



4915CH06

باب 6

خطوط اور زاویے (LINES AND ANGLES)

1.1 تعارف (Introduction)

باب 5 میں آپ نے پڑھا کہ کسی ایک خط کو بنانے کے لئے کم سے کم دون نقطے چاہیے اس اپ نے کچھ بدیحات بھی پڑھے اور ان بدیھیوں کی مدد سے آپ نے کچھ بیانات کو بھی ثابت کیا، اس باب میں آپ ان زاویوں کی خصوصیات کے بارے میں پڑھیں گے جو دو خطوط کے قطع کرنے پر بنتے ہیں۔ اس کے علاوہ ان زاویوں کی خصوصیات کے بارے میں بھی پڑھیں گے جو ایک خط دو یا دو سے زیادہ متوازی خطوط کو مختلف نقطوں پر قطع کر کے بناتا ہے، مزید ان خصوصیات کا استعمال کچھ بیانوں کو اختراجی منطق کے ثابت کرنے میں کریں گے (Appendix دیکھیے)۔ پھر کلاسوں میں آپ عملی کاموں کے ذریعہ ان بیانات کی تصدیق پہلے ہی کر جائیں۔

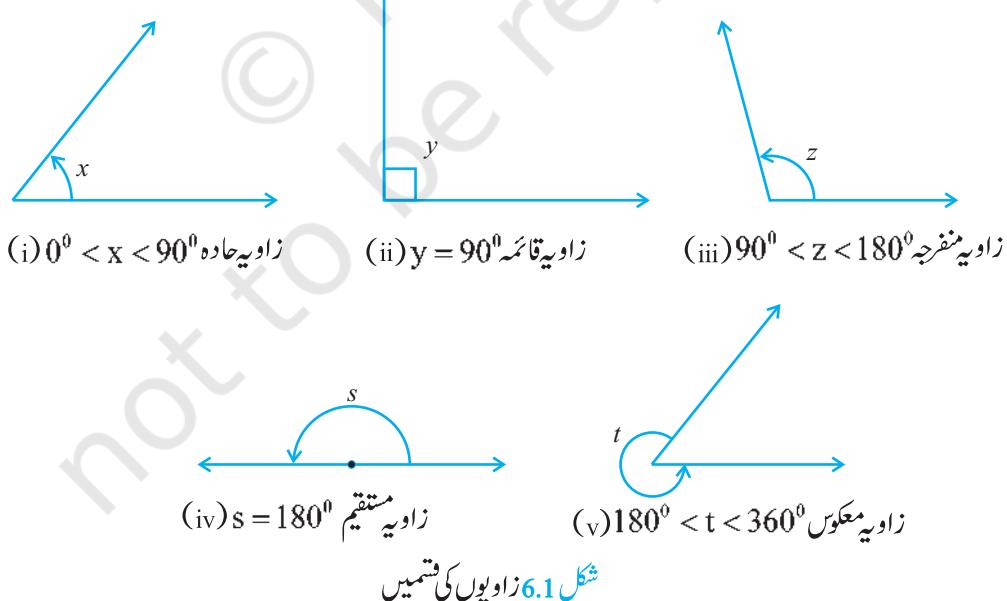
آپ اپنی روزمرہ کی زندگی میں مستوی سطحوں کے کناروں کے درمیان بننے والے مختلف قسم کے زاویوں کو دیکھتے ہیں، مستوی سطحوں کا استعمال کر کیساں قسم کے ماڈل بنانے کے لئے آپ کو زاویوں کا پورا علم ہونا ضروری ہے مثلاً کے طور پر اسکول کی نمائش میں رکھنے کے لئے بانس کی لکڑی کا استعمال کر آپ چھوپنپڑی کا ایک ماڈل بنانا چاہتے ہیں، تصور کیجیے آپ اس کو کیسے بنائیں گے؟ کچھ لکڑیاں آپ ایک دوسرے کے متوازی رکھیں گے اور کچھ ترقی چھی جب کوئی آر کینٹیکٹ ایک کیش منزلہ عمارت کا پلان تیار کرتی ہے تو اس کو قاطع خطوط اور متوازی خطوط مختلف زاویوں پر بنانے پڑتے ہیں کیا آپ سوچ سکتے ہیں کہ وہ ان خطوط اور زاویوں کی خصوصیات جانے بغیر عمارت کا صحیح نقشہ بناسکتا ہے۔

سائز میں آپ روشنی کی خصوصیات کا مطالعہ شائع کا ڈائیگرام بنایا کرتے ہیں مثلاً کے طور پر روشنی کے انعطاف کی خصوصیت مطالعہ اس وقت کرنے کے لئے جب روشنی ایک میڈیم سے دوسرے میڈیم میں داخل ہوتی ہے۔ آپ قاطع خطوط

اور متوالی خطوط کی خصوصیات کا استعمال کرتے ہیں۔ جب دو یا زیادہ قطعیں ایک جسم پر لگتی ہیں تو آپ ایک شکل بناتے ہیں جس میں قتوں کا جسم پر کلی اثر جانے کے لئے قتوں کو سمت والے قطاعات خطوط سے ظاہر کرتے ہیں جب شعاعیں (یا قطعات خط) ایک دوسرے کے متوالی ہوں یا ایک دوسرے کو قطع کریں تو اس وقت آپ کو زاویوں کے درمیان تعلق معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے ایک مینار کی اوپرائی معلوم کرنے کے لئے یا کسی لائٹ ہاؤس سے کسی پانی کے جہاز کا فاصلہ معلوم کرنے کے لئے بصیر کے خط اور افقی خط کے درمیان زاویہ معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ ایسی بہت سی مثالیں دی جاسکتی ہیں جہاں خطوط اور زاویوں کا استعمال ہوتا ہے۔ جیو میٹری کے الگ بابوں میں دوسری اور خصوصیات کا استخراج کرنے کے لئے خطوط اور زاویوں کی ان خصوصیات کا استعمال کریں گے۔
الگ بیشنس میں ہم پچھلی کلاسوں میں خطوط سے متعلق تعریفوں اور امکان کو دہرائیں گے۔

6.2 بنیادی ارکان اور تعریفیں (Basic Terms and Definitions)

یاد کیجیے کہ خط کا وہ حصہ جس کے سرے کے دونوں اطراف پر قطع خط کہلاتا ہے اور خط کا وہ حصہ جس کا صرف ایک سرے کا نقطہ ہوتا ہے شعاع (Ray) کہلاتا ہے۔ نوٹ کیجیے کہ قطع خط \overline{AB} کو ہم \overline{AB} سے ظاہر کرتے ہیں اور اس کی لمبائی کو AB سے شعاع AB کو AB سے اور خط AB کو \overline{AB} سے ظاہر کرتے ہیں لیکن ہم ان علامتوں کا استعمال نہیں کریں گے ہم قطع خط AB ، شعاع AB



AB اور خط AB کو ایک ہی علامت AB سے ظاہر کریں گے اس کے معنی سیاق سے واضح ہو جائیں گے۔ کبھی کبھی چھوٹے حروف m اور n وغیرہ سے بھی خطوط کو ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر تین یا زیادہ نقطے ایک ہی خط پر واقع ہوتے ہیں تو وہ ہم خط نقطہ کہلاتے ہیں نہیں تو غیرہم خط نقطے۔ یاد کیجیے کہ زاویہ جب بتاتے ہے جب دو شعاع ایک ہی سرے کے نقطے سے شروع ہوتی ہے وہ شعاعیں جو زاویہ بناتی ہیں زاویہ کے بازو کہلاتے ہیں اور سرے کا نقطہ زاویہ کا داس کہلاتا ہے۔ آپ نے مختلف قسم کے زاویوں میں زاویہ حادہ، زاویہ قائم، زاویہ منفرجه، زاویہ مستقیم اور زاویہ معمکوس (reflex) کے بارے میں بھی کلاسوس میں پڑھا ہوگا (شکل 6.1 دیکھئے)

