال کی مزید وضاحت کے لئے

ہم کچھ مثالیں لیتے ہیں

مثال 4: شکل 6.29 میں اگر $PQ \parallel RS$ ثابت کیجئے کہ $\Delta POQ \sim \Delta SOR$



شکل 6.29

حل:

$PQ \parallel RS$

$$\angle P = \angle S$$

اس لیے

$$\angle Q = \angle R$$

اور

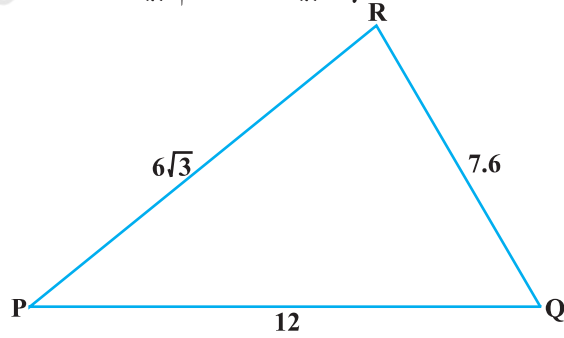
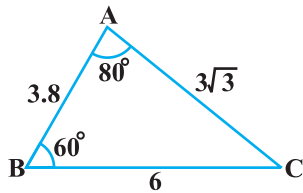
$$\angle POQ = \angle SOR$$

اس لیے

$$\Delta POQ \sim \Delta SOR$$

اس لیے

مثال 5: شکل 6.30 کا مشاہدہ کیجئے اور $\angle P$ معلوم کیجئے۔



شکل 6.30

حل: ΔABC اور ΔPQR میں

$$\frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \text{ اور } \frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$$

یعنی

$$\Delta ABC \sim \Delta RQP$$

اس لیے

$$\angle C = \angle P$$

اس لیے

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$$

لیکن

$$= 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$$

$$\angle P = 40^\circ$$

اس لیے

مثال 6: شکل 6.31 میں

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD.$$

$$\angle B = \angle D \text{ اور } \angle A = \angle C$$

دکھائیے کہ

(دیا ہوا ہے)

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD$$

حل:

(1)

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$$

اس لیے

$$\angle AOD = \angle COB$$

مزید ہمارے پاس ہے۔

(2) (بالمقابل زاویہ)

(مشابہت کی SAS شرط)

$$\Delta AOD \sim \Delta COB \text{ سے (1) اور (2)}$$

(مشابہت کے نظیری زاویہ)

$$\angle D = \angle B \text{ اور } \angle A = \angle C$$

اس لیے

مثال 7: 90 سینٹی میٹر قد کی ایک لڑکی 1.2 منٹ فی سیکنڈ کی

رفتار سے ایک لیمپ پوسٹ کے قاعدہ سے دور جا رہی ہے۔

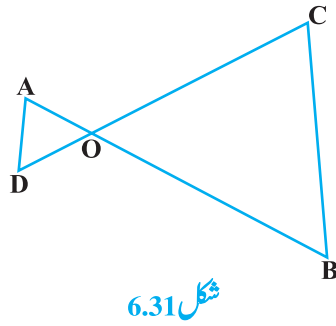
اگر لیمپ زمین سے 3.6 میٹر اونچائی پر واقع ہے تو 4 سیکنڈ بعد

اس کی پرچھائی کی لمبائی معلوم کیجیے۔

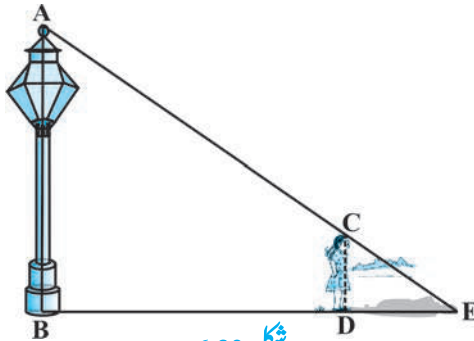
حل: مانا AB لیمپ پوسٹ کو ظاہر کرتا ہے اور CD 4 سیکنڈ چلنے

کے بعد لڑکی کو ظاہر کرنا ہے (شکل 6.32 دیکھیے) شکل میں آپ

دیکھ سکتے ہیں کہ DF لڑکی کی پرچھائی ہے۔ مان لیجیے DE



شکل 6.31



شکل 6.32

x میٹر ہے۔

$$DB = 1.2 \text{ میٹر} \times 4 = 4.8 \text{ میٹر}$$

نوٹ کیجئے ΔABE اور ΔCDE ،

$$\angle B = \angle D \text{ (ہر ایک } 90^\circ \text{ کا ہے کیونکہ}$$

لیمپ پوسٹ اور لڑکی دونوں زمین پر

انتصابی طور پر کھڑے ہیں)

(یکساں)

$$\angle E = \angle E \text{ اور}$$

$$\Delta ABE \sim \Delta CDE$$

$$\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD} \text{ اس لئے}$$

$$(90 \text{ cm} = \frac{90}{100} \text{ m} = 0.9)$$

$$\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9} \text{ یعنی}$$

$$4.8 + x = 4x \text{ یعنی}$$

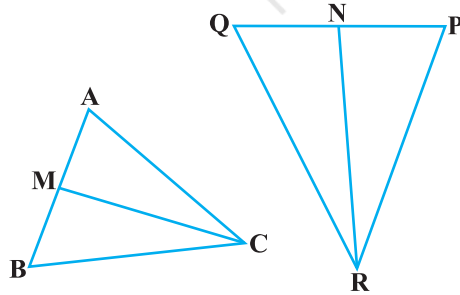
$$3x = 4.8 \text{ یعنی}$$

$$x = 1.6 \text{ یعنی}$$

اس لئے 4 سینڈ چلنے کے بعد لڑکی کی پرچھائی کی لمبائی 1.6 میٹر

مثال 8: شکل 6.33 میں CM اور RN بالترتیب ΔABC اور ΔPQR کے وسطانیہ ہیں اگر $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ کو ثابت

کیجئے کہ



شکل 6.33

(1)

(2)

$$\Delta AMC \sim \Delta PNR \text{ (i)}$$

$$\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} \text{ (ii)}$$

$$\Delta CMB \sim \Delta RNQ \text{ (iii)}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta PQR \text{ (i): حل}$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} \text{ اس لئے}$$

$$\angle C = \angle R \text{ اور } \angle A = \angle P, \angle B = \angle Q \text{ اور}$$

(کیونکہ CM اور RN وسطانیہ ہیں)

