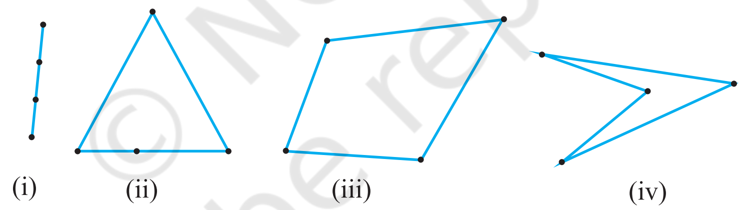
باب 8

چار ضلعی (QUADRILATERALS)

8.1 تعارف (Introduction)

آپ نے باب 6 اور 7 میں مثلث کی بہت سی خصوصیات کے بارے میں پڑھا۔ آپ جانتے ہیں کہ تین غیر ہم نقطوں کو جوڑوں میں ملانے سے جو شکل بنتی ہے وہ مثلث کہلاتی ہے آیئے اب چار نقطے مارک کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ ان کو کسی ترتیب میں جوڑوں میں ملانے سے کون سی شکل حاصل ہوتی ہے۔

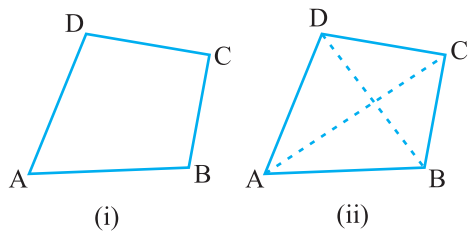


شکل 8.1

آپ نوٹ کرتے ہیں کہ اگر تمام نقطے ہم خط ہوں ایک ہی خط میں ہوں تو ہمیں ایک قطعہ خط ملتا ہے [شکل 8.1 (i) کو دیکھیے] اگر چار میں سے تین نقطے ہم خط ہوں تو ہمیں ایک مثلث حاصل ہوتا ہے [شکل 8.1 (ii) دیکھیے] اگر چار نقطوں میں سے کوئی بھی تین نقطے ہم خط نہیں ہوں تو ہمیں چار ضلعوں والی ایک بند شکل حاصل ہوتی ہے [شکل 8.1 (iii) اور (iv) دیکھیے۔]

ایسی شکل جو چاروں نقطوں کو ایک ترتیب سے ملانے پر حاصل ہوتی ہے چار ضلعی کہلاتی ہے اس کتاب میں ہم صرف شکل 8.1 (iii) میں دیئے گئے چار ضلعی کے بارے میں غور کریں گے۔شکل 8.1(iv) میں دئے گئے چار ضلعی کے بارے میں نہیں۔

ایک چار ضلعی میں چار (ضلع) چار زاویہ اور چار راس ہوتے ہیں [شکل 8.2 (i) دیکھتے]



شکل 8.2

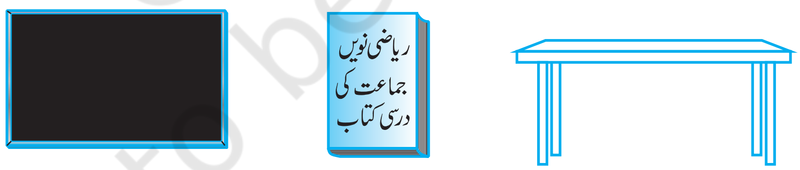
چار ضلعی ABCD میں AB، BC، CD اور DA چار اضلاع ہیں A، B، C اور D چار راس ہیں اور $\angle A, \angle B, \angle C$ اور $\angle D$ راسوں پر بنے چار زاویہ ہیں۔

اب مخالف راسوں A کو C سے اور B کو D سے ملایئے [شکل (ii) 8.2 دیکھیے]

AC اور BD چار ضلعی ABCD کے دو وتر ہیں۔

اس باب میں ہم مختلف قسم کے چار ضلعی خاص طور سے متوازی الاضلاع' کی خصوصیات کے بارے میں کچھ اور مطالعہ کریں گے۔

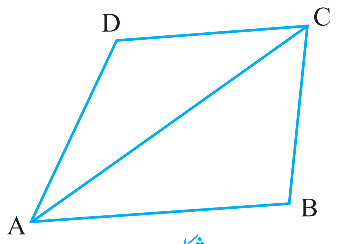
آپ کو حیرت ہوگی کہ ہم چار ضلعی (یا متوازی الاضلاع) کا مطالعہ کیوں کریں۔ اپنے چاروں طرف نظر ڈالئے آپ کو بہت سی ایسی چیزیں نظر آئیں گی جن کی شکل چار ضلعی ہے آپ کی کلاس کا فرش دیواریں' چھت' کھڑکیاں' بلیک بورڈ' ڈسٹر کا ہر رخ- آپ کی ریاضی کی کاپی کا ہر ایک صفحہ آپکی میز کی اوپری سطح وغیرہ۔ ان میں سے کچھ نیچے دیے ہوئے ہیں [شکل 8.3 دیکھیے]



شکل 8.3

حالاں کہ جتنی بھی چیزیں ہم اپنے اطراف میں دیکھتے ہیں۔ ان میں زیادہ تر ایک خاص قسم کا چار ضلعی ہے جو مستطیل کہلاتا ہے- ہم چار ضلعی خاص طور سے متوازی الاضلاع کے بارے میں کچھ اور مطالعہ کریں گے کیوں کہ مستطیل بھی ایک متوازی الاضلاع ہوتا ہے اور متوازی الاضلاع کی ساری خصوصیات مستطیل کے لیے درست ہوتی ہیں۔

8.2 چارضلعی کے زاویوں کی جمعی خصوصیت (Angle Sum Property of a Quadrilateral)



شکل 8.4

آیئے چارضلعی کے زاویوں کی جمعی خصوصیت کو دہراتے ہیں۔

ایک چارضلعی کے زاویوں کا حاصل جمع 360^0 ہوتا ہے۔اس کی تصدیق ہم ایک وتر بنا کر سکتے ہیں جو چارضلعی کو دو مثلثوں میں منقسم کرتا ہے۔