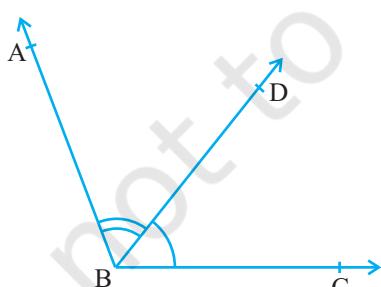
ایک زاویہ حادہ کی پیمائش O سے 90° کے درمیان ہوتی ہے جبکہ زاویہ قائم 90° کا ہوتا ہے، ایک زاویہ جو 90° سے زیادہ اور 180° سے کم ہوتا ہے زاویہ منفرجه کہلاتا ہے۔ مزید یاد کیجیے کہ زاویہ مستقیم 180° کا ہوتا ہے۔ ایک زاویہ جو 180° سے زیادہ اور 360° سے کم ہوتا ہے زاویہ معمکوس کہلاتا ہے۔ مزید دو زاویہ جن کا حاصل جمع 90° ہوتا ہے تینی زاویے کہلاتے ہیں اور وہ دو زاویہ جن کا حاصل جمع 180° ہوتا ہے تکمیلی زاویے کہلاتے ہیں۔

آپ متصل زاویوں کے بارے میں بھی بھی کلاسوس میں پڑھ چکے ہیں (شکل 6.2 دیکھئے) دو زاویہ متصل زاویہ کہلاتے ہیں اگر انکار اس ایک ہی ہوا اور ایک بازو مشترک ہو اور غیر مشترک بازو کی خلاف سمتیوں میں ہو۔ شکل 6.2 میں $\angle ABD$ اور $\angle DBC$ سے متصل زاویہ ہیں شعاع BD ان کا مشترک بازو ہے اور نقطہ B ان کا مشترک راس ہے شعاع BA اور BC غیر مشترک بازو میں مزید جب دو زاویہ متصل ہیں تو ان کا حاصل جمع غیر مشترک بازوں سے بننے والے زاویے کے برابر ہوتا ہے۔ اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں

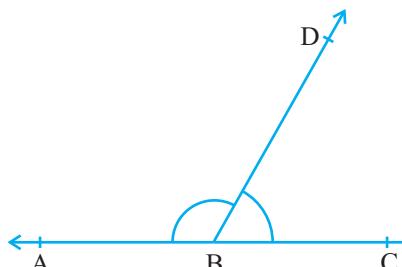
$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$$

نوٹ کیجیے کہ $\angle ABC$ اور $\angle ABD$ سے متصل نہیں ہیں کیوں؟ کیونکہ ان کے غیر مشترک بازو BD اور BC مشترک بازو BA کی ایک ہی طرف واقع ہیں۔

شکل 6.2 میں اگر غیر مشترک بازو ایک خط بناتے ہیں تو یہ شکل 6.3 کی طرح نظر آتے ہیں۔ اس حالت میں $\angle ABD$ اور $\angle DBC$ زاویوں کا خطی جوڑ اکھلاتا ہیں۔

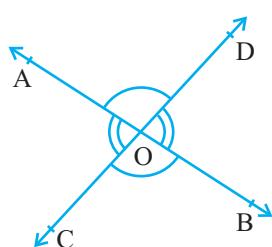


شکل 6.2 متصل زاویہ



شکل 6.3 زاویوں کا جوڑا

آپ یہ بھی دھرا سکتے ہیں کہ جب دو خطوط جیسے AB اور CD ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں تو اس طرح سے بنے زاویہ بالمقابل زاویہ کہلاتے ہیں، بالمقابل زاویوں کے دو جوڑے ہوتے ہیں ایک جوڑا $\angle AOD$ اور $\angle BOC$ ہے، کیا آپ دوسرا جوڑا بتاسکتے ہیں؟



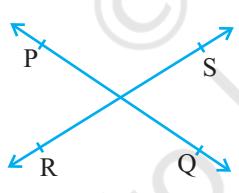
شکل 6.4 بالمقابل زاویہ

6.3 قاطع خطوط اور غیر قاطع خطوط

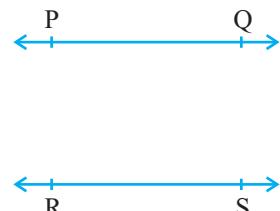
ایک پیپر پر دو مختلف خطوط PQ اور RS کھینچیے آپ دیکھیں گے کہ آپ ان کو دو طریقوں سے بناسکتے ہیں جیسا کہ شکل (i) 6.5 اور شکل (ii) میں دکھایا گیا ہے۔

خط کے اس نظریہ کو دھرائیے کہ اس کو دونوں سمتیں میں لامحدود طور پر بڑھایا جاسکتا ہے۔ شکل (i) 6.5 میں خطوط PQ اور RS

قطاع خطوط ہیں اور شکل (ii) 6.5 میں متوازی خطوط نوٹ کیجیے کہ ان متوازی خطوط کے مختلف تقاطوں پر مشترک عمودوں کی لمبائی کیساں ہے اس کیساں لمبائی کو متوازی خطوط کے درمیان کافاصلہ کہا جاتا ہے۔



(i) قاطع خطوط

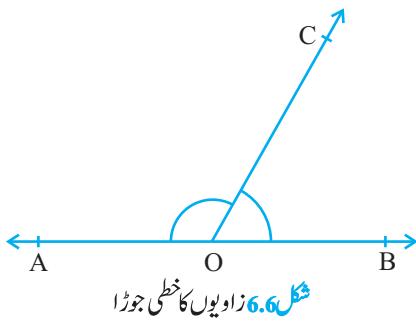


(ii) غیر قاطع (متوازی) خطوط

شکل 6.5 دو خطوط کو بنانے کے مختلف طریقے

6.4 زاویوں کے جوڑے (Pairs of Angles)

سیکھنے میں آپ نے زاویوں کے کچھ جوڑے جیسے تکمیلی زاویہ، تی زاویہ، متصل زاویہ خطي جوڑا اغیرہ کے بارے میں سیکھا کیا



آپ ان زاویوں کے درمیان کسی تعلق کے بارے میں سوچ سکتے ہیں؟ آئیے اب ہم ان زاویوں کے درمیان تعلق معلوم کرنے کی کوشش کریں جو جب بنتے ہیں جب کوئی شعاع کسی خط پر کھڑی ہوتی ہے۔ ایک شکل بنائیے جس میں ایک شعاع کسی خط پر کھڑی ہو جیسا کے شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے۔ خط کو AB اور شعاع کو OC نام دیجیے، نقطہ O پر بنے زاویہ کیا ہیں؟ یہ ہیں $\angle AOB$ اور $\angle COB$ اور $\angle AOC$ ۔ $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ کیا ہم لکھ سکتے ہیں جو

ہاں! (کیوں؟) سیکیشن 6.2 میں متصل زاویوں کے حوالہ سے $\angle AOB$ سے کی پیمائش کیا ہے؟ یہ 180° ہے (کیوں؟)

(1) اور (2) سے کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ ؟

ہاں (کیوں؟)

مذکورہ بالا بحث سے ہم مندرجہ ذیل بدیکھ بیان کر سکتے ہیں:

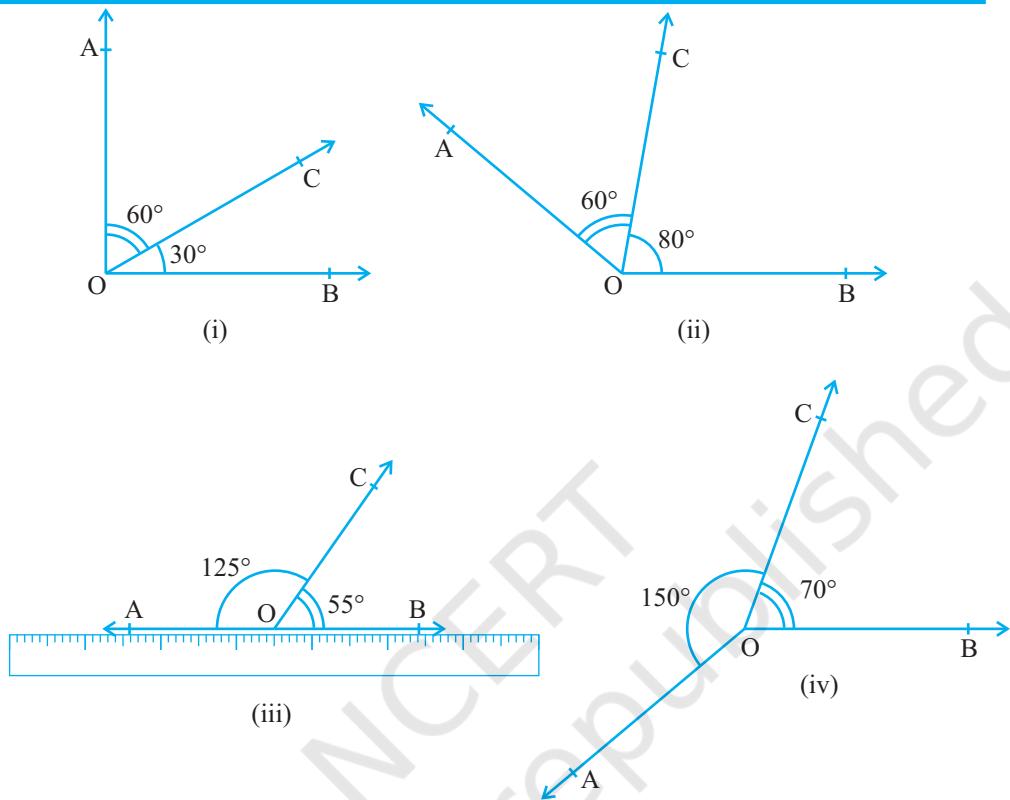
بدیکھ 6.1: اگر کوئی شعاع ایک خط پر کھڑی ہو تو اس طرح سے بنے متصل زاویوں کا حاصل جمع 180° ہے۔ یاد رکھیے کہ جب درمتصل زاویوں کا حاصل جمع 180° ہوتا ہے تب زاویوں کا خطی جوڑا اہلاتا ہے۔

بدیکھ 6.1 میں یہ دیا ہوا ہے کہ شعاع ایک خط پر کھڑی ہے اس دیے ہوئے سے ہم نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ اس طرح سے بنے دو متصل زاویوں کا حاصل جمع 180° ہے کیا ہم بدیکھ 6.1 کو دوسری طرح بھی لکھ سکتے ہیں؟ یعنی بدیکھ 6.1 کے نتیجہ کو دیا ہوا بجھے اور دیے ہوئے نتیجہ بجھے اس طرح سے ہم کو ملے گا۔

(A) اگر دو متصل زاویوں کا حاصل جمع 180° ہے تب شعاع ایک خط پر کھڑی ہوتی ہے یعنی غیر مشترک بازو ایک خط بناتے ہیں۔

اب آپ دیکھتے ہیں کہ بدیکھ 6.1 اور بیان A ایک دوسرے کے معکوس ہیں ہم ایک کو دوسرے کا معکوس کہتے ہیں ہم نہیں جانتے کہ بیان A درست ہے یا نہیں۔ آئیے جانچ کرتے ہیں مختلف پیاسوں کے متصل زاویہ بنائیے جیسا کے شکل 6.7 میں دکھایا گیا ہے، پھر ایک حالت میں غیر مشترک بازوں پر ایک فمار کھئے کیا دوسرانہ مشترک بازو بھی فٹے کے ساتھ ساتھ ہے؟ آپ پائیں گے صرف شکل (iii) 6.7 میں دونوں غیر مشترک بازو فٹے کے ساتھ ساتھ ہیں یعنی نقطے A اور B ایک ہی

111



شکل 6.7 مختلف پیمائشوں کے متصل زاویہ

خط پر ہیں اور شعاع OC اس پر کھڑی ہے۔ مزید کہے کہ $\angle AOC + \angle COB = 125^\circ + 55^\circ = 180^\circ$ ہے۔ اس سے آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ بیان A درست ہے۔ اس لئے آپ اس کو ایک بدیجہ کے طور پر مندرجہ ذیل طریقہ سے بیان کر سکتے ہیں۔

بدیجہ 6.2: اگر دو متصل زاویوں کا حاصل جمع 180° ہے تب زاویوں کے غیر مشترک بازو ایک خط بناتے ہیں۔

واضح وجوہات کی بنیاد پر مذکورہ بالا دو بدیجات ایک ساتھ خطی جوڑا بدمج یہ کہلاتا ہے۔

آئیے اب اس حالت کی جائیج کرتے ہیں جب دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

چھپلی کلاسوں سے دہرائیے کہ جب دو خط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو ان سے بننے والے متعارض زاویے مساوی ہوتے ہیں، آئیے اس نتیجہ کو ثابت کرتے ہیں ثبوت کے اجزاء کو جاننے کے لئے ضمیمہ دیکھئے اور مندرجہ ذیل ثبوت کو

پڑھتے وقت اس کو ذہن میں رکھئے۔

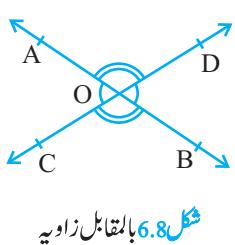
مسئلہ 6.4: اگر دو خط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو بالمقابل زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔

ثبت: مندرجہ بالا بیان میں یہ دیا ہوا ہے کہ دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

اس لئے مان لیجئے AB اور CD دو خطوط ہیں جو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں جیسا کہ شکل 6.8

میں دکھایا گیا ہے۔ ان سے ہمیں بالمقابل زاویوں کے دو جوڑے حاصل ہوتے ہیں جن

کے نام ہیں۔



شکل 6.8 بالمقابل زاویہ

$$\angle BOC \text{ اور } \angle AOD \quad \text{(ii)}$$

$$\angle AOD = \angle BOC = \angle BOD \text{ اور } \angle AOC = \angle BOD \quad \text{(i)}$$

اب شعاع OA خطيروں CD پر کھڑی ہے

$$\text{اس لئے } \angle AOC + \angle AOD = 180^\circ \quad \text{(خطی جوڑے کا بدیہیہ)}$$

$$\text{کیا ہم لکھ سکتے ہیں } \angle AOD + \angle BOD = 180^\circ \quad \text{ہاں! (کیوں؟)}$$

(1) اور (2) سے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

$$\text{اس کا مطلب ہے کہ } \angle AOC = \angle BOD \quad \text{(یہ حوالہ سیکشن 5.2 بدیہیہ 3)}$$

$$\angle AOD = \angle BOC \text{ کا جائز ہے کہ}$$

اسی طرح سے یہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ آئیے اب ہم خطی جوڑے کے بدیہیہ اور مسئلہ 6.1 پر مختص پچھے مثالیں حل کرتے ہیں۔

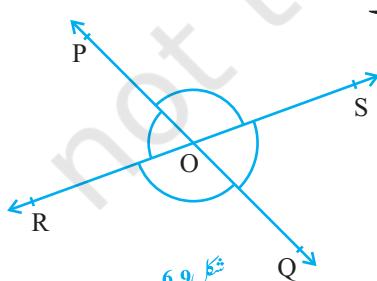
مثال 1: شکل 6.9 میں خطوط PQ اور RS ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع

کرتے ہیں اگر $\angle POR : \angle ROQ = 5:7$ تو تمام زاویہ معلوم کیجیے۔

حل: $\angle POR + \angle ROQ = 180^\circ \quad \text{(خطی جوڑا دیا ہوا ہے)}$

لیکن $\angle POR : \angle ROQ = 5:7$

$$\angle POR = \frac{5}{12} \times 180^\circ = 75^\circ \quad \text{اس لئے}$$



شکل 6.9

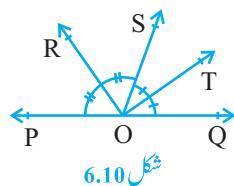
$$\text{اسی طرح سے } \angle POQ = \frac{7}{12} \times 180^\circ = 105^\circ$$

$$\angle POS = \angle ROQ = 105^\circ \quad \text{اب}$$

$$\text{اور } \angle SOQ = \angle POR = 75^\circ$$

مثال 2: شکل 6.10 میں شعاع OS خط POQ پر کھڑی ہے۔ شعاع OR اور شعاع OT با ترتیب $\angle POS$ اور $\angle SOQ$ کے زاویائی ناصف ہیں اگر $\angle POS = x$ ہے تو $\angle ROT$ ہے تو $\angle SOQ$ معلوم کیجیے۔