لیکن $PQ = 2 PN$ اور $AB = 2AM$

$$\frac{2AM}{2PN} = \frac{CA}{RP} \quad \text{اس لئے (1) سے}$$

(3)

$$\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP} \quad \text{یعنی}$$

(4) (2 سے)

$$\angle MAC = \angle NPR \quad \text{مزید}$$

اس لئے 3 اور 4 سے

(5) (SAS مشابہت)

$$\Delta AMC \sim \Delta PNR$$

(6)

$$\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP} \quad \text{(ii) (5) سے}$$

(7) (1 سے)

$$\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ} \quad \text{لیکن}$$

(8) [(6) اور (7) سے]

$$\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} \quad \text{اس لئے}$$

[(1) سے]

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} \quad \text{(iii) دوبارہ}$$

(9) [(8) سے]

$$\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} \quad \text{اس لئے}$$

$$\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2BM}{2QN} \quad \text{مزید}$$

(10)

$$\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN} \quad \text{یعنی}$$

(10) اور (9) سے]

$$\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN} \quad \text{یعنی}$$

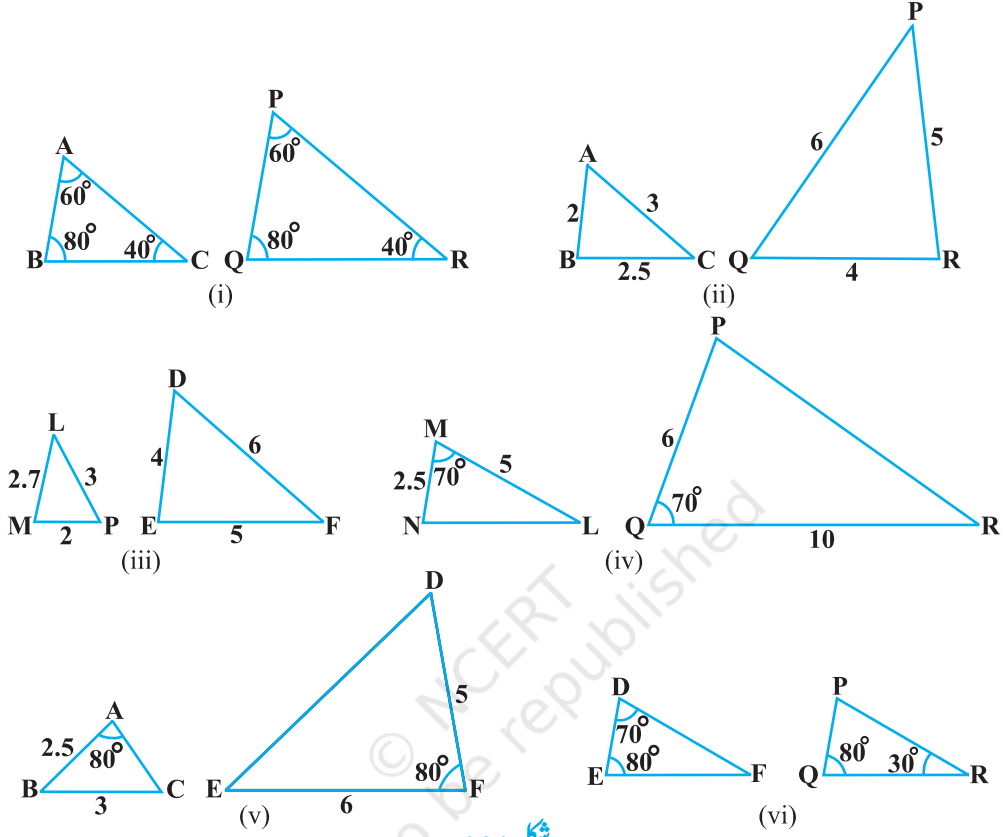
(SSS مشابہت)

$$\Delta CMB \sim \Delta RNQ \quad \text{اس لئے}$$

[نوٹ کیجئے: آپ (iii) کو اسی طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں جس سے (i) ثابت ہوا ہے۔]

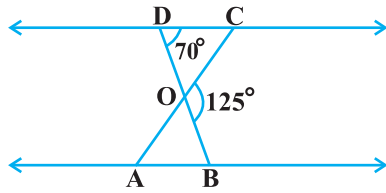
مشق 6.3

- 1- بیان کیجیے کہ شکل 6.34 میں کون سے مثلثوں کے جوڑے مشابہ ہیں۔ اس سوال کا جواب دینے کے لئے استعمال ہوئی مشابہت کی شرط لکھنے اور مشابہ مثلثوں کو علامتی شکل میں لکھیے۔



شکل 6.34

2۔ شکل 6.35 میں $\triangle ODC \sim \triangle OBA$ میں $\angle BOC = 125^\circ$



شکل 6.35

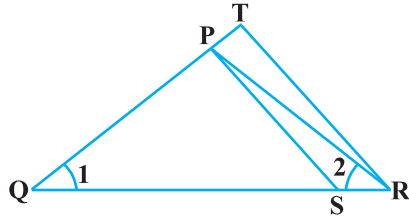
اور $\angle CDO = 70^\circ$ ، $\angle COC$ اور $\angle OAB$ معلوم کیجیے۔

3۔ ایک منحرف ABCD جس میں $AB \parallel DC$ کے وتر AC اور

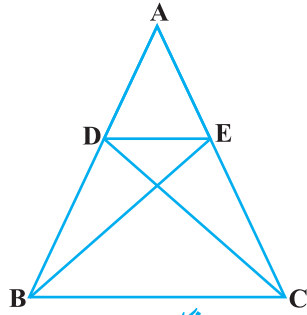
BD ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ دو مثالوں کی

مشابہت کی شرط کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیے، کہ

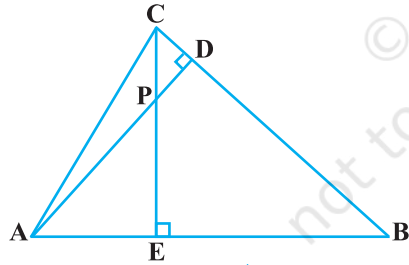
$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$