مان لیجیے ABCD ایک چارضلعی ہے اور AC اس کا وتر [شکل 8.4 دیکھیے] ΔADC کے زاویوں کا حاصل جمع کیا ہے؟ آپ جانتے ہیں کہ

$$\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 180^0$$

اسی طرح سے ΔABC میں $\angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180^0$

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180^0 + 180^0 = 360^0$$

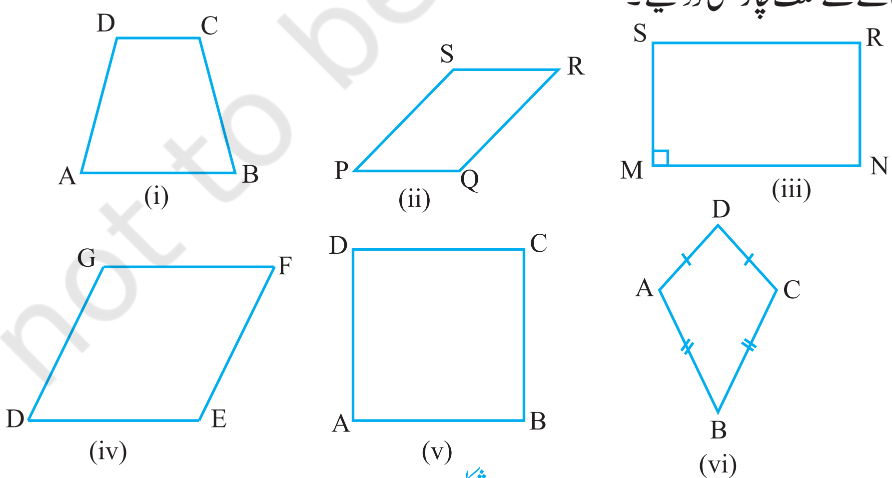
اور $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$ اور $\angle DAC + \angle CAB = \angle A$

اس لیے $\angle A + \angle D + \angle B + \angle C = 360^0$

یعنی چارضلعی کے چاروں زاویوں کا حاصل جمع 360^0 ہے

8.3 چارضلعی کی قسمیں (Types of a Quadrilaterals)

نیچے بنائے گئے مختلف چارضلعی کو دیکھیے۔



شکل 8.5

مشاہدہ کیجیے کہ

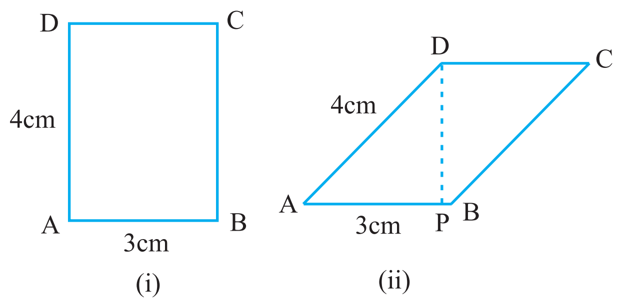
- شکل 8.5(i) میں چار ضلعی ABCD کے مقابل اضلاع کا ایک جوڑ بہ نام AB اور CD متوازی ہیں آپ جانتے ہیں کہ یہ منحرف کہلاتا ہے۔
- شکل (v) اور (iv),(iii),(ii) 8.5 میں دیئے گئے چار ضلعی کے مقابل اضلاع کے دونوں جوڑے متوازی ہیں۔ یاد کیجیے کہ ایسے چار ضلعی متوازی الاضلاع کہلاتے ہیں–اس لیے شکل (ii) 8.5 کا چار ضلعی PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے - اسی طرح شکل (iv) ,(ii) 8.5 اور (v) کے سبھی چار ضلعی متوازی الاضلاع کہلاتے ہیں۔
- شکل 8.5(iii) کے متوازی الاضلاع MNRS میں نوٹ کیجیے کہ اس کا ہر ایک زاویہ یعنی $\angle M$ زاویہ قائمہ ہے۔اس خاص متوازی الاضلاع کو کیا کہتے ہیں–یاد کرنے کی کوشش کیجیے یہ مستطیل کہلاتا ہے۔
- شکل 8.5 (iv) کے متوازی الاضلاع DEFG کے تمام اضلاع مساوی ہیں ہم جانتے ہیں کہ یہ معین کہلاتا ہے۔
- شکل 8.5 (v) کے متوازی الاضلاع ABCD میں $\angle A = 90^0$ ہے اور تمام اضلاع مساوی ہیں؛ یہ مربع کہلاتا ہے۔
- شکل 8.5(vi) کے چار ضلعی ABCD میں AD=CD اور AB=CB یعنی متصل اضلاع کے دونوں جوڑے مساوی ہیں یہ متوازی الاضلاع نہیں ہیں–یہ ایک پتنگ کہلاتی ہے۔

نوٹ کیجیے کہ مربع، مستطیل اور معین تمام متوازی الاضلاع ہیں۔

- مربع ایک معین اور مستطیل بھی ہوتا ہے۔
- متوازی الاضلاع ایک منحرف بھی ہوتا ہے۔
- ایک پتنگ ایک متوازی الاضلاع نہیں ہوتی ہے۔
- ایک منحرف متوازی الاضلاع نہیں ہوتا (کیوں کہ منحرف کے مقابل اضلاع کا صرف ایک جوڑا متوازی ہوتا ہے جبکہ متوازی الاضلاع کے دونوں جوڑے متوازی ہوتے ہیں)۔
- ایک مستطیل اور معین مربع نہیں ہے۔

شکل 8.6 کو دیکھیے–ہمارے پاس ایک ہی احاطہ 14cm کے ایک مستطیل اور ایک متوازی الاضلاع ہے۔

یہاں متوازی الاضلاع کا رقبہ $DP \times AB$ ہے اور یہ مستطیل کے رقبہ یعنی $AB \times AD$ ہے کم ہے کیوں کہ $DP < AD$

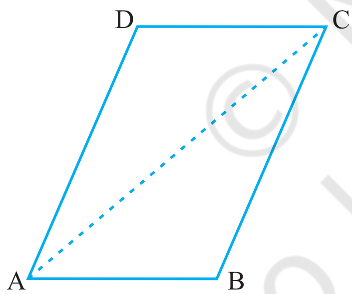


شکل 8.6

عام طور پر مٹھائی بیچنے والے دکاندار برفی کو متوازی الاضلاع کی شکل میں کاٹتے ہیں تاکہ زیادہ سے زیادہ برفی ٹرے میں رکھی جاسکیں۔(اگلی مرتبہ برفی کھانے سے پہلے اس کی شکل پر غور کیجیے)