حل: شعاع OS خط POQ پر کھڑی ہے۔



$$\angle POS + \angle SOQ = 180^\circ \quad \text{اس لئے}$$

$$\angle POS = x \quad \text{لیکن}$$

$$x + \angle SOQ = 180^\circ \quad \text{اس لئے}$$

$$\angle SOQ = 180^\circ - x \quad \text{اب}$$

اب شعاع OR، $\angle POS$ کی تصفیل کرتی ہے۔

$$\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS \quad \text{اس لئے}$$

$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$

$$\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ \quad \text{اسی طرح سے}$$

$$= \frac{1}{2} \times (180^\circ - x)$$

$$= 90^\circ - \frac{x}{2}$$

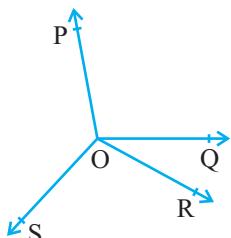
$$\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT \quad \text{اب،}$$

$$= \frac{x}{2} + 90^\circ - \frac{x}{2}$$

$$= 90^\circ$$

مثال 3: شکل 6.11 میں اور OS، OQ، OR اور OP چار شعاعیں ہیں ثابت کیجئے کہ

$$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$$



شکل 6.11

حل: شکل 6.11 میں آپ کو کسی ایک شعاع OS, OP, OQ, OR کو پیچھے کی طرف ایک نقطہ تک بڑھانے کی ضرورت ہے۔ اس لئے شعاع OQ کو نقطہ T تک اس طرح بڑھاتے ہیں کہ TOQ ایک خط ہو (شکل 6.12 دیکھئے) اب شعاع TOQ خط OP پر کھڑی ہے

$$\text{اس لئے } \angle TOP + \angle POQ = 180^\circ \quad (\text{خطی جوڑے کا بدیجہ})$$

اسی طرح سے شعاع TOQ خط OP پر کھڑی ہے۔

$$\angle TOS + \angle SOQ = 180^\circ \quad \text{اس لئے}$$

$$\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR \quad \text{لیکن}$$

اس لئے (2) بن جاتی ہے۔

$$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180^\circ$$

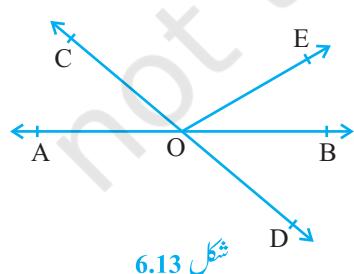
اب (1) اور (3) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^\circ$$

$$\angle TOP + \angle TOS + \angle POS \quad \text{لیکن}$$

اس لئے (4) بن جاتی ہے۔

$$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$$



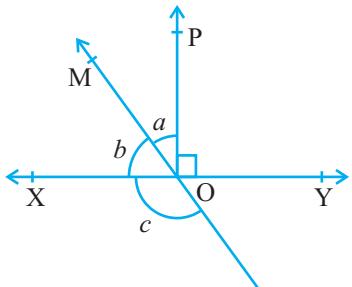
شکل 6.13

مشق 6.1

. شکل 6.13 میں خطوط AB اور CD نقطہ O پر قطع کرتے ہیں اگر $\angle BOD = 40^\circ$ اور $\angle AOC + \angle BOE = 70^\circ$ ہے تو $\angle COE$ اور معلوم $\angle BOE$ سے معلوم کیجیے۔

خطوط اور زاویے

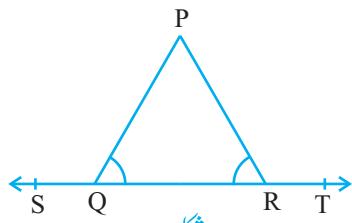
115



شکل 6.14

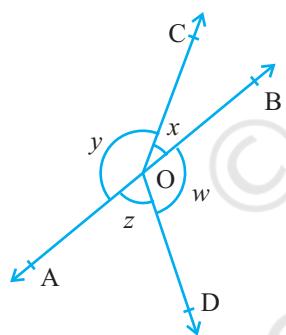
2. شکل 6.14 میں خطوط XY اور MN نقطہ O پر قطع کرتے ہیں
اگر $a : b = 2 : 3$ اور $\angle POY = 90^\circ$ تو معلوم

کیجیے۔



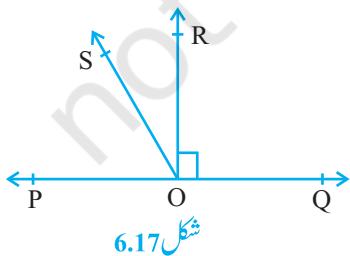
شکل 6.15

3. شکل 6.15 میں $\angle PQR = \angle PRQ$ تو ثابت کیجیے
 $\angle PQS = \angle PRT$ کر



شکل 6.16

4. شکل 6.16 میں اگر $x + y = w + z$ تو ثابت کیجیے کہ
ایک خط ہے AOB



شکل 6.17

5. شکل 6.17 میں POQ ایک خط ہے شعاع OR خط PQ پر عمود ہے اور OS ایک دوسری شعاع ہے جو شعاعوں OP اور OQ کے درمیان ہے ثابت کیجیے کہ

$$\angle POS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS)$$

6. یہ دیا گیا ہے کہ $\angle XYZ = 64^\circ$ اور X کو نقطہ P تک بڑھادی ہوئی اطلاعات سے ایک شکل بنائیے اگر شعاع ZYP , YQ , QYP سے کی تنصیف کرتی ہے تو $\angle XYQ$ اور معکوس زاویہ $\angle QYP$ معلوم کیجیے۔

6.5 متوازی خطوط اور قاطع

(Parallel Lines and a Transversal)

یاد کیجیے کہ ایک خط جو دو یا زیادہ خطوط کو مختلف نقطوں پر قطع کرتا ہے قاطع کہلاتا ہے۔ (شکل 6.18، دیکھیے) خط l خطوط m اور n کو بالترتیب دونوں نقطے P اور Q پر قطع کرتا ہے۔ اس لئے خط l , m اور n کے لئے قاطع ہے نقطے P اور Q پر بننے چار چار زاویوں کا مشاہدہ کیجیے۔

آئیے ان زاویوں کو $\angle 1, \angle 2, \dots, \angle 8$ نام دیجیے جیسا کہ شکل 6.18 میں دکھایا گیا ہے۔

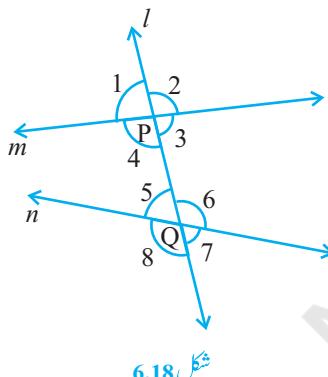
$\angle 1, \angle 2, \angle 7$ اور $\angle 8$ خارجی زاویہ کہلاتے ہیں جبکہ

$\angle 3, \angle 4, \angle 5$ اور $\angle 6$ داخلی زاویہ کہلاتے ہیں۔

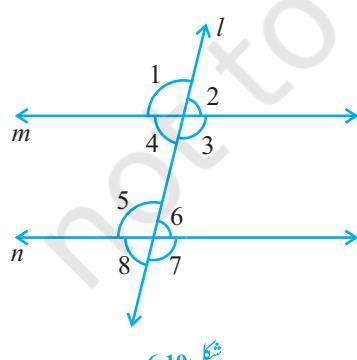
یاد کیجیے کہ چھلی کلاسوں میں آپ نے زاویوں کے کچھ جوڑوں، جو قاطع کے دو خطوط کو قطع کرنے سے بنتے ہیں، کے کچھ نام دیئے گئے، یہ مندرجہ ذیل میں