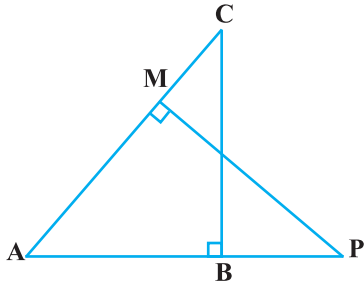
شکل 6.36



شکل 6.37



شکل 6.38



شکل 6.39

4- شکل 6.36 میں $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ اور $\angle 1 = \angle 2$ دکھائیے کہ

$$\Delta PQS \sim \Delta TQR$$

5- ΔPQR ، T اور S کے اضلاع PR اور QR پر دو نقطے ہیں جب

کہ $\angle P = \angle RTS$ دکھائیے کہ $\Delta PRQ \sim \Delta RTS$

6- شکل 6.37 میں اگر $\Delta ABE = \Delta ACD$ دکھائیے کہ

$$\Delta ADE \sim \Delta ABC$$

7- شکل 6.38 میں ΔABC کے ارتفاعات AD اور CE ایک

دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہوں تو دکھائیے کہ

$$\Delta AEP \sim \Delta CDP \quad (i)$$

$$\Delta ABD \sim \Delta CBE \quad (ii)$$

$$\Delta AEP \sim \Delta ADB \quad (iii)$$

$$\Delta PDC \sim \Delta BEC \quad (iv)$$

8- متوازی الاضلاع $ABCD$ کے بڑھے ہوئے ضلع AD پر

کوئی نقطہ E ہے اور BE ، CD کو F پر قطع کرتا ہے۔ دکھائیے

$$\Delta ABE \sim \Delta CFB \text{ کہ}$$

9- شکل 6.39 میں، ΔABC اور ΔAMP دو قائم مثلثیں ہیں جو

بالترتیب B اور M پر قائم ہیں: ثابت کیجیے کہ

$$\Delta ABC \sim \Delta AMP \quad (i)$$

$$\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP} \quad (ii)$$

10- CD اور GH بالترتیب $\angle ACB$ اور $\angle EGF$ کے ناصف ہیں

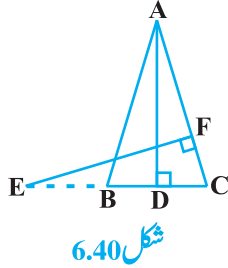
جب کہ D اور H بالترتیب ΔABC اور ΔFEG کے اضلاع

AB اور FE پر واقع ہیں اگر $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ دکھائیے کہ

$$\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG} \quad (i)$$

$$\Delta DCB \sim \Delta HGE \quad (ii)$$

$$\Delta DCA \sim \Delta HGF \quad (iii)$$



شکل 6.40

11- شکل 6.40 میں E مساوی الساقین مثلث ABC جس

میں $AB = AC$ کے بڑھتے ہوئے ضلع CB پر ایک

نقطہ E ہے اگر $AD \perp BC$ اور $AC \perp EF$ ثابت

کیجیے، کہ $\Delta ABD \sim \Delta ECF$

12- مثلث ABC کے اضلاع AB اور BC اور وسطانیہ

AD بالترتیب ABC کے اضلاع PQ، QR اور

وسطانیہ PM کے متناسب ہیں (شکل 6.41 دیکھیے)

دکھائیے کہ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

13- ABC کے ضلع BC پر D ایک نقطہ ہے جبکہ

$$CA^2 = CB \cdot CD \quad \angle ADC = \angle BAC$$

14- مثلث ABC کے اضلاع AB اور AC اور وسطانیہ AD بالترتیب DPQR کے اضلاع PQ اور PR اور وسطانیہ

PM کے متناسب میں ہیں۔ دکھائیے کہ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

15- 6 میٹر لمبے ایک انتصابی پول کی گراؤنڈ پر 4 میٹر لمبی پر چھائی بنتی ہے اسی لمحہ ایک ٹاور کی پر چھائی 28 میٹر لمبی بنتی ہے ٹاور

کی اونچائی معلوم کیجیے۔

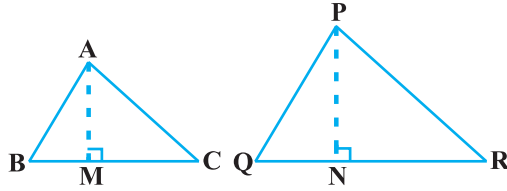
16- اگر AD اور PM بالترتیب مثلث ABC اور PQR کے وسطانیہ ہیں جہاں $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ثابت کیجیے کہ

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$$

6.5 مشابہ مثلثوں کا رقبہ

آپ سیکھ چکے ہیں کہ دو مشابہ مثلثوں میں ان کے نظیری اضلاع کی نسبت برابر ہوتی ہے۔ کیا آپ سوچتے ہیں کہ دو مشابہ

مثلثوں کے رقبوں اور اضلاع میں کوئی تعلق ہے؟ آپ جانتے ہیں کہ رقبہ کی پیمائش مربع اکائیوں میں ہوتی ہے۔ اس لئے آپ توقع کر سکتے ہیں کہ یہ نسبت ان کے نظیری اضلاع کے مربعوں کی نسبت ہوگی۔ درحقیقت یہ صحیح ہے۔ اور اس کو ہم مندرجہ ذیل مسئلے میں ثابت کریں گے۔



شکل 6.42

مسئلہ 6.6: دو مشابہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے نظیری اضلاع کے مربعوں کی نسبت کے برابر ہوتی ہے

ثبوت: ہمیں دو مثلث ABC اور PQR دیے ہوئے

ہیں جب کہ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (شکل 6.42 دیکھیے)

$$\frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2 \quad \text{ہم کو ثابت کرنا ہے کہ}$$

دونوں مثلثوں کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے ہم مثلثوں کے ارتفاعات AM اور PN بناتے ہیں۔

$$\text{ar}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} BC \times AM \quad \text{اب}$$

$$\text{ar}(\Delta PQR) = \frac{1}{2} QR \times PN \quad \text{اور}$$

$$(1) \quad \frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN} \quad \text{اس لئے}$$

اب ΔABM اور ΔPQN میں

$$(\Delta ABC \sim \Delta PQR \text{ کیونکہ}) \quad \angle B = \angle Q$$

$$(\text{ہر ایک } 90^\circ \text{ کا ہے}) \quad \angle M = \angle N \quad \text{اور}$$

$$(\text{مشابہت A.A شرط}) \quad \Delta ABM = \Delta PQN \quad \text{اس لئے}$$

$$(2) \quad \frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ} \quad \text{اس لئے}$$

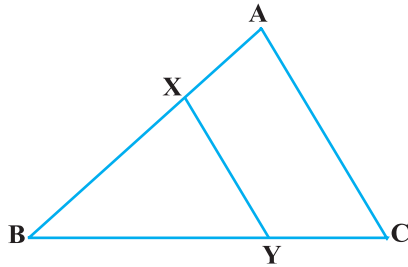
$$(\text{دیا ہوا ہے}) \quad \Delta ABC \sim \Delta PQR \quad \text{مزید}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \frac{AB}{PQ} &= \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} & \text{اس لیے} \\
 \frac{\text{ar}(ABC)}{\text{ar}(PQR)} &= \frac{AB}{PQ} \times \frac{AM}{PN} & \text{اس لیے} \\
 &= \frac{AB}{PQ} \times \frac{AB}{PQ} \\
 &= \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2
 \end{aligned}$$