آیئے پچھلی کلاسوں میں پڑھی گئی متوازی الاضلاع کی کچھ خصوصیات کو دہراتے ہیں۔

8.4 متوازی الاضلاع کی خصوصیات (Properties of a Parallelogram)



شکل 8.7

آیئے ایک سرگرمی کرتے ہیں

ایک کاغذ کی ایک شیٹ سے وتر پر سے متوازی الاضلاع کو کاٹئے (شکل 8.7 دیکھیے) آپ کو دو مثلث حاصل ہوتے ہیں؟ آپ ان مثلثوں کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

ایک مثلث کو دوسرے پر رکھئے، اگر ضرورت ہو تو اس کو پلٹ کر رکھیے۔

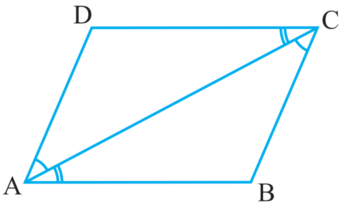
آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔ مشاہدہ کیجیے کہ دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔ اس مشغلہ کو کچھ اور متوازی الاضلاع کے لیے دہرایئے ہر مرتبہ آپ پائیں گے کہ متوازی الاضلاع کا وتر اس کو دو متماثل مثلثوں میں منقسم کرتا ہے۔

آیئے اس نتیجہ کو ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ 8.1: متوازی الاضلاع کا وتر اس کو دو متماثل مثلثوں میں منقسم کرتا ہے۔

ثبوت: مان لیجیے A B CD ایک متوازی الاضلاع ہے اور AC اس کا وتر [شکل 8.8 دیکھیے] مشاہدہ کیجیے کہ وتر AC متوازی الاضلاع کو دو مثلثوں میں منقسم کرتا ہے یعنی ΔABC اور ΔCDA ہمیں ان مثلثوں کو متماثل ثابت کرنے کی ضرورت ہے۔

ΔABC اور ΔCDA میں نوٹ کیجیے کہ $BC \parallel AD$ اور AC ایک قاطع ہے



شکل 8.8

اس لیے $\angle BCA = \angle DCA$ (متبادل داخلی زاویوں کے جوڑے)

اور $AB \parallel DC$ اور AC ایک قاطع ہے

اس لیے $\angle BAC = \angle DCA$ (متبادل داخلی زاویوں کے جوڑے)

اور $AC = CA$ (مشترک)

اس لیے $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ASA اصول)

یا وتر AC متوازی الاضلاع ABCD کو دو متماثل مثلث ABC اور CDA میں منقسم کرتا ہے۔ اب متوازی الاضلاع کے مخالف اضلاع کی پیمائش کیجیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ پاتے ہیں کہ AB=DC اور AD = BC ، یہ متوازی الاضلاع کی دوسری خصوصیت ہیں جو نیچے بیان کی گئی ہے۔

مسئلہ 8.2 متوازی الاضلاع میں مقابل اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔

آپ پہلے ثابت کر چکے ہیں کہ وتر متوازی الاضلاع کو دو متماثل مثلثوں میں منقسم کرتے ہیں تو ان کے نظیری حصوں کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟ وہ برابر ہیں۔

اس لیے AB=DC اور AD=BC

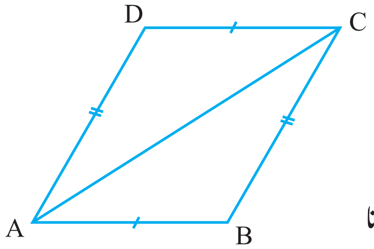
اس نتیجہ کا معکوس کیا ہے؟ آپ: پہلے ہی جانتے ہیں کہ کسی مسئلہ میں جو دیا ہوا ہوتا ہے اسی کو اس کے معکوس میں ثابت کیا جاتا ہے اور جو مسئلہ میں ثابت کیا جاتا ہے وہ اس کے معکوس میں دیا ہوا ہوتا ہے۔ اس طرح سے مسئلہ 8.2 کو ہم مندرجہ ذیل میں بیان کرتے ہیں

اگر ایک چار ضلعی ایک متوازی الاضلاع ہے تب اس کے مقابل اضلاع کا ہر جوڑا مساوی ہوتا ہے اس لیے اس کا معکوس ہے۔

مسئلہ 8.3: اگر کسی چار ضلعی کے مقابل اضلاع کا ہر جوڑا مساوی ہو تو یہ ایک متوازی الاضلاع ہے۔

کیا آپ وجہ بتا سکتے ہیں کیوں؟

مان لیجیے چار ضلعی ABCD کے اضلاع AB اور CD مساوی ہیں اور AD=BC [شکل 8.9 دیکھیے] وتر AC بنائیے



شکل 8.9

ظاہر ہے $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (کیوں؟)

اس لیے $\angle BAC = \angle DCA$

اور $\angle BCA = \angle DAC$ (کیوں؟)

آپ ابھی دیکھ چکے ہیں کہ متوازی الاضلاع کا ہرمقابل جوڑا مساوی ہوتا ہے۔اس کے برعکس اگرکسی چارضلعی کا ہرایک مخالف جوڑا مساوی ہوتو چارضلعی متوازی الاضلاع ہوتا ہے کیا ہم مخالف زاویوں کے لیے بھی یہی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

ایک متوازی الاضلاع بنایئےاوراس کے زاویوں کی پیمائش کیجیے۔آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

مخالف زاویوں کا ہرایک جوڑا مساوی ہے۔

اس سرگرمی کو کچھ اور متوازی الاضلاع کے لیے دہرایئے۔ہم ایک اور نتیجہ کی طرف پہنچتے ہیں جو مندرجہ ذیل ہے:

مسئلہ 8.4:ایک متوازی الاضلاع میں مقابل زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔

کیا اس مسئلہ کا معکوس بھی درست ہے؟ چارضلعی کے زاویوں کی جمعی خصوصیت اور کسی قاطع کے ذریعے متوازی خطوط کو قطع کرنے پر حاصل نتائج کا استعمال کرکے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کا معکوس بھی درست ہے۔اس لیے ہمیں مندرجہ ذیل مسئلہ ملتا ہے۔