مظہری زاویہ:

- (i) $\angle 5$ اور $\angle 1$ (ii) $\angle 6$ اور $\angle 2$
- (iii) $\angle 8$ اور $\angle 4$ (iv) $\angle 7$ اور $\angle 3$



شکل 6.18



شکل 6.19

(b) متبادل داخلی زاویہ:

(i) $\angle 4$ اور $\angle 6$

(ii) $\angle 3$ اور $\angle 5$

(c) متبادل خارجی زاویہ:

(i) $\angle 1$ اور $\angle 7$

(ii) $\angle 2$ اور $\angle 8$

(d) قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویہ:

(i) $\angle 5$ اور $\angle 4$

(ii) $\angle 3$ اور $\angle 6$

قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں کو ہم مسلسل داخلی زاویہ بھی کہتے ہیں مزید زیادہ تر ہم صرف متبادل داخلی زاویوں کی جگہ ہم متبادل زاویہ استعمال کرتے ہیں آئیے۔

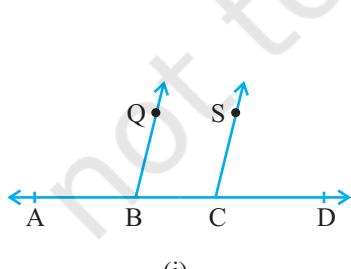
اب ہم زاویوں کے ان جوڑوں میں تعلق معلوم کرتے ہیں جب خط m خط 1 کے متوازی ہو آپ جانتے ہیں کہ آپ کی کاپی پر بننے والے ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں اس لئے فٹے اور پنسل کی مدد سے ان خطوط پر دو متوازی خطوط کھینچنے اور ان کو قطع کرتا ہو ایک قاطع جیسا کہ شکل 6.19 میں دکھایا گیا۔

اب نظری زاویوں کے کسی جوڑے کی پیمائش کیجیے اور ان کے درمیان تعلق معلوم کیجیے: آپ پائیں گے کہ $\angle 1 = \angle 5, \angle 2 = \angle 6, \angle 3 = \angle 7$ اور $\angle 4 = \angle 8$ ۔

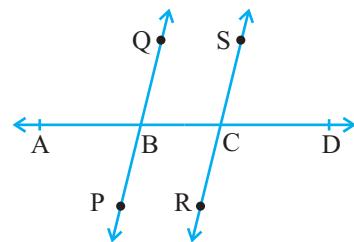
بدیہیہ 6.3: اگر کوئی قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے تو نظری زاویوں کا ہر جوڑ امساوی ہوتا ہے۔

بدیہیہ 6.3 کو ہم نظری زاویوں کا بدیہیہ بھی کہتے ہیں آئیے اب اس بدیہیہ کے مکمل کے بارے میں بحث کرتے ہیں جو مندرجہ ذیل ہے۔

اگر ایک قاطع دو خطوط کو اس طرح قطع کرے کہ نظری زاویوں کے جوڑے مساوی ہوں تو دونوں خطوط متوازی ہوتے ہیں۔



(i)



(ii)

شکل 6.20

کیا اس بیان میں کچھ صداقت ہے؟ اس کی ہم مندرجہ طریقہ سے تصدیق کر سکتے ہیں، ایک خط AD کھینچے اس پر دو نقطے B اور C اور $\angle ABC$ اور $\angle BCS$ پر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں جیسا کہ شکل (i) 6.20 میں دکھایا گیا ہے۔

AD کی دوسری طرف دو خطوط PQ اور RS بتانے کے لئے QB اور SC کو بڑھائیے [شکل (iii) 6.20] دیکھیے آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ دونوں خطوط ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے، آپ خطوط PQ اور RS کے مختلف نقطوں پر مشترک عمود بنانے اور ان کی پیمائش کیجیے آپ ان کو ہر جگہ یہاں پائیں گے اس لئے آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ خطوط متوازی ہیں اس طرح سے نظری زاویوں کے بدیہیہ کا مکوس بھی درست ہے۔ اس طرح ہمیں مندرجہ ذیل بدیہیہ بھی ملتا ہے۔

بدیہیہ 6.4: اگر ایک قاطع دو خطوط کو اس طرح قطع کرے کہ نظری زاویوں کے جوڑے مساوی ہوں تو دوسرے کے متوازی ہوں گے۔

کیا ہم نظری زاویوں کے بدیہیہ کا استعمال کس قاطع کے ذریعہ دو متوازی خطوط پر بننے متبادل داخلی زاویوں کے درمیان تعلق معلوم کرنے کے لئے کر سکتے ہیں؟ شکل 6.21 میں قاطع PS دو متوازی خطوط AB اور CD کو با ترتیب نقطے Q اور R پر قطع کرتا ہے۔

کیا $\angle BQR = \angle QRD$ اور $\angle AQR = \angle QRC$ ؟

آپ جانتے ہیں کہ $\angle PQA = \angle QRC$ (نظری زاویوں کا بدیہیہ) (1)

کیا $\angle PQA = \angle BQR$ ؟ ہاں! (کیوں؟) (2)

اس لئے (1) اور (2) سے آپ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ

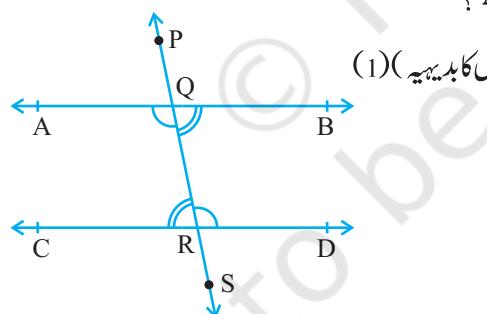
$$\angle BQR = \angle QRC$$

$$\angle AQR = \angle QRD$$

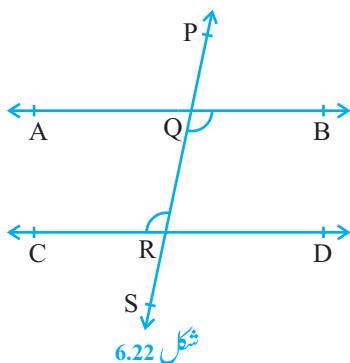
اس نتیجہ کے ایک مسئلہ کہ طور پر مندرجہ ذیل میں بیان کیا گیا ہے۔

مسئلہ 6.2: اگر کوئی قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرے تو متبادل داخلی زاویوں کا ہر ایک جوڑہ مساوی ہوتا ہے۔

کیا آپ نظری زاویوں کے بدیہیہ کا مکوس استعمال کریے ثابت کر سکتے ہیں کہ دو خطوط متوازی ہوتے ہیں اگر متبادل داخلی زاویہ مساوی ہوں؟ شکل 6.22 میں قاطع PS دو خطوط AB اور CD کو با ترتیب نقطے Q اور R پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ



شکل 6.21



$$\angle BQR = \angle QRC$$

? $AB \parallel CD$ کیا

$$\angle BQR = \angle PQA \quad (1) \text{ کیوں؟}$$

$$\angle BQR = \angle QRC \quad (2) \text{ دیا ہوا ہے}$$

اس لیے (1) اور (2) سے آپ نتیجہ کمال سکتے ہیں کہ

$$\angle PQA = \angle QRC$$

لیکن یہ نظری زاویہ ہے

اس لیے $AB \parallel CD$ (نظری زاویوں کے بدیہیہ کا معکوس)

اس نتیجہ کو ایک مسئلہ کے طور پر درج ذیل بیان کیا گیا ہے۔

مسئلہ 6.3: اگر کوئی قاطع دو خطوط کو اس طرح قطع کرے اور تبادل داخلی زاویوں کا جوڑ امساوی ہو تو خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