اب (3) کو استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{ar}(ABC)}{\text{ar}(PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$

اس مسئلے کے استعمال کی وضاحت کے لیے آئیے کچھ مثالیں لیتے ہیں۔



شکل 6.43

مثال 9: شکل 6.43 میں قطع خط XY ، ΔABC کے ضلع

AC کے متوازی ہے۔ اور یہ مثلث کو مساوی رقبہ والے دو

حصوں میں منقسم کرتا ہے۔ نسبت $\frac{AX}{AB}$ معلوم کیجیے۔

(دیا ہوا ہے)

$$XY \parallel AC$$

حل: ہمارے پاس ہے

$$\angle BXY = \angle A \text{ اور } \angle BYX = \angle C \quad (\text{نظیری زاویہ})$$

اس لیے

(A.A مشابہت کی شرط)

$$\Delta ABC \sim \Delta XBY$$

اس لیے

$$\frac{\text{ar}(ABC)}{\text{ar}(XBY)} = \left(\frac{AB}{XB}\right)^2$$

اس لیے

(دیا ہوا ہے)

$$\text{ar}(ABC) = 2\text{ar}(XBY)$$

مزید

(2)

$$\frac{\text{ar}(ABC)}{\text{ar}(XBY)} = \frac{2}{1}$$

اس لیے

اس لیے (1) اور (2) سے

$$\frac{AB}{XB} = \frac{\sqrt{2}}{1} \text{ یعنی } \left(\frac{AB}{XB}\right)^2 = \frac{2}{1}$$

$$\frac{XB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{یا}$$

$$1 - \frac{XB}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{یا}$$

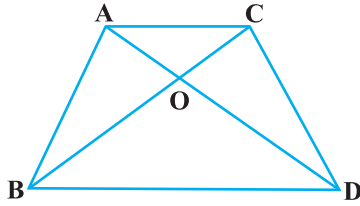
$$\frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \quad \text{یعنی} \quad \frac{AB - XB}{AB} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \quad \text{یا}$$

مشق 6.4

1- مان لیجیے $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ اور ان کے رقبہ بالترتیب 64 سینٹی میٹر مربع اور 121 سینٹی میٹر مربع ہیں اگر $EF = 15.4$ تو BC معلوم کیجیے۔

2- ایک منحرف ABCD جس میں $AB \parallel DC$ کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ

O پر قطع کرتے ہیں۔ اگر $AB = 2CD$ تو مثلث AOB اور COD کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔



شکل 6.44

3- شکل 6.44 میں ایک ہی قاعدہ BC پر بنے دو مثلث ABC اور DBC ہیں اگر نقطہ O پر قطع کرتا ہے تو دکھائیے

$$\frac{\text{ar} (ABC)}{\text{ar} (DBC)} = \frac{AO}{DO}$$

4- اگر دو مشابہ مثلثوں کے رقبہ برابر ہیں تو ثابت کیجیے کہ یہ متماثل ہوں گے۔

5- E, D اور F بالترتیب مثلث ABC کے اضلاع BC, AB اور CA کے وسطی نقطے ہیں ΔABC اور ΔDEF کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔

6- ثابت کیجیے کہ دو مشابہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے نظیر وسطانیوں کے مربعوں کی نسبت کے برابر ہے۔

7- ثابت کیجیے کہ کسی مربع کے ایک ضلع پر بنے مساوی ضلعی مثلث کا رقبہ اس کے وتر پر بنے مساوی ضلعی مثلث کے رقبہ کا نصف ہے۔

صحیح جواب پر صحیح کا نشان لگائیے اور جواز پیش کیجیے۔

8- ABC اور BDF دو مساوی ضلعی مثلث ہیں جب کہ D کا وسطی نقطہ ہے۔ مثلثوں ABC اور BDF کی نسبت ہے۔

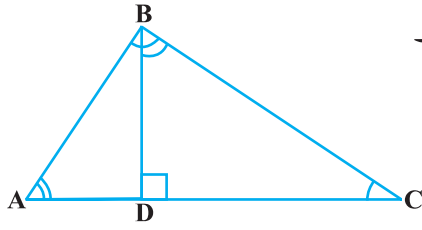
- (A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 4 : 1 (D) 1 : 4

9۔ دو مشابہ مثلثوں کے اضلاع 4 : 9 کی نسبت میں ہیں ان مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ہے۔

- (A) 2 : 3 (B) 4 : 9 (C) 81 : 16 (D) 16 : 81

6.6 فیثا غورث کا مسئلہ

آپ اپنی سابقہ کلاسوں میں فیثا غورث کے مسئلے سے اچھی طرح واقف ہو چکے ہیں۔ آپ نے اس مسئلے کی تصدیق کئی عملی کام کر کے اور اس کا استعمال بہت سے مسئلوں کو حل کرنے میں کیا۔



شکل 6.45

آپ نے اس مسئلہ کا ثبوت نویں کلاس میں بھی کیا۔

اب ہم مشابہ مثلثوں کے تصور کو استعمال کر کے اس کو ثابت کریں گے۔

اس طرح سے ثابت کرنے میں ہم ان دو مشابہ مثلثوں سے متعلق ایک

نتیجہ کا استعمال کریں گے۔ جو ہے ایک قائم مثلث قائم زاویہ والے

راس سے اس کے وتر پر عمود ڈالنے سے بنتے ہیں آئیے ایک قائم مثلث ABC لیتے ہیں جو B پر قائم ہے۔ مان لیجئے BD وتر AC پر عمود ہے۔ (شکل 6.45 دیکھئے)

آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ $\triangle ADB$ اور $\triangle ABC$ میں

$$\angle A = \angle A$$

اور $\angle ADB = \angle ABC$ (کیوں؟)

اس لئے $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ (کیسے؟) (1)

اسی طرح سے $\triangle BDC \sim \triangle ABC$ (کیسے؟) (2)

اس لئے (1) اور (2) سے یہ نتیجہ سامنے آتا ہے کہ عمود BD کے دونوں طرف بنے مثلث اصل مثلث ABC کے مشابہ ہیں

مزید، کیونکہ $\triangle ADB \sim \triangle ABC$

اور $\triangle BDC \sim \triangle ABC$

اس لئے $\triangle ADB \sim \triangle BDC$ (سیکشن 6.2 کے ریمارک سے)