مسئلہ 8.5:اگر ایک چارضلعی میں مخالف زاویوں کا ہرایک جوڑا مساوی ہوتو یہ متوازی الاضلاع ہوگا۔یہ متوازی الاضلاع کی ایک اور خصوصیت ہے۔اس لئے اس کا مطالعہ کرتا ہے ایک متوازی اضلاع ABCD بنایئے اور اس کے دونوں وتر بنایئے جو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں [شکل 8.10 دیکھیے]

OB، OA،OC اور OD کی پیمائش کیجیے

آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ مشاہدہ کریں گے کہ OA=OC اور OB = OD یا O دونوں وتروں کا وسطی نقطہ ہے۔

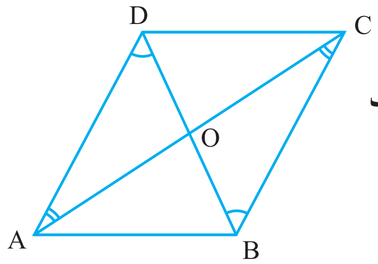
اسی سرگرمی کو کچھ اور متوازی الاضلاع کے لیے دہرایئے: ہر مرتبہ آپ نوٹ کرینگے کہ O' وتروں کا وسطی نقطہ ہے۔اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل مسئلہ ملتا ہے۔

مسئلہ 8.6 متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں

اب کیا ہوگا اگر چارضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کریں؟ کیا یہ متوازی الاضلاع ہوگا؟ یقیناً یہ صحیح ہے' یہ نتیجہ مسئلہ

8.6 کا معکوس ہے- یہ نیچے دیا ہوا ہے

مسئلہ 8.7 اگر کسی چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کریں تو یہ ایک متوازی الاضلاع ہے-



شکل 8.10

اب اس مسئلہ کو مندرجہ ذیل طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں-

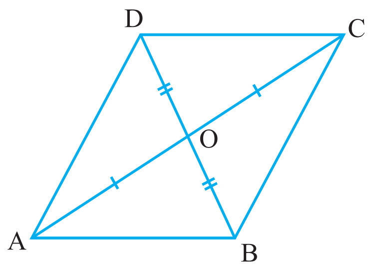
نوٹ کیجیے کہ شکل 8.11 میں یہ دیا ہوا ہے کہ 0A=OC اور OB = OD

اس لیے $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (کیوں؟)

اس لیے $\angle ABO = \angle CDO$ (کیوں؟)

اس سے ہمیں حاصل ہوتا $AB \parallel CD$

اسی طرح سے $BC \parallel AD$ اس لیے ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے-



شکل 8.11

آیئے اب کچھ مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال 1: دکھایئے کہ مستطیل کا ہر زاویہ: زاویہ قائمہ ہے:

حل: آیئے دہراتے ہیں کہ مستطیل کیا ہے۔

مستطیل ایک متوازی الاضلاع ہے جس کا ایک زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

مان لیجیے ABCD ایک مستطیل ہے- جس میں $\angle A = 90^0$

ہمیں دکھانا ہے کہ $\angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

ہمارے پاس ہے $AD \parallel BC$ اور AB ایک قاطع ہے [شکل 8.12 دیکھیے]

اس لیے $\angle A + \angle B = 180^0$ (قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویہ)

لیکن $\angle A = 90^0$

اس لیے $\angle B = 180^0 - \angle A = 180^0 - 90^0 = 90^0$

اب $\angle C = \angle A$ اور $\angle D = \angle B$ (متوازی الاضلاع کے مقابل زاویہ)

اس لئے $\angle C = 90^0$ اور $\angle D = 90^0$

شکل 8.12

اس لیے مستطیل کا ہر زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

مثال 2: دکھایئے کہ معین کے وتر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔

حل: معین ABCD (شکل 8.13 دیکھیے) پر غور کیجیے۔

آپ جانتے ہیں کہ AB=BC=CD=DA (کیوں؟)

اب ΔAOD اور ΔCOD میں OA= OC (متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں)

OD=OD (مشترک)

AD=CD (دیا ہوا ہے)

اس لیے $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (SSS متماثلت شرط)

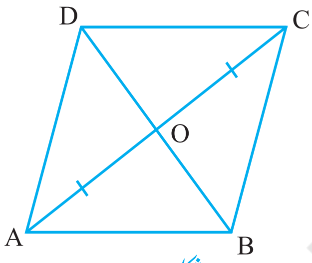
اس لیے $\angle AOD = \angle COD$ (CPCT)

لیکن $\angle AOD + \angle COD = 180^0$ (خطی جوڑا)

اس لیے $2\angle AOD = 180^0$

یا $\angle AOD = 90^0$

اس طرح سے معین کے وتر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں



شکل 8.13

مثال 3: ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں AB=AC ہے۔ AD خارجی زاویہ $\angle PAC$ کی تنصیف کرتا ہے اور $CD \parallel AB$ (شکل 8.14 دیکھیے) دکھایئے کہ

(i) $\angle DCA = \angle BCA$ اور (ii) ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

حل: (i) ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں AB=AC

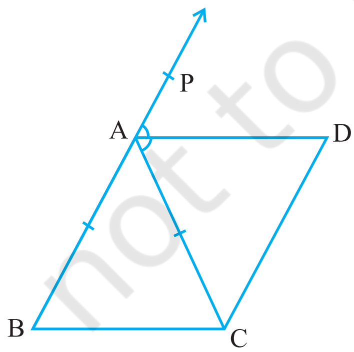
(دیا ہوا ہے)

اس لیے $\angle ABC = \angle ACB$ (مساوی ضلعوں کے سامنے کے زاویہ)

$\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$ (مثلث کا خارجی زاویہ)

یا $\angle PAC = 2\angle ACB$ (1)

اب AD، $\angle PAC$ کی تنصیف کرتا ہے (2)



شکل 8.14

اس لیے $\angle PAC = 2\angle DAC$

اس لیے $2\angle DAC = 2\angle ACB$ [(1) اور (2) سے]