اسی طرح سے آپ قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں سے متعلق مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 6.4: اگر کوئی قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرے تو قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں کا ہر ایک جوڑ اتممیلی ہوتا ہے۔

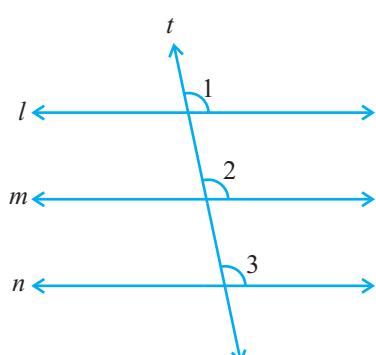
مسئلہ 6.5: اگر کوئی قاطع دو خطوط کو اس طرح قطع کرے کہ قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں کا جوڑ اتممیلی ہو تو دونوں خطوط متوازی ہوں گے۔

یاد کیجیے کہ اب مذکورہ بالاتمام بدایہوں اور مسئلہوں کی تصدیق آپ پچھلی کلاسوں میں عملی کاموں کے ذریعہ کر چکے ہیں: آپ ان کو بیہاں بھی دہرا سکتے ہیں۔

6.6 ایک ہی خط کے متوازی خطوط (Lines Parallel to the Same Line)

اگر کوئی دو خطوط ایک خط کے متوازی ہوں تو کیا وہ آپس میں بھی متوازی ہوں گے؟ آئیے اس کی جانچ کریں شکل 6.23 دیکھیے جس میں خط $m \parallel$ خط l اور خط $n \parallel$ خط l کے خطوط ML اور N کے لئے قاطع بنائیے، یہ دیا ہوا ہے کہ خط $m \parallel$ خط l اور خط $n \parallel$ خط l اس لئے $\angle i = \angle 2$ اور (نظری زاویوں کا بدیہیہ)

اس لئے $\angle 2 = \angle 3$ (کیوں؟)



شکل 6.23

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ لیکن $\angle 1 = \angle 2$ نظیری زاویہ ہیں

اور یہ برابر ہیں

اس لئے آپ کہہ سکتے ہیں کہ خط $n \parallel$ خط

(نظیری زاویوں کے بدیہیہ کا معمول)

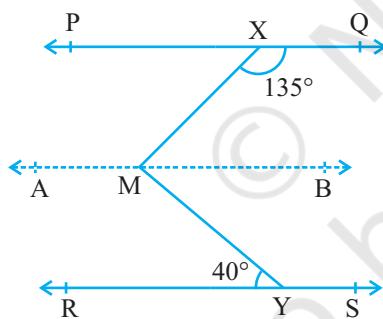
اس نتیجہ کو ہم ایک مسئلہ کی شکل میں درج ذیل بیان کرتے ہیں

مسئلہ 6.6: خطوط جو ایک ہی خط کے متوازی ہوتے ہیں آپس میں بھی متوازی ہوتے ہیں۔

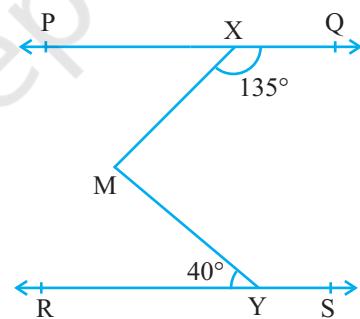
نوت: مندرجہ بالا خصوصیت کی توسعہ ہم دوسرے زیادہ خطوط کے لئے بھی کر سکتے ہیں۔ آئیے اب متوازی خطوط سے متعلق کچھ مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال 4: شکل 6.24 میں اگر $\angle XMY = 40^\circ$ اور $\angle MXQ = 135^\circ$ کیجیے۔

حل: یہاں ہمیں نقطہ M سے گذرتا ہوا اور خط PQ کے متوازی ایک خط AB کھینچنے کی ضرورت ہے جیسا کہ شکل 6.25 میں



شکل 6.24



شکل 6.25

$PQ \parallel RS$ اور $AB \parallel PQ$ دکھایا گیا ہے اب

اس لئے $AB \parallel RS$ (کیوں؟)

اب $AB \parallel PQ$ قاطع AB کے ایک ہی طرف کے داخل زاویہ ہیں)

لیکن $\angle QXM = 135^\circ$

$$135^\circ + \angle XMB = 180^\circ \quad \text{اس لئے}$$

$$\angle XMB = 45^\circ \quad \text{کیونکہ}$$

$$(\text{AB} \parallel \text{RS},) \quad \angle BMY = \angle MYR \quad \text{اب}$$

$$\angle BMY = 40^\circ \quad \text{اس لئے}$$

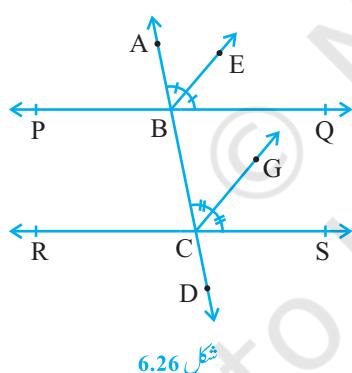
(1) اور (2) کو جمع کرنے پر حاصل ہوگا۔

$$\angle XMB + \angle BMY = 45^\circ + 40^\circ$$

$$\angle XMY = 85^\circ \quad \text{یعنی}$$

مثال 5: اگر کوئی قاطع دو خطوط کو اس طرح قطع کرے کہ نظیری زاویوں کے ایک جوڑے کے ناصف متوازی ہوں تو ثابت کیجیے کہ دو خطوط متوازی ہونگے۔

حل: شکل 6.26 میں قاطع AD و خطوط PQ اور RS کو با ترتیب و نقطوں B اور C پر قطع کرتا ہے۔ شعاع BE، CG اور RS پر قطع کرتا ہے۔



کا ناصف ہے اور شعاع CG کا ناصف ہے اور BE || CG

ہمیں ثابت کرتا ہے کہ PQ || RS

پیدا ہوا ہے کہ شعاع BE کا ناصف ہے

$$(1) \quad \angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ \quad \text{اس لئے}$$

اسی طرح سے شعاع CG کا ناصف ہے۔

$$(2) \quad \angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS \quad \text{اس لئے}$$

لیکن BE || CG اور AD ایک قاطع ہے۔

$$(3) \quad \angle ABE = \angle BCG \quad (\text{نظیری زاویوں کا بدیہی})$$

اس لئے (1) اور (2) کو (3) میں رکھنے پر ہمیں ملتا ہے۔

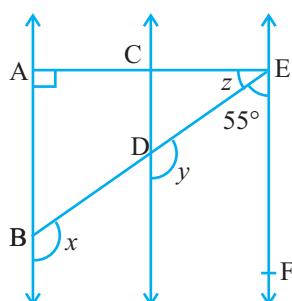
$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

$$\angle ABQ = \angle BCS \quad \text{یعنی}$$

لیکن یہ قاطع یعنی $AD \parallel PQ$ اور $RS \parallel PQ$ پر بنے نظیری زاویہ ہیں اور مساوی ہیں۔

اس لئے $PQ \parallel RS$ (نظیری زاویوں کے برابری کا مکمل)

مثال 6: شکل 6.27 میں $\angle BEF = 55^\circ$ اگر $EA \perp AB$ اور $CD \parallel EF$ اور $AB \parallel CD$ ہے تو x, y اور z کی قدر معلوم کیجیے۔



شکل 6.27

حل: $y + 55^\circ = 180^\circ$

$$y = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

اس طرح $AB \parallel CD$ (نظیری زاویوں کا برابری) $x = y = 125^\circ$

اب کیونکہ $AB \parallel EF$ اور $EF \parallel CD$ اس لئے $AB \parallel CD \parallel EF$