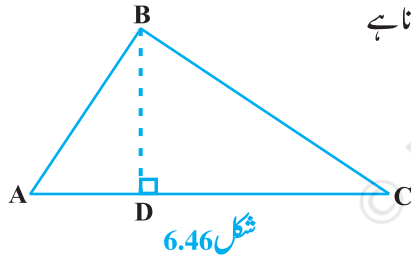
مذکورہ بالا بحث سے ہمیں مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔



فیثاغورث
(479-569 قبل مسیح)

مسئلہ 6.7: اگر کسی قائم زاوی مثلث کے قائم زاویہ والے راس سے ایک عمود اس کے وتر پر ڈالا جائے تو عمود کے دونوں طرف بنے مثلث اصل مثلث کے اور آپس میں مشابہ ہوں گے۔
آئیے اس مسئلے کو ہم فیثاغورث کے مسئلے کو ثابت کرنے میں استعمال کریں۔

مسئلہ 6.8: ایک قائم مثلث میں، وتر کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے۔



ثبوت: ہمیں ایک قائم ABC دیا ہوا ہے جو B پر قائم ہے ہمیں ثابت کرنا ہے

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

آئیے ایک $BD \perp AC$ (شکل 6.46 دیکھیے)

اب $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ (مسئلہ 6.7)

اس لئے $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ (اضلاع متناسب ہیں)

یا $AD \cdot AC = AB^2$ (1)

مزید $\triangle BDC \sim \triangle ABC$ (مسئلہ 6.7)

اس لئے $\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$

یا $CD \cdot AC = BC^2$ (2)

(1) اور (2) کو ملانے سے

$$AD \cdot AC + CD \cdot AC = AB^2 + BC^2$$

یا $AC (AD + CD) = AB^2 + BC^2$

یا $AC \cdot AC = AB^2 + BC^2$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

یا

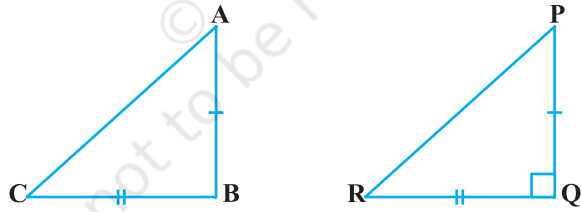
مذکورہ بالا مسئلے کو سب سے پہلے ایک قدیم ہندوستانی ریاضی داں بودھائن (تقریباً 800 ق۔م) نے مندرجہ ذیل شکل میں بیان کیا تھا۔

مستطیل کا وتر خود کے ساتھ وہی رقبہ دیتا ہے جو اس کے دونوں اضلاع (لمبائی اور چوڑائی) دیتے ہیں۔ اس وجہ سے کبھی کبھی یہ مسئلہ بودھائن کے مسئلہ کے نام سے بھی جانا جاتا ہے۔

فیثاغورث کے مسئلے کے معکوس کے بارے میں کیا خیال ہے؟ آپ سابقہ کلاسوں میں اس کی تصدیق کر چکے ہیں کہ یہ صحیح ہے۔ اب ہم اس کو ایک مسئلے کے طور پر ثابت کریں گے۔

مسئلہ 6.9: ایک مثلث میں اگر ایک ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے حاصل جمع کے برابر ہے تو پہلے ضلع کے سامنے والا زاویہ قائمہ ہوگا۔

ثبوت: یہاں ہمیں دیا ہوا ہے کہ ایک مثلث ABC میں $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ۔



شکل 6.47

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\angle B = 90^\circ$

سب سے پہلے ہم ایک قائم ΔPQR اس طرح بناتے ہیں کہ $QR = BC$ ، $PQ = AB$ اور $\angle Q = 90^\circ$ ۔
اب ΔPQR میں:

(فیثاغورث کا مسئلہ کیونکہ $\angle Q = 90^\circ$)

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

(1) (بناوٹ سے)

$$PR^2 = AB^2 + BC^2$$

(دیا ہوا ہے)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

لیکن

$$AC = PR$$

اس لئے

اب ΔABC اور ΔPQR میں

(بناوٹ سے)

$$AB = PQ$$

(بناوٹ سے)

$$BC = QR$$

(3 میں ثابت ہو چکا ہے)

$$AC = PR$$

(SSS مماثلت)

$$\Delta ABC \cong \Delta PQR$$

اس لئے

(CPCT)

$$\angle B = \angle Q$$

(بناوٹ سے)

$$\angle Q = 90^\circ$$

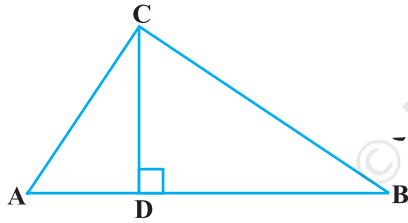
لیکن

$$\angle B = 90^\circ$$

اس لئے

نوٹ: اس مسئلہ کو دوسرے ثبوت کے لئے ضمیمہ 1 دیکھیے۔

آئیے اس مسئلے کو استعمال کی مزید وضاحت کے لئے کچھ مثالیں لیجیے۔

مثال 10: شکل 6.48 میں $\angle ACB = 90^\circ$ 

شکل 6.48

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD} \text{ اور } CD \perp AB \text{ ثابت کیجیے کہ}$$

$$\Delta ACD \sim \Delta ABC$$

حل:

(مسئلہ 6.7)

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

اس لئے

(1)

$$AC^2 = AB \cdot AD$$

یا

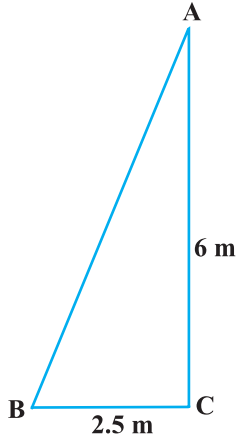
(مسئلہ 6.7)

$$\Delta BCD \sim \Delta ABC$$

اسی طرح سے

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$$

اس لئے



شکل 6.49

$$BC^2 = BA \cdot BD$$

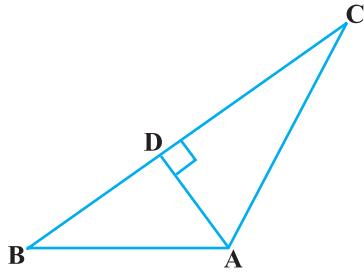
یا

اس لئے (1) اور (2) سے،

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BA \cdot BD}{AB \cdot AD} = \frac{BD}{AD}$$