یا $\angle DAC = \angle ACB$

(ii) اب یہ مساوی زاویہ متبادل داخلی زاویوں کا جوڑا بناتے ہیں جب خطوط BC اور AD کو قاطع AC قطع کرتا ہے۔

اس لیے $BC \parallel AD$

اور $BA \parallel CD$ دیا ہوا ہے

اب چار ضلعی ABCD کے مقابل اضلاع کے دونوں جوڑے متوازی ہیں۔

اس لیے ABCD ایک متوازی اضلاع ہے

مثال 4: دو متوازی خطوط l اور m کو قاطع p قطع کرتا ہے (شکل 8.15 دیکھیے)۔ دکھایئے کہ داخلی زاویوں کے ناصفوں سے بنا چار ضلعی مستطیل ہے۔

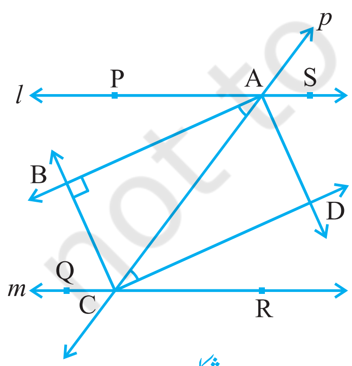
حل: یہ دیا ہوا ہے کہ $PS \parallel QR$ اور قاطع p ان کو نقطہ A اور C پر بالترتیب قطع کرتا ہے۔

$\angle PAC$ اور $\angle ACQ$ کے ناصف نقطہ B پر قطع کرتے ہیں اور $\angle ACR$ اور $\angle SAC$ نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔ ہمیں دکھانا ہے کہ چار ضلعی ABCD ایک مستطیل ہے

اب $\angle PAC = \angle ACR$ (متبادل زاویہ کیوں $l \parallel m$ اور p ایک قاطع ہے)

اس لیے $\frac{1}{2}\angle PAC = \frac{1}{2}\angle ACR$

یعنی $\angle BAC = \angle ACD$



شکل 8.15

یہ خطوط AB اور DC کے لیے قاطع AC سے متبادل زاویوں کا جوڑا بناتے ہیں اور یہ مساوی بھی ہے

اس لیے $AB \parallel DC$

اسی طرح سے $BC \parallel AD$ ($\angle ACB$ اور $\angle CAD$ پر غور کیجیے)

اس لیے چار ضلعی ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے

اور $\angle PAC + \angle CAS = 180^0$ (خطی جوڑا)

اس لیے $\frac{1}{2}\angle PAC + \frac{1}{2}\angle CAS = \frac{1}{2}\times 180^0 = 90^0$

یا $\angle BAC + \angle CAD = 90^0$

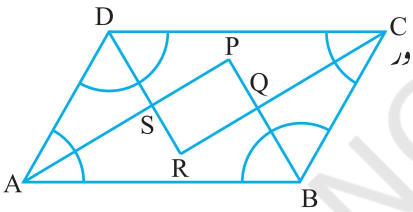
یا $\angle BAD = 90^0$

اس لیے ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں ایک زاویہ 90^0 ہے۔

اس لیے ABCD ایک مستطیل ہے۔

مثال 5: دکھایئے کہ متوازی الاضلاع کے زاویوں کے ناصف ایک مستطیل کی تشکیل کرتے ہیں۔

حل: مان لیجیے P, Q, R اور S بالترتیب متوازی الاضلاع ABCD کے $\angle A$ اور $\angle B$، $\angle B$ اور $\angle C$، $\angle C$ اور $\angle D$، $\angle D$ اور $\angle A$ کے ناصفوں کے نقطۂ تقاطع ہیں۔ (شکل 8.16 دیکھیے)



شکل 8.16

ΔASD میں آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

کیوں کہ DS، $\angle D$ کی تنصیف کرتا ہے اور AS، $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے۔

اس لیے $\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$

$= \frac{1}{2}\times 180^0$ ($\angle A$ اور $\angle D$ قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویہ ہیں)

$= 90^0$

اور $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^0$ (مثلث کے زاویوں کی جمعی خصوصیت)

یا $90^0 + \angle DSA = 180^0$

یا $\angle DSA = 90^0$

اس لیے $\angle PSR = 90^0$ ($\angle DSA$ کے بالمقابل زاویہ)

اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ $\angle APB = 90^0$ یا $\angle SPQ = 90^0$ (جیسا کہ $\angle DSA$ کے لیے دکھایا گیا

ہے) اسی طرح سے $\angle PQR = 90^0$ ہے اور $\angle SRQ = 90^0$

اس لیے PQRS ایک چار ضلعی ہے جس میں تمام زاویہ قائمہ زاویہ ہیں۔

کیا ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ یہ ایک مستطیل ہے؟ اس لیے جانچ کریں۔

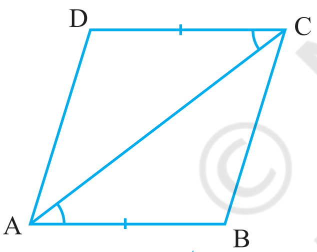
ہم دکھا چکے ہیں $\angle PSR = \angle PQR = 90^0$ اور $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^0$ اس لیے مخالف زاویوں کا ہر جوڑا مساوی ہے۔

اس لیے PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں ایک زاویہ (دراصل تمام زاویہ) 90^0 کے ہیں۔

اور اس لیے PQRS ایک مستطیل ہے۔

8.5 چار ضلعی کے متوازی الاضلاع ہونے کی ایک اور شرط
(Another Condition for a Quadrilateral to be a Parallelogram)

اس باب میں آپ نے متوازی الاضلاع کی بہت سی خصوصیات کے بارے میں پڑھا اور آپ نے یہ بھی تصدیق کی کہ اگر کسی چار ضلعی میں ان میں سے ایک بھی خصوصیت مطمئن ہو تو یہ متوازی الاضلاع بن جاتا ہے۔