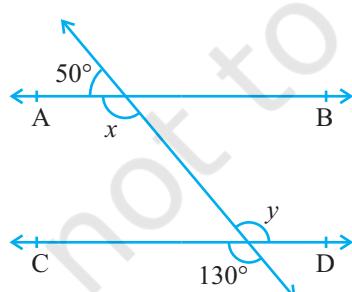
اس لئے $\angle EAB + \angle FEA = 180^\circ$ (قاطع EA کے ایک ہی طرف کے داخلي زوايا)

$$90^\circ + z + 55^\circ = 180^\circ$$

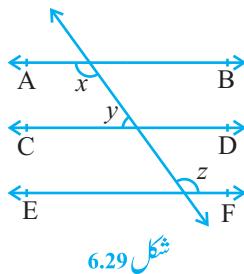
$$z = 35^\circ$$

مشتق 6.2

1. شکل 6.28 میں x اور y کی قدریں معلوم کیجیے اور پھر $AB \parallel CD \parallel EF$ کا دکھائیے۔

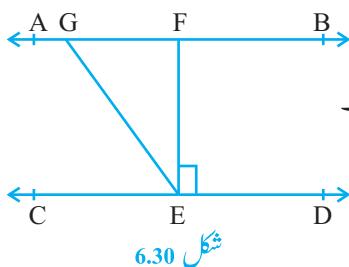


123



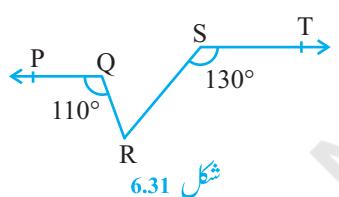
شکل 6.29

2. شکل 6.29 میں اگر $x:y:z = 3:7$ اور $AB \parallel CD, CD \parallel EF$ معلوم کیجیے۔



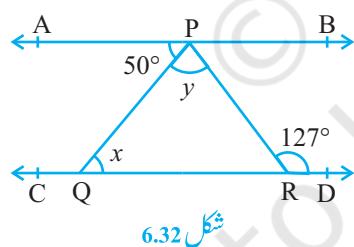
شکل 6.30

3. شکل 6.30 میں اگر $\angle GED = 126^\circ$, $AB \parallel CD$, $EF \perp CD$ معلوم کیجیے۔ اور $\angle AGE$ اور $\angle GEF$



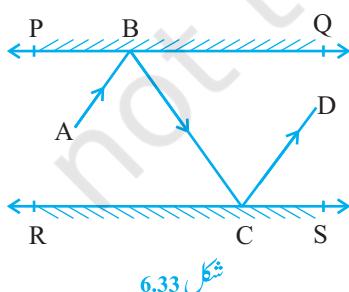
شکل 6.31

4. شکل 6.31 میں اگر $\angle RST = 130^\circ$, $PQ \parallel ST$, $\angle PQR = 110^\circ$ تو $\angle QRS$ معلوم کیجیے۔ [اشارہ: R سے گزرتا ہوا ایک خط ST کے متوازی کھینچے]



شکل 6.32

5. شکل 6.32 میں اگر $AB \parallel CD$, $\angle APQ = 50^\circ$ اور $\angle PRD = 127^\circ$ تو x اور y معلوم کیجیے۔

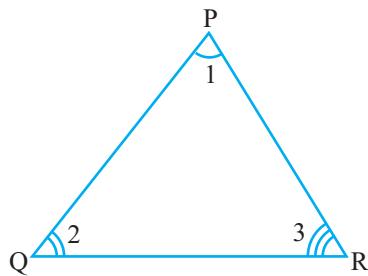


شکل 6.33

6. شکل 6.33 میں دو آئینہ PQ اور RS ایک دوسرے کے متوازی رکھے گئے ہیں ایک وقوع شعاع AB آئینہ PQ اور BC سے ٹکراتی ہے اور منعکس شعاع BC کے راستے پر چلتی ہے اور RS آئینہ سے C پر ٹکراتی ہے اور دوبارہ منعکس ہو کر واپس CD پر آ جاتی ہے ثابت کیجیے کہ $AB \parallel CD$

6.7 مثلث کے زاویوں کی جمعی خصوصیت (Angle Sum Property of a Triangle)

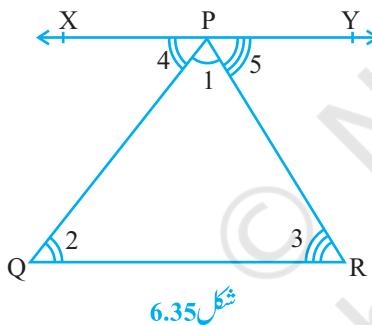
چچلی کلاسوں میں آپ نے عملی کاموں کے ذریعہ یہ پڑھا ہوگا کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا حاصل جمع 180° ہوتا ہے ہم اس بیان کو متوازی خطوط سے متعلق مسئلہ اور بدیہیوں کا استعمال کر سکتے ہیں۔



شکل 6.34

ثبوت: آئیے دیکھتے ہیں کہ اوپر بیان میں کیا دیا گیا ہے یعنی مفروضہ اور ہمیں کیا ثابت کرنا ہے ہمیں ایک مثلث ΔPQR دیا ہے۔ $\angle 1$ ، $\angle 2$ اور $\angle 3$ اور ΔPQR کے زاویہ ہیں [شکل 6.34 دیکھئے]

ہمیں ثابت کرنا ہے $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^{\circ}$ مخالف راس P سے گزرتا ہوا اور خط QR کے متوازی خط XY بتائیے جیسا کہ شکل 6.35 میں دکھایا گیا تاکہ ہم متوازی خطوط سے متعلق خصوصیات کا استعمال کر سکیں۔



شکل 6.35

اب XYP ایک خط ہے۔
اس لئے $\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180^{\circ}$
لیکن $PQ, PR \parallel QR$ اور XYP قاطع ہیں۔
اس لئے $\angle 4 + \angle 5 = \angle 2 + \angle 3$ اور $\angle 1 = \angle 3$ (متبدال زاویوں کے جوڑے)
 $\angle 4$ اور $\angle 5$ کو (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا

$$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180^{\circ}$$

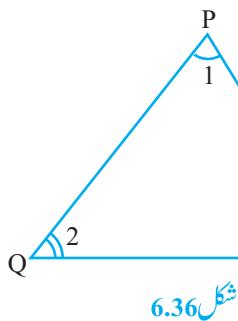
$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^{\circ} \quad \text{یعنی}$$

یاد کیجیے آپ نے پچھلی جماعتوں میں مثلث کے خارجی زاویہ کی بناؤٹ کے بارے میں پڑھا (شکل 6.36 دیکھئے)۔

ضلع QR کو نقطہ S تک بڑھایا گیا ہے سے مثلث ΔPRS کا خارجی زاویہ کہلاتا ہے۔

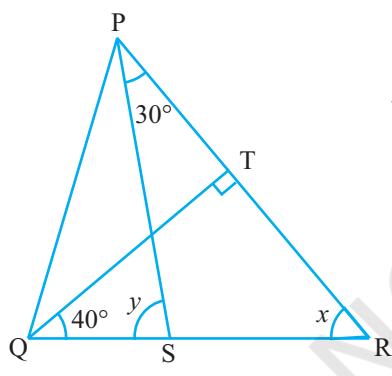
$$(1) \quad \text{کیا } \angle 4 + \angle 3 + \angle 1 = 180^{\circ} \quad (\text{کیوں؟})$$

$$(2) \quad \text{کیا } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^{\circ} \quad (\text{کیوں؟})$$



(1) اور (2) سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$
اس نتیجہ کو ہم مندرجہ ذیل مسئلہ کی شکل میں بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 6.8: اگر مثلث کے کسی ایک ضلع کو بڑھایا جائے تو اس طرح سے بنا خارجی زاویہ مختلف داخلی زاویوں کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے۔
اوپر دیئے گئے مسئلہ سے یہ بات بالکل واضح ہے کہ مثلث کا
خارجی زاویہ اس کے مختلف داخلی زاویوں میں ہر ایک سے بڑا ہوتا ہے۔
اوپر دیئے گئے مسئللوں سے اب ہم کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔



مثال 7: شکل 6.37 میں اگر $\angle TQR = 40^\circ$ اور $QT \perp PR$ تو $\angle SPR = 30^\circ$ اور y معلوم کیجیے۔