مثال 11: ایک سیڑھی دیوار سے اس طرح لگی کھڑی ہے کہ اس کا پایہ دیوار سے 2.5 میٹر کے فاصلہ پر اور اس کا اوپری حصہ ایک 6 میٹر اونچی کھڑکی تک پہنچ رہا ہے۔ سیڑھی کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجئے AB سیڑھی کو طائر کرتا ہے اور CA دیوار کو جس میں A کھڑکی کو (شکل 6.49 دیکھیے)



شکل 6.50

مزید $CA = 6$ میٹر اور $BC = 2.5$ میٹر

فیثاغورث کے مسئلے کے مطابق ہمارے پاس ہے:

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

$$= (2.5)^2 + (6)^2$$

$$= 42.25$$

$$AB = 6.5 \quad \text{اس لئے}$$

اس طرح سے سیڑھی کی لمبائی 6.5 میٹر ہے۔

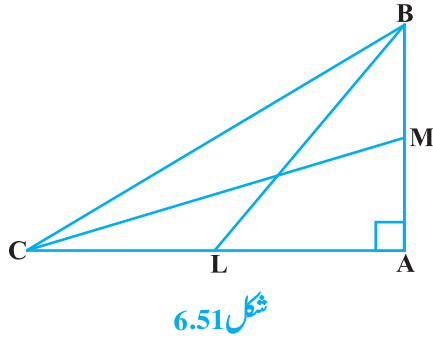
مثال 12: شکل 6.50 میں اگر $AD \perp BC$ ثابت کیجیے کہ

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

(فیثاغورث کا مسئلہ) (1)

حل: $\triangle ADB$ سے ہمارے پاس ہے

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$



شکل 6.51

(2) (فیثاغورث کا مسئلہ)

(1) کو (2) میں سے گھٹانے پر ہمارے پاس ہے۔

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$

$$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$$

یا

مثال 13: BL اور CM ایک قائم مثلث، جو A پر قائم ہے کے

وسطانے ہیں۔ ثابت کیجئے کہ $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$ حل: BL اور CM ΔABC کے وسطانے ہیں جس میں $\angle A = 90^\circ$ ۔ (شکل 6.51 دیکھیے)سے ΔABC

(1) (فیثاغورث کا مسئلہ)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BL^2 = AL^2 + AB^2$$

سے ΔABL

$$(BC, L) \text{ کا وسطی نقطہ ہے } BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$$

یا

$$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$$

یا

(2)

$$4BL^2 = AC^2 + 4AB^2$$

یا

میں ΔCMA

$$CM^2 = AC^2 + AM^2$$

$$(AB, M) \text{ کا وسطی نقطہ ہے } CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

یا

$$CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

یا

(3)

$$4CM^2 = 4AC^2 + AB^2$$

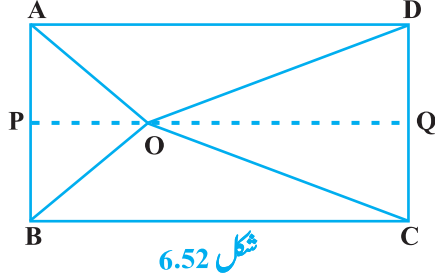
یا

(2) اور (3) کو جمع کرنے پر ہمارے پاس ہے

$$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$$

$$4 (BL^2 + CM^2) = 5 BC^2$$

یعنی



مثال 14: مستطیل ABCD کے اندر ایک نقطہ O ہے (شکل 6.52 دیکھیے)

$$OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$$

ثابت کیجئے کہ

حل: O سے گذرتا ہوا $PQ \parallel BC$ اس طرح کھینچیے کہ AB , DC , Q اور P پر واقع ہو

$$PQ \parallel BC$$

اب

$$PQ \perp AB \text{ اور } PQ \perp DC (\angle B = 90^\circ \text{ اور } \angle C = 90^\circ)$$

اس لئے

$$\angle CQP = 90^\circ \text{ اور } \angle BPQ = 90^\circ$$

اس لئے

اس لئے، BPQC اور APQD دونوں مستطیل ہیں

اب $\triangle OPB$ سے

$$(1) \quad OB^2 = BP^2 + OP^2$$

اسی طرح سے $\triangle OQD$ میں

$$(2) \quad OD^2 = OQ^2 + DQ^2$$

$\triangle OQC$ ہمارے پاس ہے

$$(3) \quad OC^2 = OQ^2 + CQ^2$$

اور $\triangle OAP$ سے ہمارے پاس ہے

$$(4) \quad OA^2 = AP^2 + OP^2$$

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر

$$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$$

$$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2$$

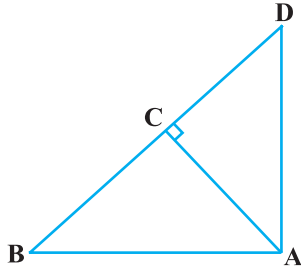
(کیونکہ $DQ = AP$ اور $BP = CQ$)

$$=CQ^2 + OQ^2 + OQ^2 + AP^2$$

$$[(3) \text{ اور } (4) \text{ سے}] \quad =OC^2 + OA^2$$

مشق 6.5

- 1- مثلثوں کے اضلاع مندرجہ ذیل میں دئے گئے ہیں۔ معلوم کیجیے کہ ان میں کون سے قائم مثلث ہیں۔ اگر مثلث قائم ہوں تو ان کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔



شکل 6.53

7cm, 24cm, 25cm (i)

3cm, 8cm, 6cm (ii)

50cm, 80cm, 100cm (iii)

13cm, 12cm, 5cm (iv)

- 2- PQR ایک مثلث ہے جو P پر قائم ہے اور QR, M پر ایک نقطہ ہے

جب کہ $PM \perp QR$ دکھائیے کہ $PM^2 = QM \cdot MR$

- 3- شکل 6.53 میں ABD ایک مثلث ہے جو A پر قائم ہے اور $AC \perp BD$ دکھائیے کہ

$$AB^2 = BC \cdot BD \text{ (i)}$$

$$AC^2 = BC \cdot DC \text{ (ii)}$$

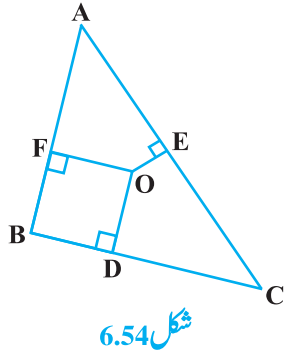
$$AD^2 = BD \cdot CD \text{ (iii)}$$

- 4- ABC ایک مساوی الساقین قائم مثلث ہے جو C پر قائم ہے ثابت کیجیے کہ $AB^2 = 2AC^2$

- 5- ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں $AC = BC$ ، اگر $AB^2 = 2AC^2$ تو ثابت کیجیے کہ ABC ایک قائم مثلث ہے۔