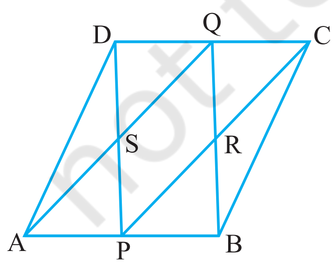


شکل 8.17

اس کو ہم مندرجہ ذیل مسئلہ کی شکل میں بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 8.8: ایک چار ضلعی متوازی الاضلاع ہوتا ہے اگر مقابل اضلاع کا ایک جوڑا مساوی ہو اور متوازی ہو۔

شکل 8.17 کو دیکھیے جس میں AB=CD اور $AB \parallel CD$ ایک وتر AC کھینچئے۔ آپ دکھا سکتے ہیں کہ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$، SAS متماثل اصول



شکل 8.18

اس لیے $BC \parallel AD$ (کیوں؟)

متوازی الاضلاع کی اس خصوصیات کے اطلاق کے لیے آئیے ایک مثال حل کرتے ہیں۔

مثال 6: ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں P اور Q مقابل اضلاع AB اور CD کے وسطی نقطے ہیں [شکل 8.18 دیکھیے) اگر AQ‘ DP کو S پر اور BQ‘ CP کو R پر قطع کریں تو دکھائیے کہ:

(i) APCQ ایک متوازی الاضلاع ہے

(ii) DPBQ ایک متوازی الاضلاع ہے

(iii) PSQR ایک متوازی الاضلاع ہے

حل: (i) چارضلعی APCQ میں

$AP \parallel QC$ (کیوں کہ $AB \parallel CD$) (1)

$AP = \frac{1}{2}AB, CQ = \frac{1}{2}CD$ (دیا ہوا ہے)

اور $AB=CD$ (کیوں؟)

اس لیے $AP=QC$ (2)

اس لیے APCQ ایک متوازی الاضلاع ہے-[(1) اور (2) اور مسئلہ 8.8 سے]

(ii) اسی طرح سے چارضلعی DPBQ ایک متوازی الاضلاع ہے کیوں کہ $DQPB$ اور $DQ = PB$

(iii) چارضلعی PSQR میں

$SP \parallel QR$ (SP‘ DP کا ایک حصہ ہے اور QR‘ QB کا حصہ ہے)

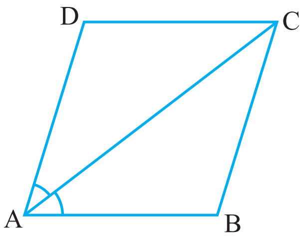
اسی طرح سے $SQ \parallel PR$

اس لیے PSQR ایک متوازی الاضلاع ہے۔

مشق 8.1

1. ایک چارضلعی کے زاویے 3:5:9:13 کی نسبت میں ہیں- چارضلعی کے تمام زاویہ معلوم کیجیے-
2. اگر کسی متوازی الاضلاع کے وتر مساوی ہوں تو دکھائیے کہ یہ مستطیل ہے-
3. دکھائیے کہ اگر چارضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف زاویہ قائمہ پر کرتے ہیں تو وہ معین ہے-
4. دکھائیے کہ مربع کے وتر مساوی ہیں اور ایک دوسرے کی قائمہ زاویہ پر تنصیف کرتے ہیں

5. دکھایئے کہ اگر کسی چارضلعی کے وتر مساوی ہوں اور ایک دوسرے کی تنصیف زاویہ قائمہ پر کرتے ہوں تو یہ ایک مربع ہے۔



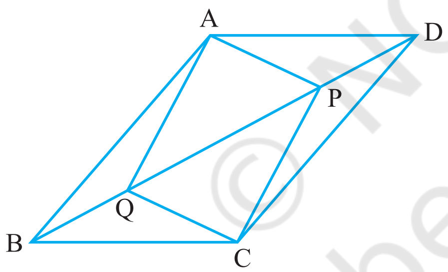
شکل 8.19

6. متوازی الاضلاع ABCD کا وتر AC، $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے۔
[شکل 8.19 دیکھئے] دکھایئے کہ
(i) یہ $\angle C$ کی تنصیف کرے گا اور (ii) ABCD ایک معین ہے۔

7. ABCD ایک معین ہے۔ دکھایئے کہ وتر AC، $\angle A$ اور $\angle C$ کی تنصیف کرتا ہے اور وتر BD، $\angle B$ اور $\angle D$ کی تنصیف کرتا ہے

8. ABCD ایک مستطیل ہے جس میں AC، $\angle A$ اور $\angle C$ کی تنصیف کرتا ہے دکھایئے کہ
(i) ABCD ایک مربع ہے (ii) وتر BD، $\angle B$ اور $\angle D$ کی تنصیف کرتا ہے

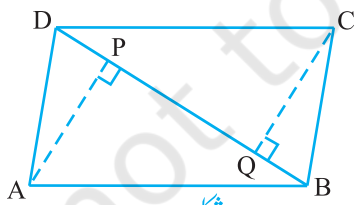
9. متوازی الاضلاع ABCD میں P اور Q دو نقطہ وتر BD پر اس طرح ہیں کہ DP=BQ
[شکل 8.20 دیکھیے) دکھایئے کہ:



شکل 8.20

(i) $\Delta APQ \cong \Delta CQB$ (ii) $AP = CQ$
(iii) $\Delta AQB \cong \Delta PCD$ (iv) $AQ=CP$
(v) APCQ ایک متوازی الاضلاع ہے۔

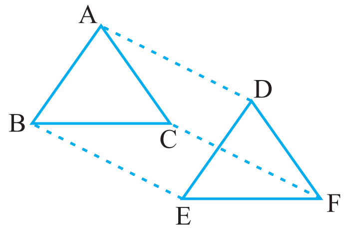
10. ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے اور AP اور CQ، وتر BD پر بالترتیب راس A اور C سے ڈالے گئے عمود ہیں (شکل 8.21 دیکھیے دکھایئے کہ



شکل 8.21

(i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$
(ii) $AP=CQ$

11. ΔABC اور ΔDEF میں AB=DE، $AB \parallel DE$، BC=EF اور $BC \parallel EF$ ہے (راس A، B اور C بالترتیب راس D، E اور F سے ملایئے (شکل 8.22 دیکھئے) دکھایئے کہ:



شکل 8.22

(i) چارضلعی ABED ایک متوازی الاضلاع ہے

(ii) چارضلعی BEFC ایک متوازی الاضلاع ہے

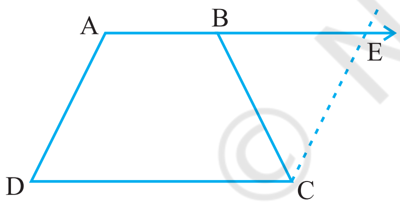
(iii) $AD \parallel CF$ اور $AD \parallel CF$

(iv) چارضلعی ACFD ایک متوازی الاضلاع ہے

(v) AC=DF

(vi) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

12. ABCD ایک منحرف ہے جس میں $AB \parallel CD$ اور AD = BC (شکل 8.23 دیکھیے) دکھایئے کہ:



شکل 8.23

(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

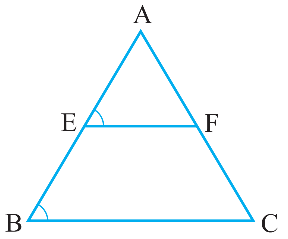
(iv) وتر AC = وتر BD

[اشارہ: AB کو بڑھایئے C سے گذرتا ہوا ایک خط DA کے متوازی بنایئے جو بڑھے ہوئے AB کو E پر قطع کرے]

8.6 وسطی-نقطہ مسئلہ (Mid-point theorem)

آپ نے مثلث اور چارضلعی کی بہت سی خصوصیات کا مطالعہ کیا آیئے اب ایک اور اہم نتیجہ کا مطالعہ کرتے ہیں جس کا تعلق مثلث کے وسطی نقاط سے ہے۔ مندرجہ ذیل سرگرمی کیجیے۔

ایک مثلث بنایئے اور اس کے دو اضلاع کے وسطی نقطہ E اور F مارک کیجیے E اور F کو ملایئے۔ [شکل 8.24 دیکھیئے] EF اور BC کی پیمائش کیجیے $\angle AEF$ اور $\angle ABC$ کی پیمائش کیجیے۔



شکل 8.24

آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ پاتے ہیں کہ

$\angle AEF = \angle ABC$ اور $EF = \frac{1}{2}BC$

اس لیے $EF \parallel BC$ - اس سرگرمی کو کچھ اور مثلثوں کے لیے دہرائیے۔

مسئلہ اس طرح سے آپ مندرجہ ذیل مسئلہ تک پہنچتے ہیں۔

مسئلہ 8.9: مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے

آیئے ایک مثلث ΔABC بنائیں۔

آپ مندرجہ ذیل طریقہ سے اس مسئلہ کو ثابت کر سکتے ہیں۔

شکل 8.25 کا مشاہدہ کیجیے جس میں E اور F بالترتیب AB اور AC کے وسطی نقطہ ہیں اور $CD \parallel BA$ ۔

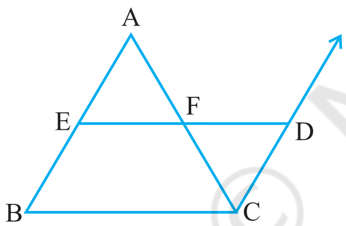
$\Delta AEF \cong \Delta CDF$ (ASA اصول)

اس لیے EF=D F اور BE=AE=DC (کیوں؟)

اس لیے BCDE ایک متوازی الاضلاع ہے۔

اس سے حاصل ہوتا ہے $EF \parallel BC$

نوٹ کیجیے کہ $EF = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}BC$



شکل 8.25

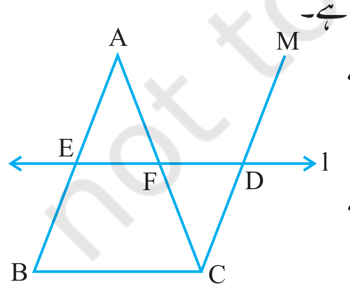
کیا آپ مسئلہ 8.9 کا معکوس بیان کر سکتے ہیں۔

آپ دیکھیں کہ مندرجہ بالا مسئلہ کا معکوس بھی درست ہوتا ہے جو مندرجہ ذیل ہے۔

مسئلہ 8.10: مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے کھینچا جانے والا خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کریگا۔

شکل 8.26 میں مشاہدہ کیجیے کہ E، AB کا وسطی نقطہ ہے۔ E سے گزرنے والا خط l، BC کے متوازی ہے اور $CM \parallel BA$

ΔAEF اور ΔCDF کی متماثلت کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے

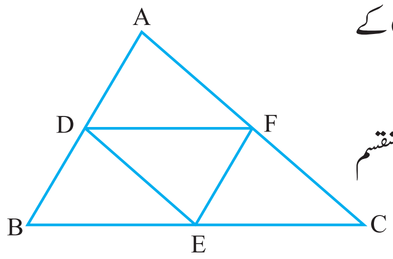


شکل 8.26

کہ AF=CF

مثال 7: ΔABC میں D، E اور F بالترتیب اضلاع AB، BC اور CA کے وسطی نقطے ہیں

[شکل 8.27 دیکھیے] دکھائیے کہ ΔABC چار متماثل مثلثوں میں منقسم ہوجاتا ہے۔



شکل 8.27

حل: کیوں کہ D اور E، ΔABC کے اضلاع AB اور BC کے وسطی نقطہ ہیں

اس لیے مسئلہ 8.9 کی رو سے $DE \parallel AC$

اسی طرح سے $DF \parallel BC$ اور $EF \parallel AB$

اس لیے ADEF، BDFE اور DFCE تمام متوازی اضلاع ہیں

اب DE، متوازی الاضلاع BDFE کا وتر ہے

اس لیے $\Delta BDE \cong \Delta FED$

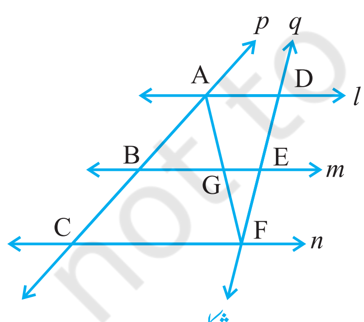
اسی طرح سے $\Delta DAF \cong \Delta FED$