حل: ΔTQR میں $90^\circ + 40^\circ + x = 180^\circ$ (مثلث کے زاویوں کی جمعی خصوصیت)
اس لئے $x = 50^\circ$

اب $y = \angle SPR + x$ (مسئلہ 6.8)

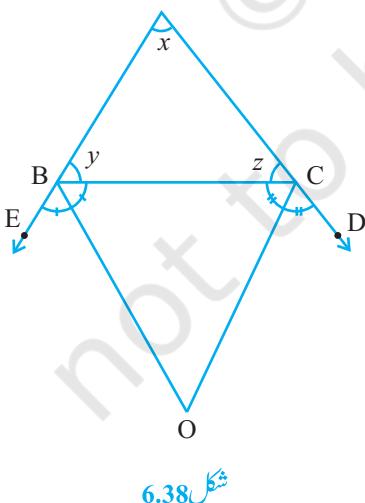
$$y = 30^\circ + 50^\circ = 80^\circ$$

مثال 8: شکل 6.38 میں ΔABC کے اضلاع AB اور AC کو بالترتیب نقطوں E و D تک بڑھایا گیا ہے اگر $\angle BCD$ اور $\angle CBE$ کے نصف O اور BO بالترتیب نقطے O پر ملتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$

حل: شعاع CO اور BO کا نصف ہے

$$\angle CBO = \frac{1}{2} \angle CBE$$

$$= \frac{1}{2} (180^\circ - y)$$



$$= 90^\circ - \frac{y}{2}$$

اسی طرح سے شعاع CO, CO, ∠BCD کا ناصف ہے

$$\angle BCO = \frac{1}{2} \angle BCD \quad \text{اس لئے}$$

$$= \frac{1}{2} (180^\circ - z)$$

$$= 90^\circ - \frac{z}{2}$$

$$\text{میں } \Delta BOC \quad \angle CBO + \angle BCO + \angle BOC = 180^\circ$$

(1) اور (2) کو (3) میں رکھنے پر ہم پاتے ہیں۔

$$(3) \quad \angle BOC + 90^\circ - \frac{z}{2} + 90^\circ - \frac{y}{2} = 180^\circ$$

$$\angle BOC = \frac{z}{2} + \frac{y}{2}$$

اس لئے

$$(4) \quad \angle BOC = \frac{1}{2}(y + z) \quad \text{یا}$$

$$\text{لیکن } (x + y + z) = 180^\circ \quad (\text{مثلث کے زاویوں کی جمی خصوصیت})$$

$$y + z = 180^\circ - x \quad \text{اس لئے}$$

اس لئے (4) بن جاتی ہے

$$\angle BOC = \frac{1}{2} (180^\circ - x)$$

$$= 90^\circ - \frac{x}{2}$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$$

مشتق 6.3

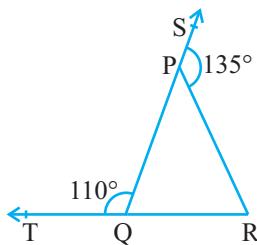
1. شکل 6.39 میں ΔPQR کے اضلاع QP اور RQ باترتیب نقطوں S اور T تک بڑھائے گئے ہیں اگر

معلوم کیجیے۔ $\angle PRQ \text{ اور } \angle PQT = 110^\circ$ اور $\angle SPR = 135^\circ$

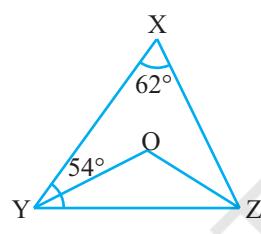
.2. شکل 6.40 میں $\angle XZY \text{ اور } \angle XYZ$ کے معلوم کیجیے اگر $\angle X = 62^\circ$, $\angle XYZ = 54^\circ$ اور $\angle YOZ$ باقی تیہ ہے۔

کے ناصف ہیں تو $\angle YOZ$ اور $\angle OZY$ معلوم کیجیے۔

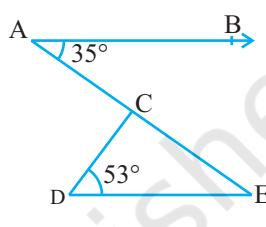
.3. شکل 6.41 میں اگر $\angle DCE \text{ اور } \angle CDE = 53^\circ$ اور $\angle BAC = 35^\circ$, $AB \parallel DE$ معلوم کیجیے۔



شکل 6.39



شکل 6.40

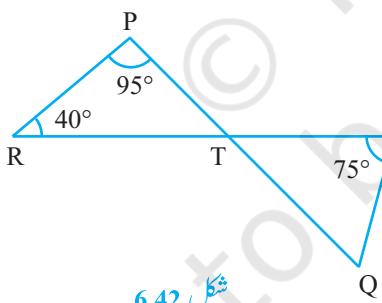


شکل 6.41

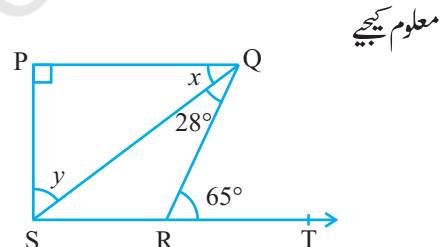
.4. شکل 6.42 میں اگر خطوط PQ اور RS نکھلے T پر قطع کرتے ہیں جبکہ $\angle PRT = 40^\circ$, $\angle RPT = 95^\circ$ اور $\angle PQT = 75^\circ$ معلوم کیجیے۔

معلوم کیجیے۔ $\angle SQT \text{ اور } \angle TSQ = 75^\circ$

.5. شکل 6.43 میں اگر $PQ \perp PS$, $PQ \perp SR$, $\angle SQR = 28^\circ$ اور $\angle QRT = 65^\circ$ تو x اور y کی قیمت معلوم کیجیے۔

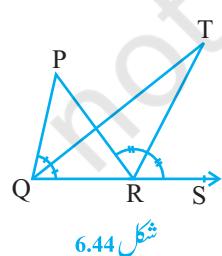


شکل 6.42



شکل 6.43

معلوم کیجیے



شکل 6.44

.6. شکل 6.44 میں ΔPQR کے ضلع QR کو نقطہ S تک بڑھایا گیا ہے،

اگر $\angle PRS$ اور $\angle PQR$ کے ناصف نقطہ T پر ملتے ہیں تو ثابت

$$\angle RPT = \frac{1}{2} \angle QPR$$

6.8 خلاصہ (Summary)

اس سبق میں آپ نے مندرجہ ذیل نقاط پر تھیں

1. اگر کوئی شعاع ایک خط پر کھڑی ہو تو اس سے بنے متصل زاویوں کا حاصل جمع 180° ہوتا ہے۔ اسی طرح سے اس کا معکوس بھی درست ہے اس خصوصیت کو خطی جوڑے کا بدیہیہ کہتے ہیں۔
2. جب دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب بالمقابل زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔
3. جب کوئی قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے تب
 - (i) نظیری زاویوں کا ہر ایک جوڑ امساوی ہوتا ہے۔
 - (ii) متبادل داخلی زاویوں کا ہر ایک جوڑ امساوی ہوتا ہے
 - (iii) قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں کا ہر ایک جوڑ انکھیلی ہوتا ہے
4. جب کوئی قاطع دو خطوط کو اس طرح قطع کرتے ہیں
 - (i) نظیری زاویوں کا کوئی ایک جوڑ امساوی ہو یا
 - (ii) متبادل داخلی زاویوں کا کوئی ایک جوڑ امساوی ہو یا
 - (iii) قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں کا کوئی ایک جوڑ انکھیلی ہو تو خطوط متوازی ہونگے۔
5. خطوط جو دیے ہوئے کسی خط کے متوازی ہوں تو وہ آپس میں بھی متوازی ہونگے۔
6. مثلث کے تینوں زاویوں کا حاصل جمع 180° ہوتا ہے
7. اگر مثلث کے کسی ضلع کو بڑھادیا جائے تو اس طرح سے بنا خارجی زاویہ مختلف داخلی زاویوں کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے۔