- 6- ABC ایک مساوی ضلعی مثلث ہے جن کا ہر ایک $2a$ ہے۔ اس کا ہر ایک ارتفاع معلوم کیجیے۔

- 7- ثابت کیجئے کہ معین کے اضلاع کے مربعوں کا حاصل جمع اس کے وتروں کے مربع کے حاصل جمع کے برابر ہے۔



شکل 6.54

8- شکل 6.54 میں O مثلث ABC کے اندرون میں ایک نقطہ ہے اور $OD \perp BC$ ،

$OE \perp AC$ اور $OF \perp AB$ دکھائیے کہ

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2 \quad (i)$$

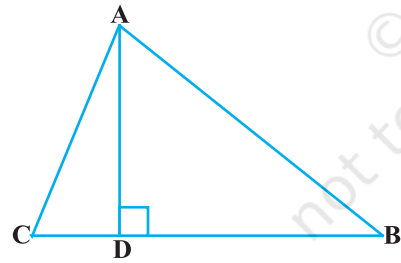
$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2 \quad (ii)$$

9- 10 میٹر لمبی ایک سیڑھی زمین سے 8 میٹر اونچائی پر موجود ایک کھڑکی تک پہنچتی ہے سیڑھی کے نچلے سرے کا دیوار کے قاعدہ سے فاصلہ معلوم کیجیے۔

10- ایک تار جس کی لمبائی 24 میٹر ہے 18 سینٹی میٹر اونچے ایک انتصابی پول سے

جڑا ہوا ہے اور اس کا دوسرا سر ایک کھونٹے سے منسلک ہے پول کے قاعدہ سے کھونٹے کو کتنی دوری تک لے جایا جائے کہ تار بالکل تن جائے۔

11- ایک ہوائی جہاز ایئر پورٹ سے اڑ کر 1000 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے شمال کی طرف پرواز کرتا ہے۔ اسی وقت ایک دوسرا جہاز ایئر پورٹ سے اڑ کر 1200 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے مغرب کی طرف جاتا ہے۔ $1\frac{1}{2}$ گھنٹے بعد دونوں ہوائی جہازوں کے درمیان کتنا فاصلہ ہے۔



شکل 6.55

12- دو پول جن کی لمبائیاں 6 میٹر اور 11 میٹر ہیں ایک مسطح گراؤنڈ پر کھڑے ہیں اگر ان کے نچلے سروں کے درمیان فاصلہ 12 میٹر کا ہے تو ان کے اوپری سروں کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

13- ABC کے اضلاع CA اور CB پر بالترتیب دو نقطے D اور E

ہیں۔ اگر مثلث C پر قائم ہے تو ثابت کیجیے کہ

$$AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$$

14- ΔABC کے ضلع BC پر A سے ڈالا گیا عمود BC کو D پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ $DB = 3CD$ (شکل 6.55 دیکھیے)

$$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$$

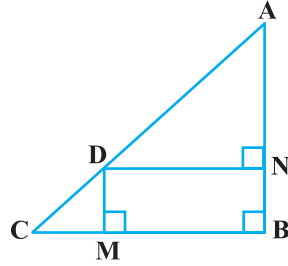
16- ایک مساوی ضلعی مثلث میں ثابت کیجیے کہ اس کے ایک ضلع کے مربع کا 3 گنا اس کے ایک ارتفاع کے مربع کے 4 گنا کے برابر ہے۔

17- صحیح جواب کو ٹک کیجیے اور اپنے جواب کا جواز پیش کیجیے ΔABC میں $AB = 6\sqrt{3}$ سینٹی میٹر، $AC = 12$ سینٹی میٹر اور $BC = 6$ سینٹی میٹر = زاویہ B ہے۔

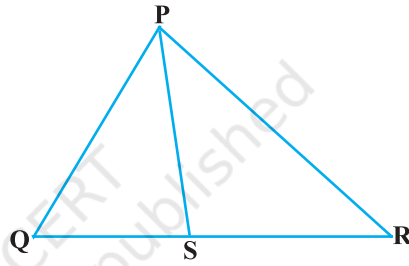
(A) 60° (B) 120° (C) 45° (D) 90°

مشق 6.6 (اختیاری) *

1- شکل 6.56 میں $\angle PQR$ ، PS کے زاویہ QRP کا ناصف ہے ثابت کیجیے کہ $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$



شکل 6.57



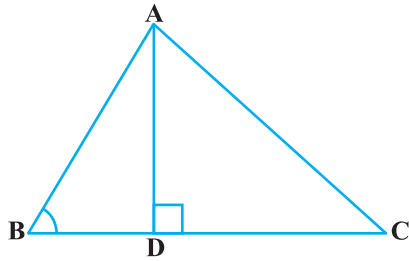
شکل 6.56

2- شکل 6.57 میں ΔABC کے وتر پر ایک نقطہ اس طرح ہے کہ $DM \perp BC$ اور $DN \perp AB$ ثابت کیجیے کہ

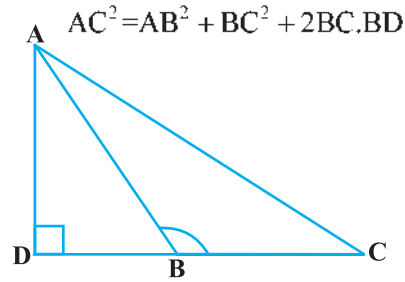
$$DN^2 = DM \cdot AN \quad (ii)$$

$$DM^2 = DN \cdot MC \quad (i)$$

3- شکل 6.58 میں، ΔABC ایک مثلث ہے جس میں $\angle ABC > 90^\circ$ اور $AD \perp CB$ (بڑھانے پر) ثابت کیجیے کہ

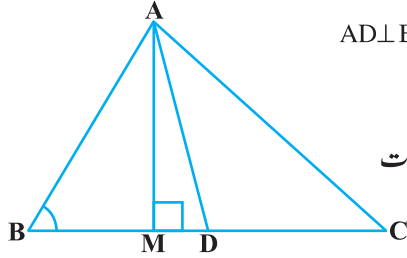


شکل 6.59



شکل 6.58

* یہ مشقیں امتحان کے نقطہ نظر سے نہیں ہیں۔



شکل 6.60

4- شکل 6.59 میں ABC ایک مثلث ہے جس میں $\angle ABC > 90^\circ$ اور $AD \perp BC$

ثابت کیجیے کہ $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD$

5- شکل 6.60 میں AD، مثلث ABC کا وسطانیہ ہے اور $AM \perp BC$ ثابت

کیجیے کہ

$$AC^2 = AD^2 + BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \quad (i)$$

$$AB^2 = AD^2 - BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \quad (ii)$$