اور $\Delta EFC \cong \Delta FED$

اسطرح سے چاروں مثلث متماثل ہیں۔

مثال 8: قاطع p اور q متوازی خطوط l، m اور n کو اس طرح قطع کرتے ہیں کہ l، m اور n پر مساوی مقطوعہ (Intercept P) AB اور BC کو p پر کاٹتے ہیں (شکل 8.28 دیکھیے)

دکھائیے کہ l، m اور n، q پر بھی مساوی مقطوعہ DE اور EF کاٹیں گے۔



شکل 8.28

حل: اس میں دیا ہوا ہے کہ AB=BC اور ہمیں ثابت کرنا ہے کہ DF=EF۔

آیئے A کو F سے ملائیں جو m کو G پر قطع کرے۔

منحرف ACFD دو مثلثوں میں منقسم ہوگیا۔ جن کے نام ہیں

ΔACF اور ΔAFD

ΔACF میں یہ دیا ہوا ہے کہ B، AC کا وسطی نقطہ ہے (AB=BC)

اور $BG \parallel CF$ (کیوں کہ $m \parallel n$)

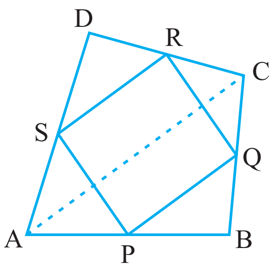
اس لیے G‘ AF کا وسطی نقطہ ہے (مسئلہ 8.10 کا استعمال کرتے ہوئے)

اب ΔAFD میں ہم یہی دلائل استعمال کرتے ہیں کیوں کہ G‘ AF کا وسطی نقطہ ہے $GE \parallel AD$ اور اس لئے مسئلہ 8.10 کی روسے E‘ DF کا وسطی نقطہ ہے

یعنی DE=EF

دوسرے لفظوں میں l‘ m‘ اور n‘ q پر بھی مساوی مقطوعہ کاٹیں گے۔

مشق 8.2



شکل 8.29

1. ABCD ایک چارضلعی ہے جس میں P‘ Q‘ R اور S‘ اضلاع AB‘ BC‘ CD اور DA کے وسطی نقطہ ہیں (شکل 8.29 دیکھیے) AC ایک وتر ہے۔ دکھائیے کہ

(i) $SR \parallel AC$ اور $SR = \frac{1}{2} AC$

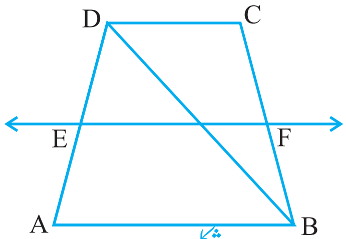
(ii) PQ=SR

(iii) PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے۔

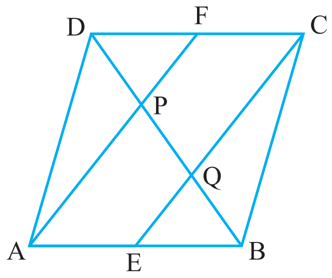
2. ABCD ایک معین ہے اور P‘ Q‘ R اور S بالترتیب اضلاع AB‘ BC‘ CD اور DA کے وسطی نقطے ہیں۔ دکھائیے کہ چارضلعی PQRS ایک مستطیل ہے۔

3. ABCD ایک مستطیل ہے اور P‘ Q‘ R اور S بالترتیب اضلاع AB‘ BC‘ CD اور DA کے وسطی نقطے ہیں۔ دکھائیے کہ چارضلعی PQRS ایک معین ہے۔

4. ABCD ایک منحرف ہے جس میں $AB \parallel DC$ اور BD وتر ہے اور E‘ AD کا وسطی نقطہ ہے۔ E سے گذرتا ہوا ایک خط AB کے متوازی کھینچیے جو BC کو F پر قطع کرے شکل (8.30) دیکھیے کہ F‘ BC کا وسطی نقطہ ہے۔



شکل 8.30



شکل 8.31

5. متوازی الاضلاع ABCD میں E اور F بالترتیب اضلاع AB اور CD کے وسطی نقطے ہیں (شکل 8.31) دکھایئے کہ قطعات خط AF اور EC وتر BD کو تین برابر حصوں میں بانٹتے ہیں۔

6. دکھایئے کہ کسی چارضلعی کے مقابل (مخالف) اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والے قطعات خط ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

7. ABC ایک مثلث ہے جس میں $\angle C$ ' زاویہ قائمہ ہے۔ وتر AB کے وسطی نقطہ M سے گذرتا ہوا ایک خط AB ہے جو AC کے متوازی ہے' AC کو D پر قطع کرتا ہے۔ دکھایئے کہ

(i) D' AC کا وسطی نقطہ ہے۔

(ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2} AB$

8.7 خلاصہ (Summary)

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل چیزیں پڑھیں

1. چارضلعی کے زاویوں کا حاصل جمع 360^0 ہوتا ہے

2. متوازی الاضلاع کا وتر اس کو دو متماثل مثلثوں میں منقسم کرتا ہے۔

3. متوازی الاضلاع میں:

(i) مقابل اضلاع مساوی ہوتے ہیں (ii) مقابل زاویہ مساوی ہوتے ہیں (iii) وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

4. ایک چارضلعی متوازی الاضلاع ہوتا ہے اگر:

(i) مقابل اضلاع مساوی ہوں (ii) مقابل زاویہ مساوی ہوں (iii) وتر ایک دوسرے کی تنصیف کریں۔

(iv) مقابل اضلاع کا ایک جوڑا مساوی اور متوازی ہو

5. مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں اور مساوی ہوتے ہیں اور اس کا معکوس بھی درست ہے۔

6. معین کے وتر ایک دوسرے کو قائمہ زاویہ پر تنصیف کرتے ہیں اور اس کا معکوس بھی درست ہے۔
7. مربع کے وتر ایک دوسرے کی قائمہ زاویہ پر تنصیف کرتے ہیں اور مساوی ہوتے ہیں اور اس کا معکوس بھی درست ہے۔
8. مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والا قطع خط تیسرے ضلع کے مساوی اور اس کا آدھا ہوتا ہے
9. مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے کھینچا گیا خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے تیسرے ضلع کی تنصیف کرے گا۔
10. چار ضلعی کے اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے سے بننے والا چار ضلعی متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