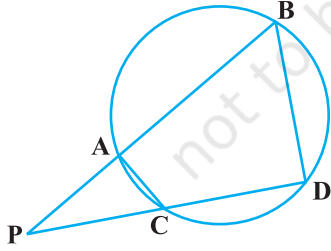
$$AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2 \quad (iii)$$

6- ثابت کیجیے کہ متوازی الاضلاع کے وتروں کے مربعوں کا حاصل جمع اس کے اضلاع کے مربعوں کے حاصل جمع کے برابر ہے۔

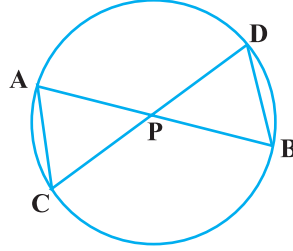
7- شکل 6.61 میں دائرہ کے دو وتر AB اور CD ایک دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کیجیے کہ

$$AP \cdot PB = CP \cdot DP \quad (ii)$$

$$\Delta APC \sim \Delta DPB \quad (i)$$



شکل 6.62



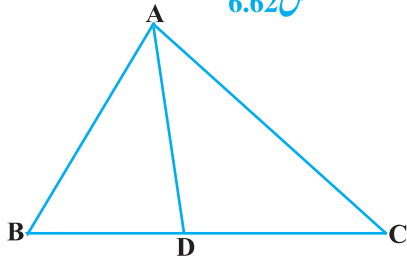
شکل 6.61

8- شکل 6.62 میں دائرے کے دو وتر AB اور CD ایک دوسرے کو

نقطہ P پر قطع کرتے ہیں (بڑھانے پر) دائرہ کے باہر ثابت کیجیے

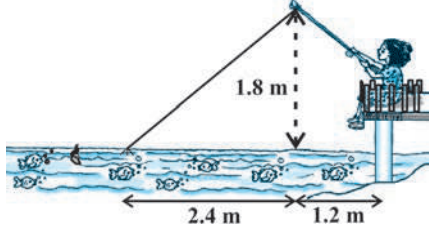
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad (ii) \quad \Delta PAC \sim \Delta PDB \quad (i)$$

9- شکل 6.63 میں D، ΔABC کے ضلع BC پر ایک نقطہ ہے جب



شکل 6.63

کہ $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ ثابت کیجیے کہ $\angle BAC = \angle ADC$ کا
ناصف ہے۔



شکل 6.64

10۔ ناظمہ پانی میں مچھلی کا شکار کر رہی ہے۔ اس کی مچھلی پکڑنے والی
چھڑی کا سراپانی کی سطح سے 1.8 میٹر اوپر ہے۔ اور کانٹے مچھلی
پکڑنے کی ڈور کے سرے پر پانی پر 3.6 میٹر کی دوری پر ہے
اور اس مچھلی پکڑنے والی چھڑی کی سرا کی ٹھیک نیچے سے 2.4

میٹر کے فاصلہ پر یہ مانتے ہوئے کہ روڈ (چھڑ کے ٹپ سے اوپر تک) پوری طرح تنی ہوئی ہے اس کے پاس کتنی ڈور ہے
(شکل 6.64 دیکھئے) اگر وہ ڈور کو 5 سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی شرح سے کھینچے تو 12 سیکنڈ بعد کانٹے کا اس سے افقی فاصلہ کتنا ہوگا۔

6.7 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں

- 1۔ دو اشکال جن کی شکل یکساں ہو لیکن ضروری نہیں سائز بھی ایک ہو تو وہ مشابہ اشکال کہلاتی ہیں۔
- 2۔ تمام متماثل اشکال مشابہ ہوتی ہیں لیکن اس کا معکوس درست نہیں ہے۔
- 3۔ دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد مساوی ہے مشابہ ہوں گے اگر (i) ان کے نظیری زاویہ برابر ہوں (2) ان کے نظیر اضلاع کی نسبت برابر ہو (یعنی متناسب ہو)
- 4۔ اگر مثلث کے ایک ضلع کے متوازی ایک قطر کھینچا جائے جو باقی دونوں اضلاع کو مختلف نقطوں پر قطع کرے تو تب دونوں اضلاع ایک ہی نسبت میں منقسم ہوتے ہیں۔
- 5۔ اگر کوئی خط مثلث کے دو اضلاع کو مساوی نسبت میں منقسم کرے تو وہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔
- 6۔ دو مثلثوں میں اگر نظیری زاویے مساوی ہوں تب ان کے نظیری اضلاع کی نسبت بھی برابر ہوگی اور اس طرح دونوں مثلث مشابہ ہوں گے (AAA مشابہت کی شرط)
- 7۔ دو مثلثوں میں اگر ایک مثلث کے دو زاویہ دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے برابر ہوں تب دو مثلث مشابہ ہوں گے (AAA مشابہت کی شرط)

- 8- اگر دو مثلثوں میں نظیری اضلاع کی نسبت برابر ہو تب ان کے نظیر زاویہ برابر ہوں گے اور اس طرح سے دونوں مثلث مشابہ ہوں گے۔ (SSS مشابہت کی شرط)
- 9- اگر ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے برابر ہو اور ان کے زاویوں کے حامل اضلاع بھی متناسب ہوں تو دونوں مثلث مشابہ ہوں گے۔ (SAS مشابہت کی شرط)
- 10- دو مشابہ مثلثوں کی رقبوں کی نسبت ان کے نظیری اضلاع کے مربعوں کی نسبت کے برابر ہوتی ہے۔
- 11- اگر ایک قائم زاوی مثلث کے قائم زاویہ سے ایک عمود وتر پر ڈالا جائے تب اس عمود کے دونوں طرف بنے مثلث اصل مثلث اور آپس میں مشابہ ہوں گے۔
- 12- ایک قائم مثلث میں وتر کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے حاصل جمع کے برابر ہے (فیثاغورث کا مسئلہ)
- 13- اگر ایک مثلث میں، ایک ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے حاصل جمع کے برابر ہو تو پہلے ضلع کے سامنے کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

قارئین کے لئے نوٹ

اگر دو قائم مثلثوں میں ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسرے مثلث کے وتر اور ضلع کے متناسب ہو تو دو مثلث مشابہ ہوں گے۔ اس کو ہم مشابہت کی RHS شرط کہتے ہیں۔ اگر آپ اس شرط کو باب 8 کی مثال 2 میں استعمال کریں تو ثبوت بہت آسان ہو جائے گا۔